学校编号：10384　　　　　　　　　　分类号________ 密级______

学号：200323019　　　　　　　　　　UDC________

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

Banach 空间中单位球面球覆盖的若干问题

Ball-covering Properties of Banach Spaces

张晶晶

指导教师姓名：程 立 新　教授

专 业 名 称：基　础　数　学

论文提交日期：2 0 0 6 年 5 月

论文答辩日期：2 0 0 6 年 6 月

学位授予日期：2 0 0 6 年　月

答辩委员会主席：______________

评　　阅　　人：______________

2006 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人(签名)：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非营利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密(　)，在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密(　)

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名：　　　　　　日期：　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　日期：　　年　　月　　日

摘　要

整个$Banach$空间几何学就是一部$Banach$空间单位球和球面的几何学。即使是其它学科分支，直接用“球”研究其它方面的内容，很多也都成为相应分支的重要组成部分。如，属于$Banach$空间几何范畴的$Mazur's\ intersection$性质，复分析中的$Plank$问题，非线性分析的拓扑度问题，最优化理论的装球问题（$Packing\ problem$）等等。文献[20]以全新的视角提出了“$Banach$空间的单位球面被至少多少个不含原点的球所覆盖”这一问题。本文也是从这一问题出发，研究$Banach$空间中球覆盖数与覆盖半径的若干问题。

文中重点利用文献[23]所给出的n维空间中n-单形与其外接超球面间的若干关系，证明了在有限维欧氏空间R^n中极小球覆盖的最小半径为$\frac{n}{2}$，且当极小球覆盖中$(n+1)$ 个球的球心恰好构成球面$\frac{n}{2}S_X$内接正则n－单形的$(n+1)$ 个顶点时可达到。并且对证明过程中产生的另一有趣问题－－若任意给定一个常数r,是否相应存在以r为覆盖半径的一个球覆盖，且此覆盖达到极小势，做出了肯定的回答，根据先前的证明结果对球覆盖势数进行了一定的划分。

关键词: 球覆盖；极小势；覆盖半径

Abstract

The whole *Banach* space geometry is a geometry about the unit ball and unit sphere of *Banach* spaces.Even among other knowledge branches,the direct uses of "ball" to study other aspects of knowledge became important parts of the corresponding branches.For instance,the $Mazur'sintersectionproperty$ which belongs to *Banach* space geometry,*Plank problem* in complex analysis,topology problem in non-linear analysis,*Packing problem* in optimization theory and so on.Article[20] proposes a bran-new angle of view,to study on "how many balls,which do not contain the origin in their interiors,can the unit sphere of a *Banach* space be covered by". So does this paper starts from,to study the cardinal of ball-coverings of *Banach* spaces and the radius of a ball-covering.

By the relationships between the n-simplex in an n-dimension space and its circumscribed sphere(see,article[23]),this paper presents that for all $n \geq 2$ the smallest radius of all minimal ball-coverings of R^n is $\frac{n}{2}$, and it can be attained whenever the n+1 centers of the n+1 balls of a minimal ball-covering are the vertices of a regular inscribed n-simplex of the sphere $\frac{n}{2}S_X$.Then this paper makes a certain of another interesting problem that occurred during the former proof:for any fix constant r,there is a ball-covering whose covering radius is r and which is a minimal ball-covering among all the ball-coverings with radius r.

Key words: Ball-covering;Minimal cardinal;Radius of a ball-covering

目录

中文摘要 …… I

英文摘要 …… II

第一章　引言 …… 1

第二章　欧氏空间中极小球覆盖的半径问题 …… 5

§2.1 基本概念和性质 …… 5

§2.2 欧氏空间中极小球覆盖的最小半径 …… 7

第三章　固定半径的球覆盖问题 …… 13

参考文献 …… 18

致谢 …… 21

Contents

Chinese abstract ·· I

English abstract ·· II

Chapter 1 Introduction ·· 1

Chapter 2 The Radii of Minimal Ball-Coverings in Euclidean Spaces ·· 5

§2.1 Basic Definitions and Properties ·· 5

§2.2 The Smallest Radii of Minimal Ball-Coverings in Euclidean Spaces ·· 7

Chapter 3 Ball-coverings with Fixed Radiuses ······························ 13

References ·· 18

Acknowledgement ·· 21

第一章　引言

自从1932年$Banach$的名著《$Théorie\ des\ operations\ lineaires$》问世以来，人们开始了对$Banach$空间理论的系统研究。在随后的岁月里，除了个别突破（$Clarkson,James$）之外，进展是相当缓慢的。这种情况直到上世纪六十年代，才开始有了显著的改变。首先，许多著名的古典问题得到了解决；其次，数学家们证明了不少有关$Banach$空间的重要定理；此外，人们根据其他数学学科的需要，从各个不同角度出发对$Banach$空间进行了深入了研究，促使$Banach$空间理论（包括它的几何理论）的面貌日新月异地发展着。其中从$Banach$空间单位球的几何结构出发研究$Banach$空间性质的方法可大体分为以下几种：

