学校编码：10384　　　　分类号________ 密级______
学号：200423026　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

# Galbrun 方程的一个谱元逼近

## A Spectral Element Approximation to the Galbrun Equation

杨宇博



指导教师姓名：许 传 炬 教授
专 业 名 称：计 算 数 学
论文提交日期：2007 年 5 月
论文答辩日期：2007 年 月
学位授予日期：2007 年 月

答辩委员会主席：__________
评 阅 人：__________

二〇〇七年六月

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密　（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）

作者签名：　　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　年　月　日

# 目 录

# Contents

# 中文摘要

Galbrun方程是由H. Galbrun于上世纪三十年代提出来的非标准的波动方程, 现经常被用于研究声音在运动流体中的传播现象。许多研究人员对该方程进行了多方面的研究，其中数值方法是研究的重要方面之一。目前用于处理Galbrun方程的数值方法大多是有限元法，极少用到谱元法。本文旨在考察简化的Galbrun方程的初边值问题，提出了一个有效的数值计算方法，其中在空间方向上引入一个谱元离散方法，在时间方向上采用Newmark格式。对于连续问题，我们给出了问题解的存在唯一性证明和稳定性性质；对于空间半离散格式，我们证明了格式的稳定性，并给出了误差估计式。误差估计显示空间离散具有谱精度；对于全离散格式，我们给出了稳定性证明。最后，通过算例验证了理论结果。

**关键词**：Galbrun方程; 谱元法; 误差估计

# Abstract

The Galbrun equation, a nonstandard wave equation, was established by H. Galbrun in the early 1930s. It is often used to study sound propagation in flows and has been investigated in many ways. One of the important aspects of these investigations is the development of the numerical methods, most of which are focused on using the finite element method. A few works have been done on the spectral element method. In this paper, we consider the initial- and Dirichlet boundary-value problem for the generalized Galbrun equation. Precisely, we develop a numerical method based on the classical Newmark's schema in time and a spectral element discretization in space. For the continuous problem, we study the existence, uniqueness and stability properties of the solution. For the semi-discrete approximation, we prove the stability of the scheme and derive an error estimate. From the estimate, it is seen that the accuracy of the spectral element approximation is spectral. For the full-discrete approximation, the stability of the numerical solution is obtained. Finally, several numerical examples are provided to confirm the theoretical analysis.

**Key words:** Galbrun equation; spectral element method; error estimate

# 第一节 引言

在许多实际问题，特别是汽车排气系统，航空学中的涡轮叶片引擎的入口管道等等气体流动工程学中，声扰动在非均匀流中的传播是人们研究的主要问题之一[1]。理解这一现象是预测噪音和设计有效削弱声音的元件的重要条件之一。从实际角度来看，这些元件的形状很复杂而流体又是非均匀的；从理论角度来看，困难在于不能成功的建立控制压力场或一些与它相关的标量参数的一般化的传播方程。因此，描述这个问题的基本方程必须能很好的处理这些复杂问题。迄今为止，主要有三类方法：一是线性化的Euler方程（LEE）；二是全位能方程；三是Galbrun方程。

全位能方程是从LEE中得来的，只不过它假定流动和扰动是无旋性的。因此，它是一般化的LEE在特殊情况下的变形。与全位能方程相对应的传播方程只与声波的速度势（velocity potential）有关，而且是标量。这个特征使得它处理起来比较容易，因此曾被广泛使用。基于全位能方程，许多作者采用有限元法（FEM）[2–4]或边界元法[5] 研究了流动变化和多向性对变截面管道中声音传播的影响。另外，许多作者通过运用不同的技巧（如FEM 结合边界元法[6–10]，wave-envelope 元技巧[11–14]和dual reciprocity boundary element method[15]等等）把对纯传播现象的分析推广到了辐射现象中。

因为全位能方程相对比较简单，所以它是一个十分有用的方法，也许是研究声音在流体中传播的有效方法。但是，它有着一个很大的缺点，那就是它不能用于研究有旋性的均流（mean flow）中的情况。例如，当边界层的折射作用很显要时，或者当均流出现旋涡时，流体的旋性就不能被忽视。事实上，如果均流是有旋性的，那么按照独立的声波和有旋性的模式来分解扰动将不再成立。这时，人们就必须直接求解一个由五个方程和五个未知量组成的复杂系统－－LEE；所以许多研究者试图去简化它。例如，Nayfeh 等[16]以及Uenishi和Myers[17]提出了一个数值方法，用于解决声波在含有均匀剪切流的变截面管道中的传播。Abrahamson[18]、Astley和Eversman[19,20] 采用FEM，把LEE 直接应用到了轴对称和二维区域中。对于一些简单的情况，他们取得了好的结果。

