

学校编号: 10384

分类号: _____ 密级: _____

学 号:

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

三角格及满二叉树上的 σ 全一问题

σ all-ones problem on triangular grids and full binary trees

平 征

指 导 教 师: 钱建国 教授

专 业 名 称: 应 用 数 学

论 文 提 交 日 期: 2008 年 6 月

论 文 答 辩 日 期: 2008 年 月

学 位 授 予 日 期: 2008 年 月

答 辩 委 员 会 主 席: _____

评 阅 人: _____

2008 年 6 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

目录

中文摘要	iii
英文摘要	iv
第一章 引言	1
第二章 三角格上的 σ 全一问题	5
§2.1 背景介绍和基本结果	5
§2.2 以三角形为边界的三角格	7
§2.3 以菱形（四边形）为边界的三角格	13
§2.4 以六边形为边界的三角格	16
第三章 满二叉树上的 σ 全一问题	19
§3.1 预备知识	19
§3.2 满二叉树上的 σ 全一问题	20
参考文献	23
致谢	27

Contents

Abstract(in Chinese).....	iii
Abstract(in English).....	iv
Chapter I Introduction	1
Chapter II σ all-ones problem on triangular grids	5
Section I Backgrounds and basic results	5
Section II Triangular grids bounded on triangle	7
Section III Triangular grids bounded on diamond (tetragon)	13
Section IV Triangular grids bounded on hexagon	16
Chapter III σ all-ones problem on full binary trees	19
Section I Preliminary knowledge	19
Section II σ all-ones problem on full binary trees	20
References.....	23
Acknowledgements	27

摘 要

细胞自动机是一种离散动力系统, 它包含了由细胞单元的状态构成的配制以及作用在配制上的传递规则. 其数学刻画如下: 假设在一个无向图的每个顶点上安装有一个指示灯和一个按钮. 如果在该图中按下一个按钮, 则它的所有相邻点上的灯将由暗到亮, 反之亦然. 开始时, 所有灯都是暗的. 问题是: 是否有可能按下一系列的按钮使得最终所有的灯都亮了? 该问题被称为 σ 全一问题, 特别地, 若图的每一个点都有一个自环, 则它也被称为 σ^+ 全一问题, 起源于 Sutner^[29] 引入的棋盘上的全一问题, 后被 Peled^[20] 称为点灯问题.

近年来 σ^+ 全一问题已经被广泛的研究, 见文 Sutner^[30, 31], Barua 和 Ramakrishnan^[2] 以及 Dodis 和 Winkler^[13]. 用线性代数的理论, Sutner^[27] 证明 σ^+ 全一问题的解对任何图总是存在的, 并给出了 $n \times n$ 的格子图上解的一些计数结果. Eriksson 等给出了解存在性的图论证明^[15]. 进而, Chen 和 Gu^[8] 给出了一个精巧的图论算法来找到一般图上的解. 与 σ^+ 全一问题不同, σ 全一问题在很多图上都无解 (例如 C_3 和 P_5). 近期, Chang 和 Qian 在文^[40] 中给出了四角格与六角格上的 σ 全一问题无解的一个充要条件. 本文分别给出了以三角形、菱形 (四边形) 和六边形为边界的三角格及满二叉树上的 σ 全一问题无解的充要条件.

关键词: σ 全一问题, 偶等价覆盖, 奇集合, 三角格, 满二叉树.

Abstract

A cellular automaton is discrete dynamical system that consist of an arrangement of basic components called cells together with a transition rule. This system can be mathematically modeled as the following problem: Consider an undirected graph equipped with an indicator light and a button in each of its vertices. If a button is pressed, then the light of all its edge-adjacent vertices will change from off to on, and vice versa. Initially all lights are off. The problem is: is it possible to press a sequence of buttons in such a way that in the end all lights are on? This problem is called the σ all-ones problem. In particular, if there is a self-loop at each vertex then it is also referred to as the σ^+ all-ones problem which was firstly introduced by Sutner^[29] for chessboard. An equivalent version of this problem was proposed by Peled^[20] and is called lamp lighting problem.

In this thesis, a sufficient-necessary condition to σ all-ones problem for full binary trees and the triangular grids bounded on the triangular, tetragon and hexagon to have no solution are given, respectively .