一. 凸性和光滑性的研究

凸性的研究最早是$Clarkson.J.A$ 于1936年引入一致凸空间并讨论这种空间中测度的RNP 定理开始的。光滑性一方面作为凸性的对偶性质而提出；另一方面，它与范数- 作为一种特殊的凸函数与各种可微性质有密切联系。各种凸性和光滑性的研究与最佳逼近密切联系在一起。1968年，$E.Asplund$ 从凸函数的可微性角度引入强（和弱）可微空间，后来人们称之为$Asplund$ 空间（和$w-Asplund$ 空间）。

二. （MIP）的研究

文献[1] 于1933年首先研究了具有（MIP）的$Banach$空间。$Banach$空间X称为具有MIP，当X中的任意有界闭凸集是一族球的交。$Banach$空间具有MIP等价于X中的任意有界闭凸集K以及$x\in K$，$\exists$球B，$B\supset K$，s.t. $x\in B$。文献[2]证明了有限维的$Banach$空间X具有（MIP）的充要条件是B_{X^*}的端点集在S_{X^*}中稠密。文献[3]在1978年证明了$Banach$空间X具有（MIP）当且仅当B_{X^*}的w^*-可凹点集在S_{X^*}中稠密。在证明该定理时，发现（MIP）、B_{X^*}的w^*-可凹点与X的光滑性有关。1978年，$Giles.J$、$Gregory.D.A$、$Sims.B$又提出了是否每个具有（MIP）的$Banach$空间都是$Asplund$空间。后来，文献[4]找到了一类具有（MIP）的等价范数的非$-Asplund$空间。

三. 装球问题的研究

$Banach$空间中装球问题的研究，在近五十年来也取得了令人瞩目的发展。装球值$\wedge(X) \equiv sup\{r$：无穷多个半径为r的球可以装入单位球B_X内$\}$。文献[5]，[6]在50年代中给出了可分$Hilbert$空间与l_p空间的装球值。文献[7]在1970年确定了一般线性赋范空间装球值的范围是：$(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$，文献[8]用内插法的三线定理计算出了$L_p$空间的装球值，而$Orlicz$序列空间的装球值的准确表达式是叶以宁（1983年[9]，关于刘氏范数）和王延辅（1985，关于奥氏范数）给出的。$Orlicz-Musielak$空间装球值已由文献[10]给出，$Orlicz$函数空间装球值的取值范围在文献[11]中得到，$Lorentz$序列空间装球值由文献[12]给出。

四. "板状体"覆盖的研究

$Hilbert$空间H中，用一族板状体$P_n \equiv \{h \in H : | < h, e > | \leq \frac{w_n}{2}, \| e \| = 1\}$覆盖球的研究也有五十多年的历史。1951年，文献[13]证明了$Hilbert$空间H中，如果直径w的球可以用一族宽分别为w_n的板P_n覆盖，则$\Sigma w_n \geq w$。1991年，文献[14]把$Bang.T$的证明从实$Hilbert$空间推广到一般$Banach$空间；2001年，文献[15]更进一步证明了在复$Hilbert$ 空间，$\Sigma w_n^2 \geq w^2$。

五. 拓扑度理论

拓扑度理论是研究非线性算子定性理论的有力工具，从它可以推出许多著名的不动点定理。S是实$Banach$空间X的有界集，非紧性测度$\alpha(S) \equiv \inf\{\delta > 0 : S = \cup_{i=1}^m S_i$，直径$d(S_i) \leq \delta\}$。无穷维实$Banach$空间$X$的单位球和单位球面的非紧性测度都为2，即$\alpha(B_X) = \alpha(S_X) = 2$（见文献[16]）。1981年郭大钧给出了全连续场拓扑度为零的定理（文献[17]），1987年孙经先给出了严格集压缩场在球域上拓扑度为零的定理（文献[18]）。1999年，陈东青等部分地将文献[18]中球域上结果推广到非球域（见文献[19]）。

