图中关于最长路和最长圈的相对长度的边极值问题
纪乃丹
指导教师 范更华 教授
厦门大学

学校编码：10384
学号：19020060153166

分类号_____密级_____
UDC_____

厦门大学

博 士 学 位 论 文

图中关于最长路和最长圈的相对长度的边极值问题

Edge-extremal Problems on the Relative Length of the Longest Paths and Cycles in Graphs

纪 乃 丹

指导教师姓名：范更华 教授
专 业 名 称：应 用 数 学

论文提交日期：2009 年 7 月
论文答辩时间：2009 年 9 月
学位授予日期：2009 年 月

答辩委员会主席：__________
评 阅 人：__________

2009 年 7 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

目录

Contents

图中关于最长路和最长圈的相对长度的边极值问题

中文摘要

本论文主要研究图中关于最长路和最长圈的相对长度的边极值问题。论文共分三章。

在第一章，我们首先介绍了本文所涉及问题的基本定义、相关进展及主要结果。

在第二章和第三章，我们研究了关于图中最长路和最长圈的相对长度的边极值问题。我们将图 G 中最长路和最长圈的顶点个数分别记为 $p(G)$ 和 $c(G)$，定义两者的相对长度 $diff(G) = p(G) - c(G)$。在第二章，我们证明了对于具有 n 个顶点的 2- 连通图 G，其中，$p(G) = p$，如果 $p \geq 20$ 并且 $e(G) > \frac{1}{2}(p-2)(n-7)+13$，那么，我们有 $diff(G) \leq 1$，由此推出，图 G 中的每一个最长圈都是一个控制圈。在 $p(G) = n$ 时，我们给出图例说明所给的界是最好的。在第三章，我们证明了对于具有 n 个顶点的 2- 连通图 G，当 $\delta(G) > 3$ 并且 $p(G) = n$ 时，如果 $n \geq 41$ 并且 $e(G) > \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 78)$，那么，我们有 $diff(G) \leq 2$。我们给出图例说明所给的界是最好的。

关键词：最长路；最长圈；相对长度。

Edge-extremal problems on the relative length of the longest paths and cycles in graphs

Abstract

In this thesis, we mainly study edge-extremal problems on the relative length of the longest paths and cycles in graphs. This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, we introduce the background and main results of the research in the thesis.

In the second and the third chapter, we present results on the relative length of the longest paths and cycles in graphs. For a graph G, let $p(G)$ and $c(G)$ denote the number of vertices in a longest path and a longest cycle in G, respectively. Define $diff(G) = p(G) - c(G)$, which is called the relative length of the longest paths and cycles. In the second chapter, we prove that, if G is a 2-connected graph on n vertices with $p(G) = p$, where $p \geq 20$, and if G has more than $\frac{1}{2}(p-2)(n-7)+13$ edges, then $diff(G) \leq 1$, which implies that every longest cycle in G is a dominating cycle. In the third chapter, we prove that, if G is a 2-connected graph on n vertices with $\delta(G) > 3$ and $p(G) = n$, where $n \geq 41$, and if G has more than $\frac{1}{2}(n^2-13n+78)$ edges, then $diff(G) \leq 2$. In both cases above, the bounds on the number of edges are best possible.

Keywords: Longest path; Longest cycle; Relative length.

第一章　综述

极值问题是图论中的经典问题之一。本论文主要研究了图中关于最长路和最长圈的相对长度的边极值问题。本章共分为三小节，第一节引入了一些基本的概念与符号，这些概念和符号将贯穿全文。第二节介绍了关于路和圈的边极值问题的一些已有主要结果。第三节介绍了有关图中最长路和最长圈的相对长度的基本定义、问题的背景、相关进展以及我们所得到的边极值问题的主要结果。