从上面的论述来看，在一些实际情况下，使用LEE是必须和无可避免的。可是，由于这个系统远比标量形式的全位能方程复杂的多，所以极少用来解决一般化的情况。于是，许多研究者试图提出一个一般化的方法来解决有旋性的均流中的声音传播问题。这时，人们开始用一个非标准的波动方程来代替LEE。由于这个方程最早是由Galbrun[21]于上世纪三十年代提出来的，所以它被人们称为Galbrun方

程。Galbrun方程源于Eulerian-Lagrangian描述，是LEE的一个精确的变形。它的主要特征是：它是由一个二阶的只依赖于位移的扰动的线性偏微分方程组成；因为Galbrun方程只涉及声波的位移（即使是在非等熵的情形下），所以相对较于LEE，它只产生一个或两个未知量；另外，Galbrun方程不仅能准确描述声波的强度和能量，而且边界条件可以很容易的描述出来；因为声波位移的法线分量显然是连续的，这样就避免了使用Myers条件[22]的困难。为了得到Galbrun方程和把Galbrun方程推广到非线性问题中去，Poirée[23]详述了Eulerian-Lagrangian 描述；另外，他又推导出了一些在任何直界面都成立的连续性条件。Godin[24]独自用一套非常特别的方法得到了Galbrun方程；特别地，他推导出了声波强度和能量的准确表达以及位移在自由、刚性和吸收表面的边界条件。最近，Bonnet 等[25]提出了在一致均流中出现的时谐Galbrun方程的正则化形式；这使得在离散问题时可以采用节点有限元法。接着，Bonnet 等[26]又把这一方法应用到了剪切流中。

从上面引用的内容中，我们发现用于解决Galbrun方程的数值方法大多数都是FEM，极少用到谱元法。谱方法和有限元方法和在原理上是相似的，都是将偏微分方程定解问题化成与之等价的变分形式，再用有穷维空间来逼近变分问题中的无穷维空间，最后通过求解代数方程组得到满足某种精度的近似解。简单地说，有限元方法首先是将求解的区域进行离散化，剖分成若干相互连接而又不重叠的、具有一定形状的子区域；然后在这些单元体中选取基函数，用单元基函数的线性组合逼近单元中的真解。谱方法[27]的基函数是对整个区域而构造的，且为高阶多项式（或三角多项式），其基本思想是将问题的解按谱级数展开，截断后根据方程确定展开系数，生成有限维问题。谱方法主要优点在于它具有所谓的“无穷阶”收敛，即如果原方程的精确解无限光滑，那么用适当的谱方法所求的数值解将与$N^{-1}$的任意次幂速度收敛于精确解（$N$ 为空间逼近参数），且收敛速度快。这一优点是有限差分法和有限元法所无法比拟的。另外，该方法所得的近似解是对于整体计算域的近似，而不是对局域的近似。这也是它区别于有限元方法的重要特征。在有限元方法中，其基函数采用低阶代数多项式来构造，提高求解精度的方法往往是通过网格加密，精度不易提高。二十世纪八十年代发展了一种$h-p$有限元法，可以通过网格加密和提高多项式的阶数两种方式实现高阶精度，但是一般情况下使用的多项式阶数比较有限。谱方法则是通过增加基函数多项式的次数，能得到高精度的解，但因所采用的基函数是对整个区域的，所以谱方法只适用于求解域是规则形状的情形，也就说它不能处理复杂的物理区域。考虑到有限元方法和谱方法各自的优缺点，可以对它们取长补短，将两种方法有机结合起来，使得数值计算既有比较高的精度，又能处理复杂的计算区域。由Patera[28]等人发