Keywords: σ all-ones problem, even parity cover, odd set, triangular grids, full bianary trees.

第一章 引言

细胞自动机是生物体自繁殖系统形式模型, 最先由 Neumann 提出的. 细胞自动机是一种离散动力系统. 它包含了由细胞单元的状态构成的配制以及作用在配制上的传递规则. 设 $G = (V, E)$ 是一个有限无向的简单连通图. 图上的每一个顶点可以看作细胞自动机上的一个细胞单元, 细胞单元上状态的值或者是 0 或者是 1. 所有顶点的赋值状态称为一个配制, 细胞自动机的演化由局部变化规则决定, 即顶点 (细胞单元) v 在 $t+1$ 时刻的状态仅由它的相邻顶点 (细胞单元) v 在 t 时刻的状态决定.

回溯到 1948 年, Neumann 于 1948 年 9 月的在 Hix Symposium 召开的会议上引入自动机理论概念 [34]. 当时自动机理论概念的影响远不及图灵机 [33]、第一神经网络 [23] 及自然和人工自动机控制论等概念. 术语细胞自动机作为生物体自繁殖系统的形式模型由 Neumann [35] 引入的. 这个构造的关键词又可以回溯到更早它的关于生物系统建模 [34] 的说法. 现在细胞自动机已被从许多不同角度更为广泛的研究, 且人们正在不断探索其构造关系存在性问题 [12, 17, 5, 38]. 我们集中研究图的有限可加细胞自动机主题即在有限无向图中按可加规则的细胞自动机. 尤其是研究在众所周知的两个可加规则 σ^+ 规则和 σ 规则下的情况. 这两规则下的细胞自动机已作为例子在文 [36, 37, 32] 中研究. 在环和路中的研究见文 [22, 26]. 在文 [19] 中, σ^+ 规则下的树的自动机已经被引入. σ^+ 规则和 σ 规则在文 [36] 中各自称为 150 规则和 90 规则. 有限细胞自动机的一个重要应用领域是超大规模集成电路设计, 关于可加细胞自动机在超大规模集成电路详细应用见文 [5]. 超大规模集成电路设应用中的一个重要问题是设计零位分界线 90/150 的细胞自动机的特征多项式. 此问题最先是在文 [1] 中提出, 接着在文 [25] 中提出了一个解法, 该解法应用了 $GF(2)$ 上的 Lanczos 三对角线化算法的观点. 细胞自动机的细胞有不同的状态集合称为多基因细胞自动机. 这种细胞自动机除了在 Holland [4] 的著作之外不太受关注. 通常情况所有细胞的状态集是同样的. 这个集合有一个代数结构. 对于线性细胞自动机, 状态集合通常作为一个域 [22]; 然而以 Z_m 为状态集合的细胞自动机, 其中整数是以 m 为模的整数, 对于任意 m 已被深入研究 [18]. 在超大规模集

成电路背景下, 这个集合是 $\{0, 1\}$, 两个元素的域. 给定的有意义的目标配制是 1, 即所有分支的顶点为 1. 在这篇文章中, 我们主要研究简单无向图图上的基于 σ^+ 规则和 σ 规则的有限可加自动机.

我们考虑局部传递规则 σ 的一个非常简单的代数性质: 状态元素 $GF(2)$ 上的元素且顶点 (细胞单元) v 下一个状态是与其相邻的顶点 (细胞单元) 的现状态之和. 类似的, 对于 σ^+ 规则, $t+1$ 时刻的顶点 v 的值是其邻点 t 时刻的值之和 (模 2), 顶点 v 本身值的变化也一样. 设 X 是 t 时刻的一个配制, Y 是每一个顶点在 σ^+ 或 σ 规则下 $t+1$ 时刻的配制, 则称 Y 是 X 的后继 (分别关于 σ^+ 或 σ 规则). 相反的, X 是 Y 的前驱. 研究配制变化的一个基本问题是判断一个给定目标配制是否具有前驱. 这个问题称为前驱存在问题 (PEP)^[26]. 对这个问题的复杂性的已知结果参照文 [28, 39]. 如果给定一个界 β , 寻找基数最多为 β 的前驱, 这个问题就称为界定前驱存在问题 (BPEP). 正如文 [28] 中所示 PEP 是对有限细胞自动机在 NP 上的刻画. 从文 [26] 中我们知道 PEP 对于 σ^+ 和 σ 规则下能够以 $GF(2)$ 上的多项式倍数解决. 在文 [26] 中, 作者已经证明了 BPEP 的一个修正描述 NP-hard 即要求前驱配制中非零状态的细胞单元数目最少.

