学校编号： 10384　　　　分类号：________密级：________
学　　号： 200423004　　UDC：________________

厦门大学

硕士学位论文

具有素数个非线性不可约特征标且维数相等的有限群
the finite groups with a prime number and same degree of nonlinear irreducible characters

朱丽容

指导教师姓名：曾吉文　教授

申请学位级别：硕士学位

专业名称：基础数学

论文提交日期：2007 年 5 月

论文答辩日期：2007 年　月

学位授予日期：2007 年　月

答辩委员会主席：________

评　阅　人：________

2007 年 5 月

the finite groups with a prime number and same degree of nonlinear irreducible characters

By

Lirong Zhu

Supervisor: Professor Jiwen Zeng

Speciality: Foundation Mathematics

Institution: College of Mathematics Science

Xiamen University

Xiamen,P.R.China

May, 2007

学 位 论 文

具有素数个非线性不可约特征标且维数相等的有限群

朱 丽 容

厦 门 大 学

二 0 0 七 年 五 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目　　录

Contents

摘 要

群表示论是近代数学的一个重要分支, 而特征标的理论是研究有限群常表示的最主要工具之一, 它与有限群的结构有着密切的联系. 事实上, 有限群的非线性不可约特征标个数和次数如何影响群的结构已成为有限群常表示论的一个重要研究课题. 本学位论文正是以这一热点问题展开工作的.

本学位论文主要在复数域上探讨, 对非线性不可约特征标个数 $|Irr_1(G)|$ 为素数, 非线性不可约特征标次数集合 $|cd(G)| = 2$ 的群 G, 我们给出了非 2- 群的幂零群和导群极小正规的非幂零群结构. 本学位论文共分三章.

第一章: 我们对与论文有关的研究方向及发展动态进行介绍, 并概述了本学位论文的主要工作.

第二章: 我们给出一些与论文有关的基本概念与重要结论, 包括特殊 p- 群, 超特殊 p- 群, 半超特殊 p- 群, Frobenius 群等以及重要的基本定理, 如著名的 Clifford 对应定理等等, 为第三章奠定必要的理论基础.

第三章: 运用群的幂零与非幂零性质解决本学位论文探讨的问题. 本章分成两节:

第一节, 对具有素数个非线性不可约特征标且其次数都一样的非 2- 群的幂零群给出分类, 证明了这种群可分解为超特殊 2- 群与素数阶群的直积.

第二节, 首先证明了恰有三个非线性不可约特征标且其次数一样的有限非幂零群其导群极小正规. 其次我们考虑更一般的情况对导群极小正规, 具有素数个非线性不可约特征标且其次数都一样的非幂零群给出分类. 我们证明了这样的群有三类. 第一类群 G 为 F- 群, 第二类群 G 可分解为 F- 群与初等交换群的直积, 第三类群 G 的商群 G/Z(G) 为 F- 群.

关键词： 非线性不可约特征标，特征标次数， $Frobenius$ 群，超特殊 p- 群，半超特殊 p- 群.

ABSTRACT

The representation of finite groups is an important branch of mordern mathematics. Character theory is one of the main tools of the representation of finite groups over the complex field, it has close relationship with the structure of finite groups. In fact, how the number and the degree of nonlinear irreducible characters of finite groups influnce the structure of groups is an important issue of category theory. This academic dissertation focuses on these problems.

In this academic dissertation, we study the groups which have a prime number and same degree of nonlinear irreducible characters over the complex field, in these conditions, we classify the finite groups when they are nilpotent but not 2-group, also we classify the groups when they are non-nilpotent and the commutator subgroup is minimal. The whole dissertation includes three chapters.

In the first chapter, we introduce the groundwork of this text, also the research direction and the trends of the development.

In the second chapter, we list some fundamental concepts and facts, including special p-group, extraspecial p-group, semi-extraspecial p-group and Frobenius group, also some important lemmas such as the famous Clifford's correspondence theorem. They give a necessary preparation for the third chapter.

In the third chapter, we solve the problems which this academic dissertation focuses on by means of the properties of nilpotent and non-nilpotent groups.The Chapter 3 is divided in two sections:

In the first section,we prove that the nilpotent group but not 2-group satisfying our conditions is a direct product of an extraspecial-2 group with a prime oreder group.

In the second section, first we prove that the commutator subgroup of a non-nilpotent group which has three nonlinear irreducible characters and their degrees are same is minimal normal. Then we consider more general case. We prove that the groups which satisfying our conditions and whose commutator subgroup is minimal normal are divided into three distinct classes. The first are Frobenius Groups. The second are direct products of a Frobenius group with an elementary abelian group. The third have their factor group G/Z(G) as a Frobenius group.

Keywords: nonlinear irreducible character; the degree of irreducible character; Frobenius group; extraspecial p-group; semi-extraspecial p-group.