展起来的谱元法即是基于这一思想：将复杂区域分解成若干个较小的四边型或六面体区域，然后在每个小区域上使用谱方法。这样，谱元法既继承了有限元方法对复杂区域的适应性，又保持了谱方法的高精度等优点。尽管谱方法的计算量高于有限元等低阶方法，但张量基的使用可有效减少谱元法的计算量，并且考虑到实际计算中谱元法所需要的自由度比其它低阶方法少得多，因此为达到同样精度的解，谱元法所需计算量比其他方法少。从理论上讲，就其精度和收敛速度而言，当问题的解充分正则时，谱方（元）法无疑是最佳的。

在本文中，我们将尝试把谱元法应用到简化的Galbrun方程中，构造一个具有高阶收敛精度的数值格式。本文的结构如下：在第二节中，我们讨论关于简化的Galbrun方程的连续问题，并对其进行稳定性分析；在第三节中，我们将对问题进行离散，空间上采用谱元法，时间上采用Newmark格式；稳定性分析和收敛性分析将在第四节和第五节中给出。最后，在第六节，我们将进行一系列的数值实验来验证理论结果。

# 第 二 节　连续问题及稳定性性质

令$\Omega$是$\mathbf{R}^2$中的一个有界开区域，其边界$\partial\Omega=\Gamma$是Lipschitz 连续的。$\Omega$中的任意点用黑体字母$\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ 表示，时间变量用$t$表示。设$T$是一个正的常数。考虑下面二维的Galbrun方程：给定源项$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$，寻找位移$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$，满足

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)-\nabla(div\mathbf{u})=\mathbf{f}(\mathbf{x},t),\quad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,T), \tag{2-1}$$

初始条件：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_1(\mathbf{x}),\qquad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{2-2}$$

边界条件：

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}=0,\quad \mathbf{x}\in\Gamma. \tag{2-3}$$

在这里，$\mathbf{n}$是边界$\partial\Omega$的单位外法向向量，$\mathbf{u}_0$和$\mathbf{u}_1$分别是初始的位移和速度。

上面提出的模型是一个简化的Galbrun方程；而前面引言中提到的人们研究的Galbrun方程是一般化的Galbrun 方程在具体的情况下的变形，比如说在流体有旋性或无旋性情况下的变形。但是，不管是在哪种情况下，Galbrun 方程都会包含$-grad(div\ \cdot)$算子，而且如何处理这个算子是研究Galbrun方程的主要方面之一。因此通过谱元法研究简化的Galbrun方程对研究其他具体情况下的Galbrun方程是有参考价值的。

现在，为引入问题(2-1)-(2-3)的变分形式，我们先定义一些函数空间，令$L^2(\Omega)^2$为$\Omega$上的平方Lebesgue可积的函数空间，则$H^1(div,\Omega)$定义如下：

$$H^1(div,\Omega)=\{\mathbf{v}\in L^2(\Omega)^2,\ \ div\mathbf{v}\in L^2(\Omega)\}.$$

再定义$V$空间：

$$V=\{\mathbf{v}\in H^1(div,\Omega),\ \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0\ on\ \Gamma\}.$$

$L^2(\Omega)^2$和$H^1(div,\Omega)$的内积定义如下：

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\ d\mathbf{x},\quad (\mathbf{u},\mathbf{v})_1=(\mathbf{u},\mathbf{v})+(div\mathbf{u},div\mathbf{v}),$$

相应的范数定义为：

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})}, \quad \|\mathbf{v}\|_1 = \sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})_1}.$$

为了简便，我们用$A \lesssim B$表示存在一个与$A$，$B$无关的常数c满足$A \le cB$。

假设对$\forall\ t \in$ (0,T)，$\mathbf{f} \in L^2((0,\mathrm{T}) \times \Omega^2)$，$\mathbf{u}_0 \in V$，$\mathbf{u}_1 \in L^2(\Omega)^2$，则问题(2-1)-(2-3)的变分形式为：寻找$\mathbf{u} : (0,T) \to H^1(div,\Omega)$，使得对$\forall\ t \in (0,T)$，在边界$\Gamma$满足$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n} = 0$，在区域$\Omega$上满足$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$，$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{u}_1$以及

$$(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},\mathbf{v}) + a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{f},\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{2-4}$$

其中

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (div\ \mathbf{u}, div\ \mathbf{v}).$$

**定理** 2.1： 问题(2-4)存在唯一解：

$$\mathbf{u} \in H^1(div,\Omega),$$

且$\mathbf{u}$满足下面的稳定性估计:

$$\|\nabla\cdot\mathbf{u}(T)\|^2 + \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(T)\|^2 \lesssim \int_0^T \|\mathbf{f}\|^2 dt + \|\nabla\cdot\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{u}_1\|^2. \tag{2-5}$$