§1.1　基本概念与符号

设 G 是一个图，H, H' 是 G 的两个子图，首先我们给出一些常用的符号。

$V(G)$　图 G 的顶点集；

$E(G)$　图 G 的边集；

$\nu(G)$　图 G 的顶点数；

$e(G)$　图 G 的边数；

$d_G(v)$　点 v 在图 G 中的度数

(不引起混淆的情况下可简写为 $d(v)$)；

$N_G(v)$　点 v 在图 G 中的邻点集

(不引起混淆的情况下可简写为 $N(v)$)；

$d_H(v)$　点 v 在子图 H 中的度数；

$N_H(v)$　点 v 在子图 H 中的邻点集；

$\delta(G)$　　图 G 的最小度；

$\Delta(G)$　　图 G 的最大度；

$p(G)$　　图 G 中最长路的顶点个数；

$c(G)$　　图 G 中最长圈的顶点个数，即图 G 的周长；

$G[V']$　　图 G 中由顶点子集 V' 导出的子图；

$G[E']$　　图 G 中由边子集 E' 导出的子图；

$G-v$　　从图 G 中去掉顶点 v 及与 v 关联的所有边后所得的图；

$G-uv$　　删除图中的边 uv 得到的图；

$G+uv$　　添加一条连接图 G 中不相邻的两点 u,v 的边得到的图；

$G-E'$　　删除边集 E' 中的所有边所得到的图，这里 $E'\subseteq E(G)$；

$G+E'$　　添加边集 E' 中的所有边所得到的图，这里 $E'\cap E(G)=\emptyset$；

$G-H$　　从 G 中删除 H 中的所有顶点以及与 H 中的点相关联的所有边所得到的图；

G/H　　在 G 中收缩子图 H 所得到的图；

$E(H,H')$	一个端点在 H 中，另一个端点在 H' 中的所有边的集合；
$e(H,H')$	$E(H,H')$ 中的边的数目；
$E(H)$	表示集合 $E(H,H)$；
$e(H)$	表示 $e(H,H)$；
$\overline{G}$	图 G 的补图；
K_n	n 个顶点的完全图；
$K_{m,n}$	两个分部的阶数分别为 m, n 的完全二部图。

在没有特别说明的情况下，本文中所涉及的图都是指有限的，不含环和重边的无向图，即简单图。

下面，我们来介绍一些本文需要用到的关于图的一些基本概念。

设 G 是一个图，$u,v\in V(G)$，如果两点 u,v 之间有一条边 $e=uv$，则称 u,v 是相邻的，并称顶点 u,v 与边 e 相关联。若对 G 中任意两点 u,v，图中都存在连接 u,v 的路，则称图 G 为连通图。图 G 的一个极大的连通子图称为它的一个连通分支。对于 $S\subseteq V(G)$，如果连通图 G 去掉 S 所剩下的图不连通，则称 S 为 G 的一个点割集。若 $|S|=1$，则称 S 中的顶点为 G 的一个割点。

定义 1.1.1 没有割点的连通图称为块，至少有三个顶点的块是二连通图。一个图的块是指该图的一个子图，这个子图本身是块，而且还是具有此性质的块中的极大者。

定义 1.1.2 给定两个图 G_1 和 G_2，它们的并图$G_1\cup G_2$ 是指由它们构造出的一个新图，其顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$，边集为 $E(G_1)\cup E(G_2)$；它

们的联图$G_1 \vee G_2$ 是指由它们构造出的一个新图，其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$，边集为 $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$。

简便起见，我们用 mG 表示 m 个不相交的图 G 的复制图的并图；用 $G_1 \vee G_2 \vee G_3$ 来表示由三个图 G_1、G_2 和 G_3 所构成的联图 $(G_1 \vee G_2) \vee G_3$。

§1.2 图中的最长路和最长圈

关于图中的最长路和最长圈的边极值问题的研究可以追溯到 1959 年，Erdös 和 Gallai 在 [11] 中研究了一个图，如果它不包含 $k+1$ 个顶点的路作为子图（周长小于等于 c）的话，那么，它的边数最多是多少。下面，我们分别介绍一下这两个问题的相关结果和主要进展。

§1.2.1 图中的最长路

在 1959 年，Erdös 和 Gallai 在 [11] 中得到了下面的结果。

定理 1.2.1 ([11])对于整数 $k \geq 0$，设 G 是一个具有 n 个顶点的图，如果图 G 的边数

$$e(G) > \frac{1}{2}(k-1)n,$$

那么，图 G 中最长路的顶点个数 $p(G) > k$。

上述结果在 $n = kt$ 时是最好可能的，并且 [11] 中还给出了极值图的刻画。亦即，“$p(G) \leq k$ 并且 $e(G) = \frac{1}{2}(k-1)n$” 成立，当且仅当 G 为 t 个完全图 K_k 的并，即 $G = \cup_{i=1}^{t} K_k$。