对于 σ^+ - 规则, 当初始配制是 0 而目标配制是 1, 与之相关的问题也称为 σ^+ 全一问题^[29]. 为了方便, 一个目标配制的前驱也称为一个解法. 这已应用于线性细胞自动机, 见文 [27] 及其相关参考文献. Peled 在文 [20] 中提出的点灯问题是 σ^+ 全一问题的一个等价描述. σ^+ 全一问题近期已经被广泛的研究, 见文 Sutner^[30, 31], Barua 和 Ramakishnan^[2] 与 Dodis 和 Winker^[13]. 应用线性代数知识 Sutner^[27] 证明了在 σ^+ 规则下对于任意图总是可以点亮每一盏灯, 且给出关于 $n \times n$ 格子图的计数问题的一些结果. Losser^[21] 应用线性代数给出又一个漂亮的证明. Eriksson 等给出图论方式的证明^[15]. 因此对于普通图 (简单图) 的 σ^+ 全一问题解的存在性问题已经解决了. 以文 [15] 中的结果为基础, 归纳得到图论算法, 该算法的时间复杂性不是多项式倍数而是远远超过 $O(n!)$. Galvin^[16] 给出求解树的一个线性倍数的图论算法. Chen 和 Gu^[8] 对于简单图给出了一个精确的图论算法, 复杂性为 $O(n^3)$. 且如果我们也要求非零状态的细胞数为最小的相关的前驱存在问题就称为最小 σ^+ 全一问题. 在文 [26] 中, Sutner 证明了通常最小 σ^+ 全一问题是 NP- 完

全的. 近年来, Broersma 和 Li 证明了二部图的 NP- 完全问题 [3]. 对于树的 σ^+ 全一问题的任何解法, Chen 等在文 [7] 中通过引入准 σ^+ 全一问题的概念, 给出解的特征刻画, 并且给出树的 σ^+ 全一问题解法数目. 同时通过应用最小奇 (偶) 和问题作为子程序, 获得了树的最小 σ^+ 全一问题的线性时间复杂度的算法. 在此基础上, Chen 等又在文 [6] 中得到了单循环图和双循环图的最小全一问题的线性复杂度的图论算法.

对于 σ^- 规则, 当初始配制是 0 而目标配制是 1, 我们称相应的问题为 σ 全一问题. 此外, 当目标配制是任意一个配制 1-b, 相关的问题称为常规 σ 全一问题, 此时 b 是任意配制. 易得到常规 σ 全一问题也是考虑以任意配制为开始, 全一配制成为结果的问题. σ 全一问题是常规 σ 全一问题当 b 为 0 时的特例, 这里 0 是一个向量, 即所有的分支状态为 0. 不同于 σ^+ 规则, 对于 σ 全一问题并不是所有图都有解. 例如, 对于 C_3 或 P_5 , 一个三角形或 5 点的路, 其上的 σ 全一问题无解. 另外, 由奇集合 [14] 问题, 我们易证明在 σ^- 规则下目标配制成为 1 的 BPEP 保持 NP- 完全性即使 G 是二部图. Li 等在文 [10] 中找到了解决树的常规 σ 全一问题的线性倍数的特征解法, 且在此算法中, 给出计算这算法数目的简单公式. 同时也获得其他线性倍数的算法, 且从中可以找出最小数目的非零状态的解即通常的最小 σ 全一问题的解. 在文 [21] 得到一个重要结论, 图 G 上的 σ 全一问题有解当且仅当没有奇数势偶等价覆盖. 近期 Chang 和 Qian 在此基础上在文 [40] 中给出四角格和六角格 σ 全一问题无解的一个充要条件.