可以说，整个$Banach$空间几何学就是一部$Banach$空间单位球和球面的几何学。2004年，程立新教授以全新的视角提出了对$Bananch$ 空间单位球面的一系列研究，用完全不同的方法得出了$Bananch$空间单位球面

的一系列几何性质。众所周知，对一个有限维（可分无穷维）$Banach$空间X来说，由于其单位球面S_X的紧性（可分性），故S_X可被有限个（可数个）半径任意小的不含原点为其内点的闭球所覆盖。自然地，有一系列问题就产生了，诸如能覆盖S_X的最少球数，覆盖的最小半径等等。由此出发，程立新老师进行了一系列研究，其主要成果可分为如下几部分：

一. n维$Banach$空间的极小系统

这一部分主要考察n维$Banach$空间单位球面的球覆盖最小势及其覆盖的最小半径。

i)若对于一族对称的球覆盖$\{B_\tau\}_{\tau\in I}$（即$\{B_\tau\}_{\tau\in I}=\{-B_\tau\}_{\tau\in I}$），则$I^\sharp\ge 2n$。特殊地，$S_X$可被一族正好含有$2n$个闭球的球族所覆盖，且当$X=(R^n,\|\cdot\|_2)$时，由$2n$个闭球构成的球覆盖半径不少于$\frac{\sqrt{n}}{2}$。（见文献[20]）

ii)对于S_X的任意一族球覆盖$\{B_\tau\}_{\tau\in I}$，有$I^\sharp\ge n+1$。特殊地，当X为光滑时，则存在一族恰好含$n+1$个闭球的球覆盖。当$X=(R^n,\|\cdot\|_2)$时，由$n+1$个闭球构成的球覆盖半径不少于$\frac{n}{2}$，且当这$n+1$个闭球的球心恰好在$\frac{n}{2}S_X$的内接正则单形的顶点上时，可取得覆盖半径$\frac{n}{2}$。（见文献[20]，[21]）

iii)对任意$n+1\le k\le 2n$,存在一n维$Banach$空间X,其单位球面S_X的极小球覆盖的势恰为k。（见文献[22]）

二. 无穷维$Banach$空间的球覆盖性质

其研究结果大致可分为三部分：

1.$Banach$空间的可分性与球覆盖性质

i)若$Banach$空间X为可分的，显然它具有球覆盖。反之，设$A=\{r\in R: r>0\}$，若任一具有可数球覆盖且其覆盖半径不超过r的$Banach$空间X为可分的，则A的上确界是否存在？答案是肯定的，其上确界为1，但不可达到。（见文献[20]）

ii)由凸集分离定理可证明具有可数球覆盖的$Banach$空间X，其对偶

空间X^*为w^*-可分的。而反之，若X为$Gateaux$可微空间或是局部一致凸的，且X^*为w^*-可分的，则X具有可数球覆盖。（见文献[20]）

2.商空间的球覆盖性质

这一部分证明了对一个无穷维的$Banach$空间X，它存在一个等价范数$|\cdot|$及一闭子空间Y, 且$dimX/Y=\infty$,使得X/Y对于范数$|\cdot|$具有球覆盖性质，从而可得一个$Banach$空间X有一无穷维的可分商空间当且仅当X中存在一无穷维的商空间满足其单位球面具有可数球覆盖，且覆盖半径$r<1$。（见文献[22]）

三.不具有球覆盖性质的$Banach$空间

若$Banach$空间X不具有球覆盖性质，则对$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ I^\sharp>\aleph_0$及双正交系$\{(x_i,x_i^*)\}_{i\in I}\subset X\times X^*,\ s.t\ \sup\limits_{i\in I}\|x_i\|\|x_i^*\|\leq 1+\varepsilon$。（见文献[22]）

本文正是基于这一系列研究，针对第一部分中的内容得到了若干结果，进一步证明了R^n中极小球覆盖的半径为$\frac{n}{2}$，且在一定条件下可达到。接着，文章对在证明过程中产生的另一个问题：若任意给定一个常数r, 是否相应存在以r为覆盖半径的球覆盖，且此覆盖达到极小势，做出了肯定的答复，且根据先前的结果对球覆盖势数进行了一定的划分。全文共分为三章：

