学校编码: 10384　　　　分类号 ______ 密级 ______

学号: 19020071152079　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

求解TLS问题的改进的ULVD-Newton方法

Refined ULVD-Newton Method for the Total Least Squares Problem

李 莉

指导教师姓名: 卢琳璋 教 授

专 业 名 称: 计 算 数 学

论文提交日期: 2010 年 5 月

论文答辩日期: 2010 年 6 月

学位授予日期: 2010 年 　月

答辩委员会主席: ______________

评 　阅 　人: ______________

2010年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

本文讨论如何数值解如下形式的总体最小二乘 (TLS) 问题: 给定 $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $b \in \mathcal{R}^m$, 寻找 (E, f) 使得

$$(A+E)x = b+f$$

$$\min_{E,f} \|(E,f)\|_F$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 为矩阵的 F- 范数。若使得上述范数最小的 (E, f) 已找到, 则满足上式的任意 x 称为 TLS 问题的解。

文献 [3] 给出了求解上述问题的 Newton 法与 RQI 方法。文献 [15] 指出：求解 TLS 问题可以转化为求解矩阵 (A, b) 的最小奇异值及其对应的右奇异向量的问题。文献 [12] 提出采用 ULV 方法进行 SVD 分解。由于 ULVD 方法对矩阵的奇异值以及对应的左右奇异空间的逼近方面有良好的性质，本文的主要思想是：通过对 ULVD 方法进行改进以及对矩阵 (A, b) 进行预处理，使得（改进的）ULVD 方法能够很好地应用于求解 TLS 问题。我们用理论以及数值实验，将其与 RQI 方法进行比较，说明由于改进的 ULVD 方法在矩阵最小奇异值逼近上的优越性，在当 A 或者 (A, b) 是非满秩矩阵或接近非满秩矩阵时，本文给出的数值解 TLS 问题的方法具有明显的优势。

全文共分五个部分：第一章简要的介绍了 TLS 问题与 SVD 分解；第二章介绍在文献 [3] 中提到的求解 TLS 问题的两种方法；第三章给出了改进的 ULVD 方法的描述；在第四章中给出了关于改进算法的一些性质定理的证明；第五章给出了预处理方法和本文的最终算法，且在数值试验中验证了我们的算法的优越性并给出结论。

关键词：TLS 问题，ULVD，RQI，Newton 法，改进的 ULVD.

Abstracts

In this paper, we discuss how to solve numerically the following TLS (Total Least Squares) problem:

Given $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$ and $b \in \mathcal{R}^m$, find (E, f) such that

$$(A+E)x = b+f$$
$$\min_{E,f} \|(E,f)\|_F$$

If a minimizing pair (E, f) has been found for the problem, then any x satisfying $(A+E)x = b+f$ is said to be a solution of the TLS problem.

Two methods are proposed in [3] for the TLS problem, which called the Newton method and the RQI method. In the paper[15], we find that solving the TLS problem requires the computation of the smallest singular value and the corresponding right singular vector of (A, b). It is well-known that the ULVD is a good approximation to SVD. In this paper, we give a precondition method to (A, b) so that we can apply the ULVD method to solve the TLS problem. We also give numerical examples to show that the refined ULVD method is more efficient when the problem is ill-conditioned.

The paper has been organized as follows. In Chapter 1, we give a introduction of the TLS problem and the singular value decomposition. In Chapter 2, we review the two methods, which is used to solve the TLS problem, mentioned in [3]. In Chapter 3, we describe the refined ULVD algorithm. And the proof of some lemmas and theorems are shown in Chapter 4. In Chapter 5, the precondition method to (A, b) and the final the refined ULVD algorithm algorithm are given. Finally, we conclude with experiments and a conclusion.

Key words: Total Least Squares problem, ULVD method, RQI method, Newton method.

目 录

Contents

第一章 绪 论

1980 年，Golub 等人引进了“总体最小二乘”（Total Least Squares）的概念 [6]，并导出了稳健有效的方法——奇异值分解法。

首先，我们简单介绍下总体最小二乘问题（Total Least Squares Problems，以下简称为 TLS 问题）：给定 $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $b \in \mathcal{R}^m$, 寻找 (E, f) 使得

$$\begin{aligned} &(A+E)x = b+f \\ &\min_{E,f} \|(E,f)\|_F \end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 为矩阵的 F- 范数。若使得上述范数最小的 (E, f) 已找到，则满足上式的任意 x 称为 TLS 问题的解。

TLS 问题等价于寻找一个最小 F- 范数的扰动矩阵 (E, f) 使得 (A, b) 的秩降低。因此，我们可以先来分析下矩阵 (A, b) 的 SVD 分解。下面给出 SVD 分解的定义。