**证明**：显然双线性算子$a(\cdot,\cdot)$是对称的；并且易证得该双线性算子满足弱强制性和连续性，即存在常数$\alpha > 0$和$\lambda \geqslant 0$，使得：

$$\text{弱强制性:} \qquad a(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \lambda\|\mathbf{v}\|^2 \ge \alpha\|\mathbf{v}\|_1^2, \ \ \forall\ \mathbf{v} \in V, \tag{2-6}$$

$$\text{连续性:} \qquad a(\mathbf{u},\mathbf{v}) \le \|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1, \qquad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \tag{2-7}$$

成立。

因此问题(2-4)存在性和唯一性的证明可以参照文献[29] [30]中的证明证得。为了得到稳定性估计，我们在式(2-4)中取$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$，并且关于时间从0到$\tau$进行积分，$\tau \in (0,T)$，则有：

$$\int_0^\tau (\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})dt + \int_0^\tau a(\mathbf{u},\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})dt = \int_0^\tau (\mathbf{f},\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})dt. \tag{2-8}$$

对于上面的等式中的项，直接计算可得：

$$\int_0^\tau (\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})dt = \frac{1}{2}(\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\tau)\|^2 - \|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0)\|^2),$$

$$\int_0^\tau a(\mathbf{u},\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})dt=\frac{1}{2}\left[a(\mathbf{u}(\tau),\mathbf{u}(\tau))-a(\mathbf{u}(0),\mathbf{u}(0))\right],$$

$$\int_0^\tau(\mathbf{f},\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t})dt\leq\int_0^\tau\|\mathbf{f}\|\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\|dt\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau(\|\mathbf{f}\|^2+\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\|^2)dt,$$

故有：

$$\begin{aligned}&\|\nabla\cdot\mathbf{u}(\tau)\|^2+\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\tau)\|^2\\ \leq\ &\|\nabla\cdot\mathbf{u}_0\|^2+\|\mathbf{u}_1\|^2+\int_0^\tau\|\mathbf{f}\|^2dt+\int_0^\tau(\|\nabla\cdot\mathbf{u}(t)\|^2+\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\|^2)dt.\end{aligned}$$

最后应用Gronwall's引理，我们得到了稳定性估计(2-5)。 $\square$

# 第 三 节　问题的离散

在这一节中，我们将对问题(2-4)进行离散，即在空间上采用谱元方法，而在时间上采用Newmark格式。

## 3.1　谱元空间离散

设$\{\xi_j\}_{j=0}^N$为定义在标准区间$\Lambda := (-1,1)$上的GLL点，即是方程$(1-x^2)L'_N(x) = 0$的$N+1$个零点，这里$L_N$是$N$阶Legendre多项式，那么存在正的权系数$\rho_0, \cdots, \rho_N$使得：

$$\int_{-1}^{1} \Phi(\xi) d\xi = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\rho_j, \qquad \forall\ \Phi \in\ \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda),$$

其中$\mathbb{P}_N(\Lambda)$是定义在$\Lambda$上的阶数不超过$N$的多项式空间。

为了使分析尽可能简单,我们把计算区域$\Omega$取为标准区域$\Omega_{ref} = (-1,1)^2$。给定一个正整数$M$，对区域$\Omega$进行匹配网格剖分，即将$\Omega$剖分成不重合的正方形的子区域（元）$\Omega_k$，$k = 1, \cdots, K$，其中元的边长$h = \frac{2}{M}$，$K = M \times M$，即：

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{K} \bar{\Omega}_k, \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset,\ \forall\ k, l,\ k \neq l.$$

引入仿射变换：

$$\Omega_k \xrightarrow{\mathbf{F}^k} \hat{\Omega}\ ,$$

其中，$\hat{\Omega}$表示标准区间：$(-1,1) \times (-1,1)$。令$\Omega_k = (a_k, a'_k) \times (b_k, b'_k)$，其中 $a'_k - a_k = b'_k - b_k = h$，那么$\mathbf{F}^k$表示：

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2) = \mathbf{F}^k(x_1, x_2) = (F_1^k(x_1), F_2^k(x_2)) = (2\frac{x_1 - a_k}{h} - 1, 2\frac{x_2 - b_k}{h} - 1).$$