第一章，主要回顾了从$Banach$空间单位球出发研究$Banach$空间性质的一些成果，并给出了本文的研究基础。

第二章,我们首先回顾一些预备知识，这些预备知识主要是本文涉及的一些记号及基本定义和基本定理。接着，本部分重点利用文献[20]、[23]中的一些性质，特别是n维空间中n-单形与其外接超球间的若干关系，证明R^n空间中极小球覆盖的半径$r\geq\frac{n}{2}$，且当极小球覆盖中$(n+1)$个球的球心恰好为球面$\frac{n}{2}S_X$的内接正则$n-$单形的顶点时等号成立。

第三章,我们利用上一章的结论以及文献[20]、[25]，证明对于取定值的半径r_0，总存在一个以r_0为覆盖半径的球覆盖，且其势是所有此类覆盖的势中最小的。

第二章　欧氏空间R^n中单位球面极小球覆盖的半径问题

§ 2.1　基本概念和性质

为证明主要结果，我们先给出一些定义和定理。不作特别声明时，本文始终假设X是一个实$Bananch$空间，其对偶空间为X^*。我们以S_X表示X的单位球面，B_X表示X的单位球；同样地，以S_{X^*}表示X^*的单位球面，B_{X^*}表示X^*的单位球。我们用$\{e_i\}_{i=1}^n$表示X的标准基，$\mathbb{N}$表示自然数集。$B(x,r)$表示X中以x为中心，半径为r的闭球，且在不至产生混淆时也以$B(x,r)$表示开球。对于子集$A\subset X$，coA表示A的凸包。

定义 2.1.1　i)称$\mathbb{B}\equiv\{B_i\}_{i\in I}$为$S_X$的一个球覆盖，若对$\forall i\in I$, B_i为内部不含原点的闭球，且$S_X\subset\bigcup\limits_{i\in I}B_i$。一个覆盖半径为$r\equiv r(\mathbb{B})$的球覆盖$\mathbb{B}$，指的是这个覆盖中所有闭球半径的最大值为$r$。

ii)　$Banach$空间X中的一个球覆盖$\mathbb{B}$称为极小的，若$\mathbb{B}$的势小等于X中任意球覆盖的势。

定义2.1.2　定义于X中开凸子集D上的一个广义实值真函数f称为凸函数，如果对$\forall\ x,y\in D$及$0\le\lambda\le 1$,有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

显然，f是凸的当且仅当$epi(f)$是$X\times R$中的凸集。

定义2.1.3　i)　设f是$Banach$空间X中的凸函数，则f的次微分映射∂f定义为:

$$\partial f(x)=\{x^*\in X^*:f(y)-f(x)\ge\langle x^*,y-x\rangle,\forall\ y\in D\},x\in D$$

f称在点x处是$Gateaux$可微的，若存在$x^*\in X^*$,使得对任意$y\in X$,有

$$\lim_{t\searrow 0}[\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\langle x^*,y\rangle]=0$$

此时，称x^*为f在x处的$Gateaux$微分。

ii)　$Banach$空间X称为是$Gateaux$可微空间，若任一定义于非空开凸集$D\subset X$上的连续凸函数都在D的一个稠密子集上处处$Gateaux$可微。

定义2.1.4 i) 定义于X中开凸子集D上的一个连续凸函数f称在$x \in D$处是$Fréchet$可微的，若存在$x^* \in X^*$,有

$$\lim_{t \searrow 0} \sup_{y \in B_X} [\frac{f(x+ty)-f(x)}{t} - \langle x^*, y \rangle] = 0$$

此时，称x^*为f在x处的$Fréchet$微分。

ii) $Banach$空间X称为是$Asplund$空间，若任一定义于非空开凸集$D \subset X$上的连续凸函数在D的一个稠密G_δ集上处处$Fréchet$可微。

定义2.1.5 称$Banach$空间X为$Gateaux(Fréchet)$光滑的,若其范数在除0点外的任意点处是$Gateaux(Fréchet)$可微的。

定义2.1.6 设C为$Banach$空间上的非空有界闭凸子集，称点$x \in C$为C的一个暴露点（强暴露点），若$\exists\ x^* \in X^*$, $s.t\ \forall\ y \in C$, $y \neq x$,有$\langle x^*, y \rangle < \langle x^*, x \rangle$(切片$\{y \in C : \langle x^*, y \rangle > \langle x^*, x \rangle - \alpha\}_{\alpha > 0}$构成$x \in C$点处的局部基)，相应地，称$x^*$为$C$的一个暴露泛函（强暴露泛函）。若凸集$C \subseteq X^*$,我们可类似定义$C$的$w^*-$暴露点（$w^*-$强暴露点），但其$w^*-$暴露泛函($w^*-$强暴露泛函)取自$X$而不是$X^{**}$。