定义1.1. *[8]（SVD 分解）设 A 是一个任意的 $m\times n$ 阶矩阵，$m \ge n$。则可记 $A = U\Sigma V^T$，其中 U 是 $m\times n$ 阶矩阵且满足 $U^TU = I$，V 是 $n\times n$ 阶矩阵且满足 $V^TV = I$，$\Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，其中 $\sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_n \ge 0$。$U$ 的列 $u_1, \ldots, u_n$ 称为左奇异向量。V 的列 $v_1, \ldots, v_n$ 称为右奇异向量。$\sigma_i (i = 1, \cdots, n)$ 称为奇异值。*

对于 (A, b)，假设我们已经得到了它的 SVD 分解，即

$$(A, b) = U\Sigma V^T, \qquad \Sigma = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}),$$

其中 $\sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_{n+1} \ge 0$ 是 (A, b) 的奇异值。由最大最小值定理，可知 A 的奇异值 σ_i 间于 (A, b) 之间，即

$$\sigma_1 \ge \sigma_1' \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n \ge \sigma_n' \ge \sigma_{n+1}$$

我们假设 A 是满秩的，即有 $\sigma_n' \ge 0$ 且 $\sigma_n' \ge \sigma_{n+1}$，这时，问题的最小值在秩 1 扰动时达到，即

$$(E, f) = -(A, b)v_{n+1}v_{n+1}^T = -\sigma_{n+1}v_{n+1}v_{n+1}^T$$

此时，$\|(E,f)\|_F = \sigma_{n+1}$。我们可以从其右奇异向量得到 TLS 问题的一个解

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} z \\ \zeta \end{pmatrix} = -\zeta \begin{pmatrix} x_{TLS} \\ -1 \end{pmatrix}$$

其中 $\zeta \neq 0$。当 $\zeta = 0$ 时，TLS 问题无解。

当 $\sigma_n' \geq \sigma_{n+1}$ 时，是不会出现 $\zeta = 0$ 的情况的，所以，以下我们均假设 $\zeta \neq 0$。由上式可知，$\lambda = \sigma_{n+1}^2$ 和 $x = x_{TLS}$ 是满足非线性等式

$$\begin{pmatrix} A^TA & A^Tb \\ b^TA & b^Tb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

由第一行块可知，有等式

$$(A^TA - \sigma_{n+1}^2 I)x = A^Tb$$

成立。此等式称为 TLS 问题的平凡等式，由我们的假设 $\sigma_n' > \sigma_{n+1}$ 可知，$A^TA - \sigma_{n+1}^2 I)$ 是正定的。

文献 [15] 说明了求解 TLS 问题可以转化为求解 (A,b) 最小奇异值以及其对应的右奇异向量的问题。当 A 较大且稀疏时，TLS 问题要比 LS 问题复杂得多，其主要问题就在于求矩阵的 SVD 分解较为困难。计算矩阵最小奇异值及其对应奇异向量的一种迭代法，由 Van Huffel 和 Vandewalle 在文献 [14] 给出。文献 [1][3][17] 给出了一种新的基于 Rayleigh 商的迭代方法，用于求解大规模 TLS 问题。文献 [10] 给出了相应的对于 A 为 Toeplitz 矩阵的迭代求解方法。

而对于矩阵 SVD 分解的逼近上，一种方法是采用其 ULV 分解，ULV 分解在对其奇异值以及对应的左右奇异空间的逼近上都有良好的性质。文献 [12] 说明了，当 SVD 分解花费较大的时候，我们可以采取 ULV 分解来逼近。其对于左右奇异值空间的逼近的上界的证明，在文献 [9] 给出。

本文的主要思想是：通过对 ULVD 方法进行改进以及对矩阵 (A,b) 进行预处理，使得（改进的）ULVD 方法能够很好地应用于求解 TLS 问题。我们用理论以及数值实验，将其与 RQI 方法进行比较，说明由于改进的 ULVD 方法在矩阵最小奇异值逼近上的优越性，在当 A 或者 (A,b) 是非满秩矩阵或接近非满秩矩阵时，本文给出的数值解 TLS 问题的方法具有明显的优势。

第二章 TLS 问题的几种求解方法

§2.1 Newton 法

一种方法 [1][3] 是通过对求解矩阵 (A, b) 最小特征值的改进来求解 TLS 问题。设 x_{TLS} 是 TLS 问题的一个解，那么它是满足

$$\begin{pmatrix} A^TA & A^Tb \\ b^TA & b^Tb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_{n+1}^2 \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