记$(\xi_i, \xi_j)$，$i, j = 0, \cdots, N$，为标准区域$\hat{\Omega}$上的GLL积分点，那么$\Omega_k$中对应的GLL积分点可表示为：$\xi_{ij}^k \equiv (\xi_{1,i}^k, \xi_{2,j}^k) = (\mathbf{F}^k)^{-1}(\xi_i, \xi_j)$。又记$\rho_i$，$i = 0, \cdots, N$，为一维区间$\Lambda = (-1,1)$上的GLL积分公式的权，那么$\Omega_k$上的GLL积分公式的权可以表示为$\rho_{1,i}^k, \rho_{2,j}^k$：

$$\rho_{1,i}^k = \rho_i \frac{h}{2}, \quad \rho_{2,j}^k = \rho_j \frac{h}{2}, \qquad 0 \le i, j \le N.$$

分片多项式定义如下：

$$\mathbb{P}_{N,K}(\Omega)^2 = \{\Phi \in L^2(\Omega)^2; \Phi|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_N(\Omega_k)^2, 1 \le k \le K\},$$

在这里，$\mathbb{P}_N(\Omega_k)$表示$\Omega_k$上关于各个变量的阶数不超过$N$的多项式空间。今后，我们使用记号$\mathcal{N}$表示离散参数对$(K,N)$。逼近空间$V_{\mathcal{N}}$取为：

$$V_{\mathcal{N}} = V \cap \mathbb{P}_{N,K}(\Omega)^2.$$

记$G$为所有全局GLL点的集合，即：$G = \{\xi_{ij}^k \ |\xi_{ij}^k \in \bar{\Omega},\ i,j = 0,\cdots,N;\ k = 1,\cdots,K\}$。

令$I_{\mathcal{N}}$为基于全局GLL点的插值算子，即：$\forall\ \mathbf{v} \in C^0(\bar{\Omega})^2$，$I_{\mathcal{N}}\mathbf{v} \in \mathbb{P}_{N,K}(\Omega)^2$，满足：$I_{\mathcal{N}}\mathbf{v}(\xi_{ij}^k) = \mathbf{v}(\xi_{ij}^k)$，$\forall\ \xi_{ij}^k \in G$。插值算子$I_{\mathcal{N}}$具有如下估计[31–33]:

$$\|\mathbf{v} - I_{\mathcal{N}}\mathbf{v}\|_1 \lesssim h^{\min(N+1,s)-1} N^{1-s}(|\mathbf{v}|_s + |div\ \mathbf{v}|_s), \tag{3-1}$$

$$\|\mathbf{v} - I_{\mathcal{N}}\mathbf{v}\| \lesssim h^{\min(N+1,s)} N^{-s}(|\mathbf{v}|_s + |div\ \mathbf{v}|_s), \tag{3-2}$$

其中$\mathbf{v} \in H^s(\Omega)^2$和 $div\ \mathbf{v} \in H^s(\Omega), s \ge 1$。

问题(2-4)的谱元离散形式为：对$\forall\ t \in [0,T]$，寻找$\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(t) \in V_{\mathcal{N}}$，使得$\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(0) = I_{\mathcal{N}}\mathbf{u}_0$，$\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathcal{N}}}{\partial t}(0) = I_{\mathcal{N}}\mathbf{u}_1$及

$$(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\mathcal{N}}}{\partial t^2}, \mathbf{v})_{\mathcal{N}} + a_{\mathcal{N}}(\mathbf{u}_{\mathcal{N}}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathcal{N}}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{\mathcal{N}}, \tag{3-3}$$

其中

$$(\mathbf{u}_{\mathcal{N}}, \mathbf{v})_{\mathcal{N}} := (u_{1\mathcal{N}}, v_1)_{\mathcal{N}} + (u_{2\mathcal{N}}, v_2)_{\mathcal{N}},$$

$$a_{\mathcal{N}}(\mathbf{u}_{\mathcal{N}}, \mathbf{v}) := (div\mathbf{u}_{\mathcal{N}}, div\mathbf{v})_{\mathcal{N}}.$$