显然$C \subseteq X^*$的w^*-暴露点为C的暴露点；若X是自反的（特殊地，X为有限维），则w^*-暴露点与暴露点一致。

定义2.1.7 称$A \subset X^*$为赋范集，若$\exists\ \alpha > 0, s.t\ \forall\ x \in X$,有

$$\sup_{x^* \in A} \langle x^*, x \rangle \geq \alpha \|x\|$$

等价于$\alpha = \min\limits_{\|x\|=1} \sup\limits_{1 \leq i \leq m} \langle x_i, x \rangle > 0$。

定义2.1.8 称$D \subset X^*$正定分离X中的点，若对$\forall x \in X \setminus \{o\}$, $\exists x^* \in D$, $s.t\ \langle x^*, x \rangle > 0$。

定义2.1.9 设X是一个$Banach$空间，

i) $\Omega \subseteq X$称为一个n-单形，如果存在$(n+1)$个仿射无关向量$\{x_i\}_{i=0}^n$(即$\{x_i - x_0\}_{i=1}^n$线性无关），使得$\Omega = co(x_i)_{i=0}^n$。此时，$\{x_i\}_{i=0}^n$称为Ω的顶点；

ii) 一个n-单形$\Omega = co(x_i)_{i=0}^n$称为是正则的，如果存在实数$c > 0$，使得对任意$0 \leq i,j \leq n$且$i \neq j$，都有$\| x_j - x_i \| = c$；

iii) 称$(n-1)$维超球面S为n-单形$\Omega = co(x_i)_{i=0}^n$的外接超球面，如果Ω的$(n+1)$个顶点$\{x_i\}_{i=0}^n$ 均在S上。显然，S是由Ω唯一决定的，Ω被

称为S的内接n-单形。注意，R^n空间中任意$(n+1)$个仿射向量的集合都构成一个外接超球面。

定义2.1.10　拓扑空间X是连通的，假如当它分解成为两个非空子集的并集$A\bigcup B$时，有$\overline{A}\bigcap B\neq\emptyset$,或$A\bigcap\overline{B}\neq\emptyset$。拓扑空间的子集称为连通子集，若此子集给以诱导拓扑时它成为一个连通空间。

定理2.1.11(**凸集分离定理**)　设A,B均为线性拓扑空间X上的非空凸集，$A\bigcap B=\emptyset$。

i)　若A为开集，则$\exists\ f\in X^*,\ \gamma\in R$,有

$$Ref(x)<\gamma\leq Ref(y),\ \forall\ x\in A,\ \forall\ y\in B$$

ii)　若A为紧集，B为闭集，且X是局部凸的，则$\exists\ f\in X^*,\gamma_1\ \gamma_2\in R$,有

$$Ref(x)<\gamma_1<\gamma_2<Ref(y),\ \forall\ x\in A,\forall\ y\in B$$

性质2.1.12　$Banach$空间X是$Gateaux$可微空间当且仅当X^*中的每个w^*-紧凸集是自身w^*-暴露点的w^*-闭凸包。

性质2.1.13　设p是定义于空间X上的$Minkowski$泛函，则有：

i)　p在x点处$Gateaux(Fréchet)$可微且$Gateaux(Fréchet)$微分是x^*的充要条件是x^*是C^*的w^*-暴露点（w^*-强暴露点）且其暴露泛函（强暴露泛函）是x。

ii)　$x^*\in\partial p(x)$当且仅当$x^*\in C^*$, $\langle x^*,x\rangle=p(x)$, 其中$C^*$定义为集$C\equiv\{y\in X:\ p(y)\leq 1\}$的极，即$C^*=\{f\in X^*:\ |f(x)|\leq 1,\ \forall\ x\in C\}$。

§2.2　欧氏空间R^n中极小球覆盖的最小半径

文献[20]中证明，对有限维欧氏空间$X=R^n$，其单位球面S_X的极小球覆盖数是$n+1$。本节将在此基础上进一步证明：R^n空间中单位球面的极小球覆盖半径总是满足$r\geq\frac{n}{2}$，且在一定条件下可取"$=$"。