第一章　引　言

有限群常表示论最重要的研究内容是特征标理论，特征标理论有很强的技巧. 有限群表示论在发展的初期就是特征标理论在群结构中的应用. W.Burnside 于 1904 年用特征标理论证明的关于 p^aq^b 阶群的可解性定理直到 1972 年才有纯群论的证明；更令人惊奇的是，Frobenius 关于真正规子群存在的一个充分条件至今尚无纯群论的证明. 总之，特征标理论与群结构的研究有着密切的联系. 事实上，有限群的非线性不可约特征标个数和次数如何影响群的结构已成为有限群常表示论的一个重要研究课题. 本学位论文正是围绕这一课题展开，对恰有素数个非线性不可约特征标且维数一样的群 G, 我们探讨了非 2- 群的幂零群和导群极小正规的非幂零群结构.

本章，我们对于有关研究方向的发展动态以及文章的框架作简明的阐述.

我们所考虑的群均为有限群，特征标均为复特征标. Irr(G) 代表群 G 的不可约特征标集合，$Irr_1(G)$ 代表群 G 的非线性不可约特征标集合. cd(G) 代表群 G 的不可约特征标次数集合. 根据 cd(G) 来研究群已经有很多结论. 比如 Passman,Isaacs 和 Garrison 对 $|cd(\mathrm{G})| \leq 3$ 的群进行深入探讨和研究，得到系列结果，如 [7][8][9][11]. 而对一给定集合 $S = \{1, a, b\}$, a, b 为自然数，当 a, b 满足一定条件时，Thomas Noritzsch[10] 给出了满足 $cd(G) = S$ 的这类群的一些性质. 而根据 $Irr_1(G)$ 以及 $Irr_1(G)$ 与 cd(G) 的关系来研究群的结构，Berkovich 得到了许多重要结果. 1992 年，他刻划出所有非线性不可约特征标次数都不一样 (即 $|Irr_1(G)| = |cd(\mathrm{G})| - 1$) 的有限群 [1].1994 年，他对 $|Irr_1(G)| = 8$ 的有限群给出了分类 [3]. 而 1996

年他又对非线性不可约特征标次数恰有两个一样 (即 $|Irr_1(G)| = |cd(\mathrm{G})|$) 的有限群给出了分类 [4][5].

第二章：我们给出一些与论文有关的基本概念与重要结论，包括特殊 p- 群，超特殊 p- 群，半超特殊 p- 群， Frobenius 群等以及重要的基本定理比如著名的 Clifford 对应定理等等，为第三章奠定必要的理论基础.

第三章：运用群的幂零与非幂零性质解决本学位论文探讨的问题. 本章分成两节：

第一节，利用已知的恰有一个非线性不可约特征标的有限群分类，对具有素数个非线性不可约特征标且其次数都一样的非 2- 群的幂零群给出分类，证明了这种群可分解为超特殊 2- 群与素数阶群的直积.

第二节，首先利用已知的恰有一个和两个非线性不可约特征标的有限群分类，证明了恰有三个非线性不可约特征标且其次数一样的有限非幂零群其导群极小正规. 其次我们考虑更一般的情况对导群极小正规，具有素数个非线性不可约特征标且其次数都一样的非幂零群给出分类. 我们证明了这样的群有三类. 第一类群 G 为 F- 群，第二类群 G 可分解为 F- 群与初等交换群的直积，第三类群 G 的商群 G/Z(G) 为 F- 群.

需要说明的是，本文所使用的符号和术语都是标准的，可参考文献 [6]. 设 $N \trianglelefteq G$, θ 为 N 的一特征标，令 $I_G(\theta)$ 为 θ 在 G 中的稳定子群，即 $I_G(\theta) = \{g \in G | \theta^g = \theta\}$. 若 $I_G(\theta) = G$, 则称 θ 是 G- 不变. 再令 $Irr(G|\theta)$ 表示 G 的那些在 θ 上方的不可约复特征标集合，即 $Irr(G|\theta) = \{\chi \in Irr(G) | [\chi_H, \theta] \neq 0\}$.$Lin(G)$ 表示群 G 的线性特征标集合.

另外我们用 G' 表示群 G 的导群， $Z(G)$ 表示群 G 的中心. $F(G)$ 和 $\Phi(G)$ 分别表示群 G 的 $Fitting$ 子群和 $Frattini$ 子群. p 代表一个素数.

第二章　基本概念和主要引理

在这一章里, 我们首先介绍一些有关定义和引理, 这些结果对于本文以后主要定理的证明是重要的.

另外, 本章中给出证明的引理均来自文献 [6] 中的习题.

§2.1　p- 群

接下来给出三个跟 p- 群有关的概念, 可参考文献 [15] 和 [16] 中的定义.

定义 2.1.1[15,16]　群 G 为 p- 群, 称群 G 为特殊 p- 群, 如果它满足下列两个条件之一:

(i)　群 G 为初等交换 p- 群

(ii)　$Z(G) = G' = \Phi(G)$ 是初等交换的.

定义 2.1.2[15,16]　群 G 为非交换的特殊 p- 群, 且 $|Z(G)| = p$, 则称群 G 为超特殊 p- 群.