相对于可加细胞自动机的代数转化处理, 我们对基于 σ^+ 和 σ 规则的有限可加细胞自动机的图的结构更感兴趣, 特别是 σ 全一问题的解的存在性更感兴趣. 因此, 为更方便描述特定条件下的 σ 全一问题的解的存在性问题, 参考文 [24] 和 [11] 我们对关于图论术语方面的问题重新措辞. σ 全一问题如下引出: 有一个 $n \times n$ 棋盘, 在棋盘上的每一个方格上安装一个指示灯和一个按钮. 如果按下某各方块上的按钮, 则与该方块相邻方块上的灯将从暗到亮, 反之亦然. 假设开始所有的灯是关着的. 我们要研究的问题是: 是否有可能按下一系列的按钮使得最后所有的灯都亮起来么? 如果存在这样的解, 如何寻找? 以上的所有问题可以对任何图提出. 这里以及下面我们仅考虑无向简单连通图. 非连通图按分支考虑即可. σ^+

全一问题是指一个按钮不仅点亮与之相邻的灯也点亮其本身的灯. 在此规则下的全一问题就是 σ^+ 全一问题. 不同于 σ^+ 全一问题, σ 全一问题的解并不一定存在. 本篇文章主要研究三角格及满二叉树上的 σ 全一问题解的存在性问题.

在图论术语中, σ^+ -规则下的全一问题的解法可以如下陈述: 设图 $G = (V, E)$, V 和 E 分别是 G 的点集和边集. X 是 V 的子集, 如果对 $\forall v \in G$, 在 X 中与 v 相邻的顶点数为奇数或者 v 即为 X 中的点, 则称子集 X 为一个奇等价覆盖^[14]. 易得, X 即为图 G 的 σ^+ 全一问题的解. 因此, σ^+ 全一问题可以如下系统的阐述: 设图 $G = (V, E)$, 是否存在 V 的一个子集 X , 使得对 $\forall v \in V - X$, 在 X 中与 v 相邻的顶点数为奇数, 而对 $\forall v \in X$, 在 X 中与 v 相邻的顶点数为偶数? 类似的, σ -规则下的全一问题的解法可以如下陈述: 设图 $G = (V, E)$, V 和 E 分别是 G 的点集和边集. X 是 V 的子集, 如果对 $\forall v \in G$, 在 X 中与 v 相邻的顶点数为奇数, 则称子集 X 为一个奇集合^[14]. 易得, X 即为图 G 的 σ 全一问题的解. 因此, σ 全一问题可以如下系统的阐述: 设图 $G = (V, E)$, 是否存在 V 的一个子集 X , 使得对 $\forall v \in X$, 在 X 中与 v 相邻的顶点数为奇数?

上面说描述的全一问题均为点-点问题. 全一问题随着研究的深入不断演化, 具有各种形式. 从点点问题, 易于提出下面 3 类问题. 点边问题: 假设图的每条边上有一盏灯, 每一个顶点上有一个按钮. 如果我们按下顶点上的按钮, 则改变与之相邻的边上的灯的状态. 假设刚开始所有灯是暗的, 问题是是否可以按下一系列的按钮点亮所有边上的灯. 边点问题: 假设图的每个顶点有一盏灯, 每条边上有一个按钮. 如果我们按下边上的按钮, 则改变与之相邻的顶点上的灯的状态. 假设刚开始所有灯是暗的, 问题是是否可以按下一系列的按钮点亮所有顶点上的灯. 边边问题: 假设图的每条边上有一盏灯和一个按钮. 如果我们按下边上的按钮, 则改变与之相邻的边上的灯的状态. 假设刚开始所有灯是暗的, 问题是是否可以按下一系列的按钮点亮所有边上的灯. 易知这个问题可以转化为其线图上的点点问题.

第二章 三角格上的 σ 全一问题

§2.1 背景介绍和基本结果

有一个 $n \times n$ 棋盘, 在棋盘上的每一个方格上安装一个指示灯和一个按钮. 如果按下某各方块上的按钮, 则该方块及其边相邻方块上的灯将从暗到亮, 反之亦然. 假设开始所有的灯是关着的. 我们要研究的问题是: 有可能按下一系列的按钮使得最后所有的灯都亮起来么? 这就是由 Suntner 最先引入的 σ^+ 全一问题. 由 Peled 提出的点灯问题是其的一个等价描述. 与上述棋盘上的 σ^+ 全一问题不同, 如果一个按钮仅仅点亮它的边相邻方块上的灯而不点亮自己方格上的灯, 在这种规则称为 σ 规则, 在此规则下的相应的问题称为 σ 全一问题. σ^+ 全一问题可以推广至对任意图提出, 只要图上每个顶点安有一个按钮和一个指示灯: 则棋盘上的边相邻就相应的转化为图上的点相邻. 根据这个定义, 简单图上的 σ^+ 规则等价于在图上的每一个顶点加上自环情况下的 σ 规则. 由于这个原因, 在下面我们仅讨论 σ 规则下的结果, 即只讨论 σ 全一问题.