定理 1.2.1 在 $n \neq kt$ 时，并不是最好可能的界。在 1975 年，Faudree 和 Schelp 在 [12] 中给出了上述结果的改进，并且给出了极值图的刻画。

定理 1.2.2 ([12])设 G 是一个具有 n 个顶点的图，如果图 G 中不存在 $k+1$ 个顶点的路，那么，图 G 的边数

$$e(G) \leq t\binom{k}{2} + \binom{r}{2},$$

其中 $n = kt + r$，$t \geq 0$ 并且 $0 \leq r < k$。上式等号成立当且仅当

1. $G = (\cup_{i=1}^{t} K_k) \cup K_r$；或者

2. $G=(\cup_{i=1}^{t-l-1}K_k)\cup(K_{(k-1)/2}\vee\overline{K}_{(k+1)/2+lk+r})$，$0\le l<t$，当 k 为奇数，$t>0$ 并且 $r=(k\pm1)/2$ 时。

我们注意到，以上结论给出的极值图都是不连通的。那么，对于一个连通的，不包含 $k+1$ 个顶点的路的图而言，它的边数最多能达到多少呢？关于这个问题的极值数，最早是在 1977 年，由 Kopylov 在文 [16] 中给出。在 2008 年，Balister 等人在文 [1] 中用不同于 [16] 的证明方法给出了该问题的极值数，并且给出了极值图的刻画。

定理 1.2.3 ([1], [16]) 设 G 是一个具有 n 个顶点的连通图，如果图 G 中不存在 $k+1$ 个顶点的路，那么，图 G 的边数

$$e(G)\le\max\{f(n,k),g(n,k)\},$$

其中，$n>k\ge3$。我们定义函数

$$f(n,k)=\binom{k-1}{2}+(n-k+1),$$

$$g(n,k)=\binom{\lceil(k+1)/2\rceil}{2}+\lfloor(k-1)/2\rfloor(n-\lceil(k+1)/2\rceil).$$

上式等号成立当且仅当 $G=G_{n,k,1}$ 或者 $G=G_{n,k,\lfloor(k-1)/2\rfloor}$。

对于 $n\ge k>2s>0$，我们定义图

$$G_{n,k,s}=(K_{k-2s}\cup\overline{K}_{n-k+s})\vee K_s.$$

如图 1.1 所示，由图 $G_{n,k,s}$ 的构造，很容易可以看出，$e(G_{n,k,s})=\binom{k-s}{2}+s(n-k+s)$，并且，当 $k>2s$ 时，图 $G_{n,k,s}$ 中显然不存在顶点个数为 $k+1$ 的路。