我们知道 $G/\Phi(G)$ 是初等交换群, 则超特殊 p- 群满足下面引理的条件. 该引理阐明了超特殊 p- 群的构造.

引理 2.1.1[15]　令 G 为非交换 p- 群, $G/Z(G)$ 为初等交换群, $Z(G)$ 循环. 则

(i)　$|G'| = p$

(ii)　$|G/Z(G)|$ 为一个平方数

定义 2.1.3[10] 群 G 为非交换 p- 群，若对 $Z(G)$ 的任一极大子群 N 满足 G/N 为超特殊 p- 群，则称群 G 为半超特殊 p- 群.

关于半超特殊 p- 群有许多等价的刻划，可参考文献 [10][14]. 本文只选择文献 [10] 中等价的特征标刻划.

引理 2.1.2[10] G 为非交换 p- 群，则以下两个结论等价：

(1) G 为半超特殊 p- 群

(2) $Z(G) = G'$ 且 $cd(G) = \{1, |G : Z(G)|^{\frac{1}{2}}\}$

§2.2 $Frobenius$ 群

$Frobenius$ 群无论在群的结构上还是群表示理论中都占据十分重要的地位. 下面先给出 $Frobenius$ 群的概念，可参看文献 [16] 中的定义.

定义 2.2.1[16] 设 G 是有限群， $1 < H < G$. 如果 $H \bigcap H^g = 1, \forall g \in G - H$, 则称 G 为关于子群 H 的 $Frobenius$ 群 (简称 F- 群), 并称 H 为 G 的 $Frobenius$ 补 (简称 F- 补). 而 $N = G - \bigcup_{g \in G}(H^g - 1)$ 叫做 G 的 F- 核.

注： Frobenius 有一个深刻的定理，即如果 G 为关于子群 H 的 F- 群，则 $\exists N \trianglelefteq G$, 有 $G = NH, N \bigcap H = 1$.(实际上该正规子群 N 即为 F- 核，是由 H 唯一确定的.)

引理 2.2.1[6] 设 $N \trianglelefteq G$, 若 $C_G(x) \leq N$ 对 $\forall 1 \neq x \in N$, 则以下两结论成立：

(i) $\forall \varphi \in Irr(N)$, $\varphi \neq I_N$, 有 $I_G(\varphi) = N$ 和 $\varphi^G \in Irr(G)$.

(ii) $\forall \chi \in Irr(G)$ 且 $N \not\subseteq Ker(\chi)$, 那么 $\exists \varphi \in Irr(N)$ 有 $\varphi^G = \chi$.

注: 引理 2.2.1 中结论 (i) 实际上是 G 为 F- 群的充要条件，即是 F- 群的等价特征标刻划，可参考文献 [17].

下面给出 F- 群的等价纯群论刻划.

引理 2.2.2[6] 设 $N \trianglelefteq G$,$G = NH, N \cap H = 1$, 则群 G 是以 H 为 F- 补的 F- 群的充要条件是 $C_G(x) \leq N$ 对 $\forall 1 \neq x \in N$.

我们不依赖特征标只运用 F- 群的基本群性质来证明该引理.

证明. 充分性：只须对任意的 $g \in G - H$, 证明 $H \bigcap H^g = 1$. 设 $g = yx$, 其中 $y \in H$,$x \in N$. 由 $g \notin H$ 有 $x \neq 1$. 假定有 $1 \neq y_1 \in H \bigcap H^g = H \bigcap H^x$, 于是存在 $1 \neq y_2 \in H$ 使 $y_1 = y_2^x = y_2[y_2, x]$. 因 $N \trianglelefteq G$ 有 $[y_2, x] \in N$, 于是 $y_2^{-1}y_1 \in N$, 又 $y_2^{-1}y_1 \in H$, 而 $N \cap H = 1$, 故 $y_2^{-1}y_1 = 1$, 即 $y_2 = y_1$. 由此就有 $y_2^x = y_2$, 即 $y_2 \in C_G(x)$. 这与 $C_G(x) \leq N$ 矛盾. 充分性得证.

必要性: 反证, 设存在 $x \in N$, 有 $C_G(x) \not\leq N$. 则存在 $y \in C_G(x)$ 满足 $y \in G - N$. 因 G 是 F- 群, 根据定义 2.2.1 设 $y = h^g$, 其中 $h \in H$, $g \in G$. 则 $g^{-1}hgx = xg^{-1}hg$, 即 $h = gxg^{-1}hgx^{-1}g^{-1}$, 则 $H^{gxg^{-1}} \bigcap H \neq 1$, 从而 $gxg^{-1} = 1$, 即 $x = 1$ 矛盾. 必要性得证.

注: (i) 由引理 2.2.1 及其注记可知引理 2.2.2 中大前提 $G = NH$, $N \cap H = 1$ 是多余的.

注: (ii) F- 群的等价纯群论刻划实际上有 5 种，可参考文献 [6].

下面的引理对本文证明至关重要，可参考文献 [10] 或 [13].

引理 2.2.3[10,13] 群 G 非幂零，设 $cd(G) = \{1, m\}$, 则有