在先前的文献中 σ^+ 全一问题已经被广泛的研究. 应用代数和图论的知识, Suntner^[27], Losser^[21] 和 Erisson 等^[15] 分别证明了对任何一个每一个顶点有自环的图可以点亮图上的每一个灯. 对于简单图, chen 等在文 [7] 中给出树的 σ^+ 全一问题解的一个充要条件. 不同于 σ^+ 全一问题, 很多图上的 σ 全一问题不一定有解, 即使是对于 C_3 或 P_5 , 即一个三角形或 5 点的路这样一个比较简单的图. 近期, Chang 和 Qian 在文 [40] 中给出了四角格与六角格上的 σ 全一问题无解的一个充要条件. 在本文中我们将讨论几种不同边界下的三角格及满二叉树的 σ 全一问题无解的充要条件.

定义 2.1.1^[27] 设 G 是一个图, 顶点集为 V , 边集为 E . 对一个子集 $P \subseteq V$, 如果对 $\forall v \in V$, P 中与 v 顶点相邻的点的数目为偶数个, 即 $|N_P(v)|$ 为偶数, 则称 P 是 G 的一个偶等价覆盖.

定理 2.1.1^[21] 图 G 的 σ 全一问题有解当且仅当 G 没有奇数势偶等价覆盖.

定义 2.1.2^[14] 设图 $G = (V, E)$, 顶点集为 V , 边集为 E . 对于一个子集 $X \subseteq V$, 如果对 $\forall v \in V$, 且 X 中与 v 相邻的顶点为奇数个, 即 $|N_X(v)|$ 为奇数, 则称 X 是 G 的奇集合.

定理 2.1.2^[14] 设 G 是一个图, 顶点集为 V , 边集为 E . 对 V 中的一个子集 $X \subseteq V$, X 是 G 的 σ 全一问题的一个解当且仅当 X 是奇集合.

引理 2.1.1^[40] 设 $G(X, Y)$ 是一个二部图, X, Y 是 G 的两个部分, P 是 G 的偶等价覆盖, 则 $P \cap X$ 和 $P \cap Y$ 都是 $G(X, Y)$ 的偶等价覆盖.

引理 2.1.2^[40] 设 P 是四角格 $R_{m,n}$ 的偶等价覆盖, 如果 $m = n$, 则 P 由模式分别 $(C_1, C_1 \cap P)$ (或 $(C_n, C_n \cap P)$ 或 $(R_1, R_1 \cap P)$ 或 $(R_m, R_m \cap P)$) 决定. 进而, $x_{ij} \in P$ 当且仅当 $x_{ji} \in P$, 对称的 $x_{ij} \in P$ 当且仅当 $x_{n-j+1, n-i+1} \in P$.

引理 2.1.3^[40] 设 P 是四角格 $R_{m,n}$ 的偶等价覆盖, 如果 $m < n$, 则 $C_i \cap P = \emptyset$ 对 $\forall i = p(m+1)$ 或 $i = n - q(m+1) + 1$, $p, q \in \{1, 2, \dots\}$.

定理 2.1.3^[40] 四角格 $R_{m,n}$ 上 σ 全一问题无解 \Leftrightarrow

(1) $n = k(m+1) - 1, k \in \{1, 2, \dots\}$, m, k 都是奇数; 或

(2) $m = 4k + 1, n = 4h + 1, k, h \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

引理 2.1.4^[40] 设 P 是六角格 H 的偶等价覆盖, 设 l_i 和 l_j 分别是 H 上满足 $l_i \cap P = \emptyset$ 和 $l_j \cap P = \emptyset$ 的第一层和最后一层的顶点层; 则 $i = 4k + 2, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $j = 2n + 2$; 或 $i = 1$ 且 $j = 4k + 3, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. 进而, 如果 $i = 4k + 2, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $j = 2n + 2$ (或 $i = 1, j = 4k + 3, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$) 则 $l_i \subseteq P$ (或 $l_j \subseteq P$). 我们称 l_i (或 l_j) 为 P 的起始层.