在这里，对所有分片连续的函数$\phi$和$\psi$，数值积分公式如下：

$$(\phi, \psi)_{\mathcal{N}} := \sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j=0}^{N} \phi(\xi_{ij}^k)\psi(\xi_{ij}^k)\rho_{1,i}^k \rho_{2,j}^k.$$

记$\{l_{1,i}^k\ ;\ \ i = 0,\cdots,N\}$为定义在GLL点$\{\xi_{1,i}^k\ ;\ i = 0,\cdots,N\}$ 上的Lagrangian多项式，而$\{l_{2,j}^k\ ;\ j = 0,\cdots,N\}$为定义在GLL点$\{\xi_{2,j}^k\ ;\ j = 0,\cdots,N\}$上的Lagrangian多项式。$V_{\mathcal{N}}$空间中的对应于点$\xi_{ij}^k \in G$的Lagrangian 全局基函数可构造如下：

$$l_{ij}^k(x_1,x_2)|_{\Omega_l} = \begin{cases} l_{1,m}^l(x_1) l_{2,n}^l(x_2) & \text{如果 } \xi_{ij}^k = \xi_{mn}^l \in \bar{\Omega}_l,\ l = 1,\cdots,K; \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

选取Lagrangian基函数为测试函数，并且用$V_{\mathcal{N}}$中的Lagrangian基函数表示$\mathbf{v}$，则我们由(3-3)得到一个二阶的常微分方程组：

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{N}}(t)+\mathcal{K}_{\mathcal{N}}\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(t)=\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(t), \tag{3-4}$$

其初始条件是：

$$\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(0)=\mathbf{u}_0,\ \ \dot{\mathbf{u}}_{\mathcal{N}}(0)=\mathbf{u}_1.$$

其中$\mathbf{u}_0$（$\mathbf{u}_1$）是$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$（$\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$）在$G$中的点的节点值向量；$\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(t), \forall\ t\in(0,T)$表示：

$$\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(t):=[\mathbf{u}_{1\mathcal{N}}(t),\mathbf{u}_{2\mathcal{N}}(t)]^T,$$

$$\mathbf{u}_{1\mathcal{N}}(t)=\{u_{1\mathcal{N}}(\xi_{ij}^k,t)\mid\ \xi_{ij}^k\in G\},\ \mathbf{u}_{2\mathcal{N}}(t)=\{u_{2\mathcal{N}}(\xi_{ij}^k,t)\mid\ \xi_{ij}^k\in G\};$$

$\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(t)$是依赖于$\mathbf{f}$的节点值的向量；而$\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$和$\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$的定义如下：

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}}:=\begin{pmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}\end{pmatrix};\quad \mathcal{K}_{\mathcal{N}}:=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2\\ \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_4\end{pmatrix}.$$

其中$\mathbf{M}$，$\mathbf{K}_1$，$\mathbf{K}_2$，$\mathbf{K}_3$，$\mathbf{K}_4$分别指的是：

$$\mathbf{M}=\{(l_{1,i}^k l_{1,j}^k, l_{1,m}^k l_{1,n}^k)_N,\quad \xi_{ij}^k,\xi_{mn}^l\in G\},$$

$$\mathbf{K}_1=\{((l_{1,i}^k)' l_{1,j}^k, (l_{1,m}^k)' l_{1,n}^k)_N,\quad \xi_{ij}^k,\xi_{mn}^l\in G\},$$

$$\mathbf{K}_2=\{(l_{1,i}^k (l_{1,j}^k)', (l_{1,m}^k)' l_{1,n}^k)_N,\quad \xi_{ij}^k,\xi_{mn}^l\in G\},$$

$$\mathbf{K}_3=\{((l_{1,i}^k)' l_{1,j}^k, l_{1,m}^k (l_{1,n}^k)')_N,\quad \xi_{ij}^k,\xi_{mn}^l\in G\},$$

$$\mathbf{K}_4=\{(l_{1,i}^k (l_{1,j}^k)', l_{1,m}^k (l_{1,n}^k)')_N,\quad \xi_{ij}^k,\xi_{mn}^l\in G\}.$$

显然$\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$是对称正定的，并且是对角阵；而$\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$是对称半正定的。

## 3.2　Newmark时间离散

下面我们将对(3-4)式进行时间离散，引入时间离散的Newmark格式，首先将(3-4)重写为：

$$\mathcal{M}_{\mathcal{N}}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{N}}(t)=\bar{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}}(t), \tag{3-5}$$