其中 σ_{n+1} 是矩阵 (A, b) 的最小奇异值，且 σ_{n+1}^2 是矩阵

$$(A \quad b)^T(A \quad b) = \begin{pmatrix} A^TA & A^Tb \\ b^TA & b^Tb \end{pmatrix}$$

的最小特征值。通常，σ_{n+1} 是未知的，与 TLS 问题的解 x_{TLS} 一起求得。

式子 (2.1) 是与下列式子等价的

$$\begin{cases} A^TAx - A^Tb = \sigma_{n+1}^2 x \\ b^TAx - b^Tb = -\sigma_{n+1}^2 \end{cases},$$

整理可得一个关于 σ_{n+1} 的特征方程

$$b^Tb - b^TA(A^TA - \sigma_{n+1}^2 I)^{-1}A^Tb - \sigma_{n+1}^2 = 0$$

所以，σ_{n+1}^2 是有理函数

$$h(\sigma^2) = b^Tb - b^TA(A^TA - \sigma^2 I)^{-1}A^Tb - \sigma^2$$

的最小根，且能用 Newton 法求得。

利用 Newton 法，有如下迭代格式

$$(\sigma^{(k+1)})^2 = (\sigma^{(k)})^2 + \frac{b^T(b - Ax^{(k)}) - (\sigma^{(k)})^2}{1 + \|x^{(k)}\|_2^2} \tag{2.2}$$

$$x^{(k)} = (A^TA - (\sigma^{(k)})^2 I)^{-1}A^Tb \tag{2.3}$$

对于 Newton 法，若要 σ 收敛到 σ_{n+1}^2，x_k 收敛到 TLS 问题的解 x_{TLS}，则要求初始值的选取满足 $(\sigma^{(0)})^2 \in [\sigma_{n+1}^2, \sigma_n'^2)$ 而一般情况下，这个条件并不容易被验证。

§2.2 RQI 法

注意到等式 (1.1) 可以写成

$$\begin{pmatrix} A^T \\ b \end{pmatrix} (A, b) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} (-r) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

其中 $r = b - Ax$，于是我们对 x, λ 应用 Newton 法

$$\begin{pmatrix} f(x,\lambda) \\ g(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^T r - \lambda x \\ -b^T r + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

RQI(*Rayleigh quotient iteration*) 是带 *Rayleigh* 商位移的迭代法，特征值问题 (1.1) 的 *Rayleigh* 商等于

$$\rho(x) = \frac{(x^T A^T - b^T)(Ax - b)}{x^T x + 1} = \frac{r^T r}{x^T x + 1}$$

令 $x^{(k)}$ 为当前的估计值且 ρ_k 为对应的 *Rayleigh* 商，则下一步 *RQI* 的估计值 $x^{(k+1)}$ 以及换算系数 β_k 由以下式子得到

$$\begin{pmatrix} J^{(k)} & A^T b \\ b^T A & \eta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_k \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ -1 \end{pmatrix}$$

其中

$$J^{(k)} = A^T A - \rho_k I, \qquad \eta_k = b^T b - \rho_k$$

若 $J^{(k)}$ 正定，则可以由块高斯变化得到解

$$\begin{pmatrix} J^{(k)} & A^T b \\ 0 & \tau_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_k \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ -(z^{(k)})^T x^{(k)} - 1 \end{pmatrix}$$

其中

$$J^{(k)}z^{(k)} = A^Tb, \qquad \tau_k = b^T(b - Az^{(k)}) - \rho_k$$

则有 $x^{(k+1)} = z^{(k)} + u^{(k)}$, 其中

$$J^{(k)}u^{(k)} = \beta_k x^{(k)}, \qquad \beta_k = \tau_k/((z^{(k)})^T x^{(k)} + 1) \tag{2.5}$$

利用 (2.4) 可得

$$\begin{pmatrix} f^{(k)} \\ g^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^T r^{(k)} - \rho_k x^{(k)} \\ -b^T r^{(k)} + \rho_k \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

其中 $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$。而 τ_k 由下列式子得出

$$J^{(k)}w^{(k)} = -f^{(k)}, \qquad z^{(k)} = x^{(k)} + w^{(k)} \tag{2.7}$$

$$\tau_k = (z^{(k)})^T f^{(k)} - g^{(k)} \tag{2.8}$$

则 RQI 方法的主体部分由 (2.5)-(2.8) 构成。初值的选取上, 我们取 $x = x_{LS}$, $\rho(x_{LS}) = \frac{\|r_{LS}\|^2}{\|x_{LS}\|^2+1}$