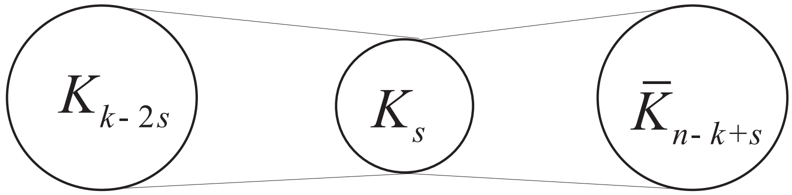

图 1.1: 图 $G_{n,k,s}$。

§1.2.2 图中的最长圈

关于图中最长圈的研究，是图论中的一个经典的研究领域。在 1959 年，Erdös 和 Gallai 在 [11] 中得到了下面的结果。

定理 1.2.4 ([11]) 对于整数 $c \geq 2$ 和 $n \geq 3$，设 G 为一个具有 n 个顶点的图，如果图 G 的边数

$$e(G) > \frac{c}{2}(n-1),$$

那么，图 G 中的最长圈的顶点个数 $c(G) > c$。

下面的图例说明，上述结果在 $c-1$ 能够整除 $n-1$ 时（即 $n-1 = t(c-1)$），是最好可能的。

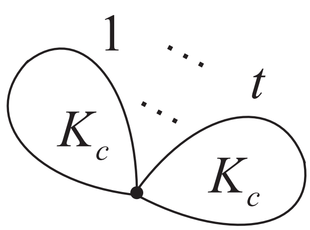

图 1.2: $e(G_1) = \frac{c}{2}(n-1)$, $c(G_1) = c$。

如图 1.2 所示，图 G_1 是由 t 个完全图 K_c，各取出一个顶点作为公共顶点粘在一起构成的新图。显而易见，G_1 是一个 n 个顶点的图，并且 G_1 的边数 $e(G_1) = \frac{c}{2}(n-1)$。但是，由该图的构造很容易看出，图 G_1 的最长圈的顶点个数 $c(G_1) = c$。

Erdös 和 Gallai 的结果在 $c-1$ 不能够整除 $n-1$ 时，并不是最好可能的。在 1976 年，Woodall 在 [27] 中对上述结果做了改进，当 $c-1$ 不能整除 $n-1$ 时，降低了边数的界 $\frac{c}{2}(n-1)$。

定理 1.2.5 ([27]) 对于整数 $c \geq 2$ 和 $n \geq 3$，设 G 为一个具有 n 个顶点的图，如果图 G 的边数

$$e(G) > t\binom{c}{2} + \binom{p+1}{2},$$

其中 $n = t(c-1) + p + 1$，$t \geq 0$ 并且 $0 \leq p \leq c-1$，那么，图 G 中的最长圈的顶点个数 $c(G) > c$。

在 1991 年，Caccetta 和 Vijayan 在 [8] 中，给出了定理 1.2.5 的另一个证明，并且详细刻画了极值图。

文 [8] 中，对于最长圈的顶点个数小于等于 c 的图 G，它的边数 $e(G) = t\binom{c}{2} + \binom{p+1}{2}$ 当且仅当：

1. G 是一个由 $t+1$ 个块组成的连通图，其中一个块是点数为 $p+1$ 的完全图 K_{p+1}，其他 t 个块都是点数为 c 的完全图 K_c（当 $p=0$ 时，G 由 t 个块 K_c 组成）；或者

2. $c = 2l$，而且 $p = \frac{c}{2}$ 或 $\frac{c}{2} - 1$，G 是一个由 $s+1$ 个块组成的连通图（这里 $s < t$），其中一个块是 $K_l \vee \overline{K}_{n'-l}$，这里 $l \geq 2$ 而且 $n' = n - s(c-1)$，而其他 s 个块都是点数为 c 的完全图 K_c。

我们注意到，上面所得到的极值图都具有割点。那么，对于周长不超过 c 的 2- 连通图而言，它的边数最多能达到多少呢？Woodall 最先提出了这个问题，并在 [27] 中提出了下面这个猜想：

猜想 1.2.6 ([27]) 对于整数 $c \geq 2$，$n \geq c-1$，设 G 为一个具有 n 个顶点的 2- 连通图，如果图 G 的边数

$$e(G) > \max\{f(n,2,c), f(n,\lfloor c/2 \rfloor, c)\},$$

其中，$f(n,k,c)=\binom{c+1-k}{2}+k(n-c-1+k)$，$2\le k\le \frac{c}{2}$，那么，图 G 中最长圈的顶点个数 $c(G)>c$。

为了证明这个猜想，Woodall[27] 得到了下面的结论。

定理 1.2.7 ([27]) 对于整数 $n\ge 3$，$2\le c\le \frac{2n+2}{3}$，设 G 为一个具有 n 个顶点的 *2*- 连通图，如果图 G 的边数

$$e(G)>f(n,\lfloor c/2\rfloor,c),$$

那么，图 G 中最长圈的顶点个数 $c(G)>c$。

在 2004 年，范更华教授等人在 [13] 中给出了下述结论，猜想 1.2.6 得到了完整的解决。

定理 1.2.8 ([13]) 对于整数 $n\ge 3$，$\frac{2}{3}n+1\le c\le n-1$，设 G 为一个具有 n 个顶点的 *2*- 连通图，如果图 G 的边数

$$e(G)>\max\{f(n,2,c),f(n,\lfloor c/2\rfloor,c)\},$$

那么，图 G 中最长圈的顶点个数 $c(G)>c$。