定理 2.1.4^[40] 六角格 $H_{n,m}$ 上 σ 全一问题无解 \Leftrightarrow

(1) $n = 4k + 1$, 或

(2) $m = 4k - 1$, 且 $n \geq 2^{s+2} - 1$, 这里 $k = 2^\alpha + c_{\alpha-1}2^{\alpha-1} + c_{\alpha-2}2^{\alpha-2} + \dots + c_12 + c_0, c_i \in \{0, 1\}, i \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha-1\}$ 且 s 是使得 $c_i \neq 0$ 的最小的 i .

§2.2 以三角形为边界的三角格

一个以三角形为边界的三角格 $T(n)$ 是一个三角形的剖分, 如图 1 所示.

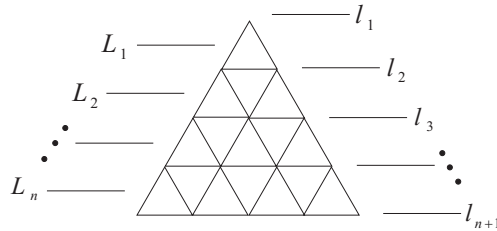


图 1

对于位于同一水平层的三角形的集合定义为以三角形为边界的三角格的 T - 三角层, 如图所示按从顶部到底部的顺序记为 $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$.

顶点层的定义类似, 即对于位于同一水平层顶点的集合定义为以三角形为边界的三角格的 T - 顶点层, 以三角形为边界的三角格的 T - 顶点层共有 $n+1$ 层, 如图所示按从顶部到底部的顺序记为 $\{l_1, l_2, \dots, l_{n+1}\}$. 对于以三角形为边界的三角格, l_{ij} 为 (i, j) 位置上的顶点, 记 L_i 为第 i 层的顶点集. 从图 1 易知 $1 \leq j \leq i$.

定理 2.2.1 以三角形为边界的三角格 $T(n)$ 的 σ 全一问题无解 \Leftrightarrow

- (1) $n = 4(k+1)$, 或
- (2) $n = 4k+1$, 或
- (3) $n = 4k+2, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

证明: 由定理 2.1.1, 图 G 的 σ 全一问题有解当且仅当没有奇数势偶等价覆盖. 其逆否命题为 σ 全一问题无解当且仅当有奇数势偶等价覆盖.

注: 文中定理证明的中的图中的黑点分别标示奇数势偶等价覆盖 P 或奇集合 (解) X 中的点.

我们只需证明 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖当且仅当 (1) 或 (2) 或 (3) 成立. 我们先来证明当 $n = 4(k+1)$ 或 $n = 4k+1$ 时 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖. 事实上当 $n = 4(k+1)$, $T(n)$ 的顶点数为 $1+2+\dots+n+(n+1) = (4k+4+1)(4k+4+2)/2 = (4k+5)(2k+3)$. 当 $n = 4k+1$ 时, $T(n)$ 的顶点数为 $1+2+\dots+n+(n+1) =$

$(4k+1+1)(4k+1+2)/2 = (2k+1)(4k+3)$. 易知 $T(n)$ ($n = 4(k+1)$ 或 $n = 4k+1$) 的顶点数为奇数, $T(n)$ 中的顶点的度均为 2 或 4 或 6, 即 $T(n)$ 中的任何一个顶点都与偶数个顶点相邻, 不难验证 $T(n)$ 的全覆盖是一个奇数势偶等价覆盖.

接着, 我们证明当 $n = 4k+2$ 时 $T(n)$ 同样有奇数势偶等价覆盖. 当 k 为偶数时, 则类似图 2 所示的偶等价覆盖 P . 易计算 $|P| = 1+2+3+\cdots+n/2+(n/2+1) = (n/2+1)(n/2+2)/2 = (2k+2)(2k+3)/2 = (k+1)(2k+3)$ 为奇数, 即 P 是一个奇数势偶等价覆盖.