RQI 算法如下给出：

算法1. *(RQI)*

$$\begin{aligned}
&x = x_{LS};\\
&r = b - Ax;\\
&\sigma^2 = r^T r/(1 + x^T x);\\
&solve\ A^T A u = x;\\
&x = x + \sigma^2 u;\\
&for\ k = 1, 2, ...\\
&\quad r = b - Ax;\\
&\quad \sigma^2 = r^T r/(1 + x^T x);\\
&\quad f = -A^T r - \sigma^2 x;
\end{aligned}$$

$g = -b^T r + \sigma^2;$

$slove(A^T A - \sigma^2 I)w = -f;$

$z = x + w;$

$\beta = (z^T f - g)/(z^T x + 1);$

$slove\ (A^T A - \sigma^2 I)u = x;$

$x = z + \beta u;$

end

在求解方程 $(A^T A - \sigma^2 I)w = f; \sigma \approx \sigma_{n+1}$ 时，则采用了 PCGTLS (preconditioned conjugate gradient algorithm) 算法 [3]。

算法2. *(PCGTLS).* 求解 $(A^T A - \sigma^2 I)w = f$ 的预条件梯度法，利用 $A^T A$ 的 *Cholesky* 因子 R 作为预条件子。

初始化：$w^{(0)} = 0, p^{(0)} = s^{(0)} = R^{-T} f, \eta_0 = \|s^{(0)}\|_2^2.$

迭代：当 $j = 0, 1, ..., l$ 时，且 $\delta_j \neq 0$ 计算

$q^{(j)} = R^{-1} p^{(j)}$

$\delta_j = \|p^{(j)}\|_2^2 - \sigma^2 \|q^{(j)}\|_2^2$

$\alpha_j = \eta_j / \delta_j$

$w^{(j+1)} = w^{(j)} + \alpha_j q^{(j)}$

$q^{(j)} = R^{-T} q(j)$

$s^{(j+1)} = s^{(j)} - \alpha_j (p^{(j)} - \sigma^2 q^{(j)})$

$\eta_{j+1} = \|s^{(j+1)}\|_2^2$

$\beta_j = \eta_{j+1} / \eta_{(j)}$

$p^{(j+1)} = s^{(j+1)} + \beta_j p^{(j)}$

第三章 COD 分解，ULV 分解和改进的 ULVD 算法

§3.1 COD 分解与 ULV 分解

COD 分解（Complete orthogonal decompositions）亦称为完全正交化分解。它的分解形式为

$$X = UCV^T$$

其中 C 是一个三角阵，可以写成分块形式

$$C = \begin{array}{cc} k & n-k \\ (C_1 & C_2), \end{array} \qquad \|C_2\|^2 \approx \|\Sigma_2\|^2 = \sigma_{k+1}$$

其中 $U \in \mathcal{R}^{m\times n}$ 是左正交阵，$V \in \mathcal{R}^{n\times n}$ 是正交阵。

ULV 分解（ULVD）与 COD 分解的形式一样，对于固定的整数 k 与偏差 ϵ，做如下划分

$$U = \begin{array}{cc} k & m-k \\ (U_1 & U_2), \end{array} \qquad V = \begin{array}{cc} k & n-k \\ (V_1 & V_2), \end{array} \tag{3.1}$$

$$C = \begin{array}{c} \\ k \\ n-k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} L & 0 \\ F & G \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.2}$$

$$\|L^{-1}\|^{-1} \le \epsilon, \qquad \|(F \quad G)\| \le \Phi(n)\epsilon \tag{3.3}$$

这里的 $\Phi(n)$ 是一个合适的关于 n 的增函数，例如 $\sqrt{n}$。我们称 k 为 X 的 ϵ-假秩。

§3.2 ULVD 中的矩阵计算与追赶算法

首先，我们引进两个简单的，计算三角阵的最大最小奇异值的迭代算法 [9]。对于下三角阵 $C \in \mathcal{R}^{n\times n}$，我们要算它的最小奇异值以及与之相对应的奇异向量，记为 (σ_n, u_n, v_n)，则我们通过以下迭代来计算它们的值

$$C^{-1}\bar{u}_n = \bar{\sigma}_n^{-1}\bar{v}_n, \tag{3.4}$$

$$C^{-T}\bar{v}_n = \bar{\sigma}_n^{-1}\bar{u}_n + r_{inv}, \tag{3.5}$$

$$r_{inv}^T\bar{u}_n = 0, \quad \|r_{\ inv}\| \le \bar{\sigma}_n^{-1}\delta, \tag{3.6}$$

其中 δ 是小于 (3.3) 中的 ϵ 的规定偏差。在实际计算中，我们利用的是 Lanczos 算法或者幂迭代算法来实现的。

相类似的，计算最大奇异值以及其对应的奇异向量，我们记为 (σ_1, u_1, v_1) ，是通过以下迭代求得的

$$C\bar{v}_1 = \bar{\sigma}_1\bar{u}_1, \tag{3.7}$$

$$C^T\bar{u}_1 = \bar{\sigma}_1\bar{v}_1 + r, \tag{3.8}$$

$$r^T\bar{v}_1 = 0, \quad \|r\ \| \le \bar{\sigma}_1\delta, \tag{3.9}$$

同样的，这也是可以通过几步 Lanczos 算法或者幂迭代实现的。在这里，我们不要求 C 是下三角，甚至不要求它是方阵。对于复杂估计，我们对于上面两种迭代，均假设固定迭代次数为 c_{iter}，则 (3.4)-(3.6) 的计算量为 $c_{iter}n^2$，而对于 $C \in \mathcal{R}^{m\times n}$(3.7)-(3.9) 的计算量为 $2c_{iter}mn$。

在利用上面的两个算法计算出估计奇异向量之后，我们还需要两个追赶过程 [13] 来实现最终算法。

首先，假设我们已经从 (3.4)-(3.6) 的迭代步骤算出了 $(\bar{\sigma}_n, \bar{u}_n, \bar{v}_n)$，为了改进此最小奇异值，我们寻找一个正交阵 $\bar{U}$ 使得

$$\bar{U}^T\bar{u}_n = \pm e_n \tag{3.10}$$

并寻找一个正交阵 $\bar{V}$ 使得

$$\bar{U}^T C\bar{V} = \hat{C} \tag{3.11}$$

是一个下三角阵。其中 $\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 均由 $n-1$ 个 Givens 旋转构成。如果

$$\hat{v}_n = \bar{V}^T\bar{v}_n, \qquad \hat{r}_{inv} = U^T r_{inv}, \tag{3.12}$$

则利用 (3.10)-(3.12)，(3.4)-(3.6) 可化为

$$\hat{C}\hat{v}_n = \pm\bar{\sigma}_n e_n, \tag{3.13}$$

$$\pm\hat{C}^T e_n = \bar{\sigma}_n \hat{v}_n + \bar{\sigma_n}\hat{C}^T \hat{r}_{inv}, \qquad \|\hat{r}_{inv}\| \le \delta\bar{\sigma}_n^{-1}. \tag{3.14}$$

由 (3.13) 易知

$$\hat{v}_n = \pm e_n, \qquad \hat{c}_{nn} = \bar{\sigma}_n,$$

$$\|\hat{C}^T e_n\|^2 = \bar{\sigma}_n^2 + \bar{\sigma}_n^2 \|\hat{C}^T \hat{r}_{inv}\|^2 \le \bar{\sigma}_n^2 + \|\hat{C}\|^2\delta^2$$

且有

$$(0 \quad \hat{C}(n, 2:n)) = \pm\bar{\sigma}_n \hat{r}_{inv}^T \hat{C}.$$

因此

$$\|\hat{C}(n, 2:n)\| \le \delta\| \ C\|.$$

相类似的，若 C 为列数大于行数的下梯形矩阵，我们可以推出一个相类似的追赶过程，初始值取由 (3.7)-(3.9) 得到的 $\bar{u}_1$，找到正交阵 $\bar{U}$ 和 $\bar{V}$ 使得

$$\bar{U}^T \bar{u}_1 = \pm e_1, \tag{3.15}$$

且 $\bar{V}$ 使得 (3.11) 中的 $\hat{C}$ 仍为下梯形矩阵。

若 $\hat{v}_1 = V^T \bar{v}_1$，且 $\hat{r} = V^T r$，则有

$$\hat{C}\hat{v}_1 = \pm\bar{\sigma}_1 e_1,$$

$$\pm\hat{C}^T e_1 = \bar{\sigma}_1 \hat{v}_1 + \hat{r}, \quad \|\hat{r}\| \le \delta\bar{\sigma}_1.$$

由于 $\hat{r}^T \hat{v}_1 = 0$，我们有

$$\|\hat{C}^T e_1\|^2 = \bar{\sigma}_1^2 + \|\hat{r}\|^2, \tag{3.16}$$

因此 $\bar{\sigma}_1 \le \|\hat{C}^T e_1\| \le \bar{\sigma}_1 (1+\delta^2)^{1/2}$.

§3.3 改进的 ULVD

所谓的改进，是为了改进 ULVD 对 SVD 的逼近精度，下面介绍两种改进方法。

第一种方法等价于无位移的 QR 算法 [9]。

算法3. *(Mathias-Stewart refinement procedure)*