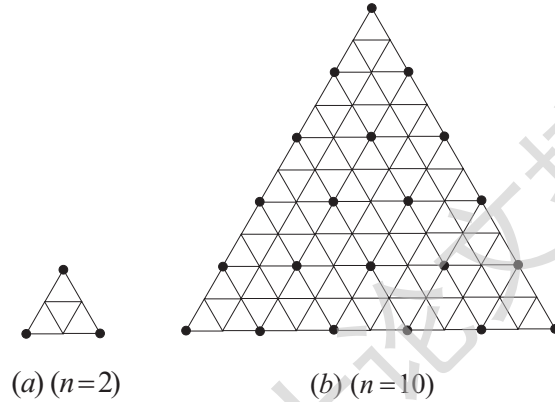
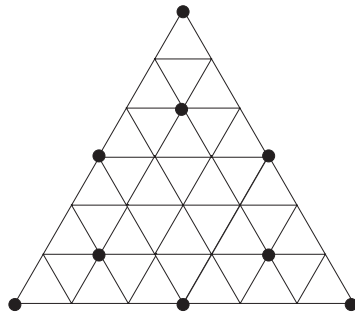


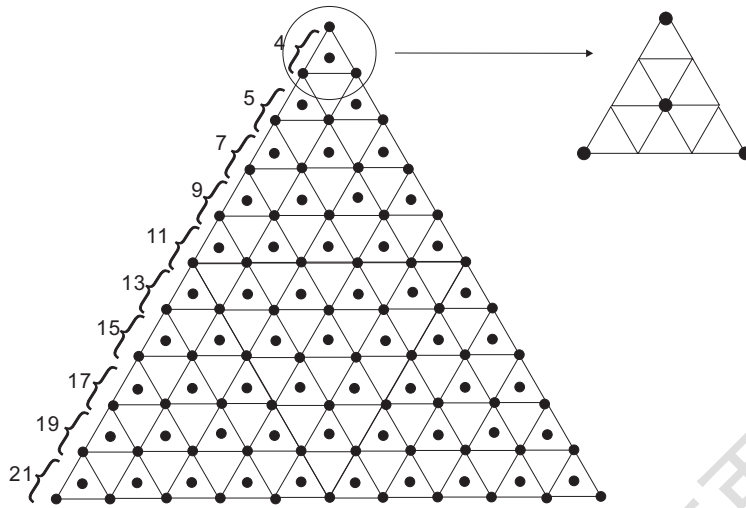
图 2

当 k 为奇数时, 我们分三种情况讨论.

情况 1 $k = 6m+1, m = 0, 1, 2, \dots$

当 $k = 6m+1$ 即 $n = 3 \times (8m+2) + 0 = 3 \times 8m + 6$ 时, $T(n)$ 存在一个类似于图 3(b) 的奇数势偶等价覆盖 P_m . 我们可以由归纳得到结果.

图 3(a) ($n = 6$)

图 3(b) ($n = 30$)

首先, 当 $m = 0$ 即 $k = 1$ 即 $n = 6$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_0 如图 3(a) 所示. $|P_0| = 9 = 4 + 5$. 其次, 当 $m = 1$ 即 $k = 7$ 即 $n = 30 = 3 \times 8 + 6$ 时, 一个奇数势偶等价覆盖 P_1 如图 3(b) 所示. 我们可以看到它是在图 3(a) 的基础上加上 8 个三层 T -三角层. 添加每三层的 T -三角层, 在偶等价覆盖中是添上奇数个点. 8 个三层, 添加了偶数个点到偶等价覆盖中. $|P_1| = (4+5) + 7+9+11+13+15+17+19+21 = 121$ 还是奇数. 依此类推, m 每增加 1, 则添加 8 个三层, 即在偶等价覆盖中添加偶数个顶点, 则对 $\forall k = 6m + 1, n = 3 \times 8m + 6, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 时 $T(n)$ 有奇数势偶等价覆盖 P_m 且 $|P_m| = (4+5) + 7+9+11+13+\dots+[n/3+(n/3+1)] = 9 + 8m(7+16m+5)/2 = 9 + 4m(16m+12)$ 为奇数.

情况 2 $k = 6m + 3, m = 0, 1, 2, \dots$

当 $k = 6m + 3$ 即 $n = 3 \times (8m + 4) + 2 = 3 \times 8m + 14$ 时, $T(n)$ 存在一个类似于图 4(a) 的奇数势偶等价覆盖 P_m . 我们可以由归纳得到结果.

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士学位论文摘要库