在本节中我们定义Ω为欧氏空间$R^n(n\geq 2)$中顶点为$\{x_i\}_{i=0}^n$的n-单形，$0\in int\Omega$。设其外接超球面为S，我们以r表示S所对应的球半径，$\rho=\parallel x_i-x_j\parallel$表示顶点$x_i$到$x_j$之间的距离，$\Omega_j$表示$n$-单形$co[\{x_i\}_{i\neq j}\cup\{0\}]$，$S_j$表示半径为$r_j$的单形$\Omega_j$的外接超球面。最后，以$d_j$表示从原点0到$\Omega$的侧面$M_j=co(x_i)_{i\neq j}$的距离。

先给出如下已知定理。

定理2.2.1[23]：假设如上，则可得：

$$r^2 = -\frac{1}{2}\frac{D_0(x_0,x_1,\cdots,x_n)}{D(x_0,x_1,\cdots,x_n)} \qquad (2.2.1)$$

其中

$$D_0 \equiv D_0(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & \rho_{02}^2 & \cdots & \rho_{0n}^2 \\ \rho_{10}^2 & 0 & \rho_{12}^2 & \cdots & \rho_{1n}^2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \rho_{n0}^2 & \rho_{n1}^2 & \rho_{n2}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D \equiv D(x_0,x_1,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \rho_{01}^2 & \cdots & \rho_{0n}^2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & \rho_{n0}^2 & \rho_{n1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$r_j = \frac{r^2}{2d_j}\ (j=0,1,\cdots,n) \qquad (2.2.2)$$

$$r^{n+1} \leq (\frac{2}{n})^{n+1}\prod_{j=0}^{n} r_j \qquad (2.2.3)$$

且$r^{n+1} = (\frac{2}{n})\prod_{j=0}^{n} r_j$当且仅当$\Omega$是正则的。特别的，若$\Omega$是正则$n$-单形，则有

$$\rho^2 = \frac{2(n+1)}{n}r^2 \qquad (2.2.4)$$

引理2.2.2：设$X = R^n$（$n \geq 2$），那么对X的任一个极小球覆盖$\mathbb{B} = \{B(x_i,r_i)\}_{i=0}^{n}$都有：

$$r(\mathbb{B}) \equiv \max_{0\leq j\leq n} r_j \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

证明：当$n=2$时，显然命题成立，因为单位球面$S_X \subset \bigcup_{i=0}^{2} B(x_i,r_i)$，所以其中至少有一个球$B(x_i,r_i)$包含了$S_X$弧长的$\frac{1}{3}$，则$B(x_i,r_i)$的直径至少应为$\sqrt{3}$。

假设$n \geq 3$。因为$0 \in intB(x_n, r_n)$，由分离定理，存在一个$(n-1)$维子空间H_{n-1}使得H_{n-1}分离$B(x_n, r_n)$与原点0。则H_{n-1}对应的单位球面$S_{H_{n-1}}$包含于并集$\bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, r_i)$中，即有

$$S_{H_{n-1}} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} (H_{n-1} \bigcap B(x_i, r_i))$$

这意味着$\{H_{n-1} \bigcap B(x_i, r_i)\}_{i=0}^{n-1}$再次构成$(n-1)$维空间$H_{n-1}$的一个球覆盖，记为$\{B_{n-1}(x_i^{(1)}, r_i^{(1)})\}_{i=0}^{n-1}$。由定理A，任一个$(n-1)$维闭球$B_{n-1}(x_i^{(1)}, r_i^{(1)})$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$非空且不包含原点作为其内点。归纳地，对$j = n-2$，我们可得一个2维子空间H_2以及单位球面S_{H_2}的2维球覆盖$\{B(x_i^{(n-2)}, r_i^{(n-2)})\}_{i=0}^{2}$。则如上所证，$\{B(x_i^{(n-2)}, r_i^{(n-2)})\}_{i=0}^{2}$中至少有一个球的直径大等于$\sqrt{3}$。注意到$B(x_i^{(n-2)}, r_i^{(n-2)}) \subseteq B(x_i, r_i), i = 0, 1, 2$，命题得证。 □

引理2.2.3：假设$x_0 \in R^n \equiv X, x_0 \neq 0$，且$x_i \in R^+ x_0$，其中$\| x_i \| \geq r_i > 0 (i = 1, 2)$，则必有

$$S_X \bigcap B(x_1, r_1) \subseteq S_X \bigcap B(x_2, r_2)$$

或

$$S_X \bigcap B(x_2, r_2) \subseteq S_X \bigcap B(x_1, r_1)$$

证明：反证法。假设存在$y_1, y_2 \in S_X$使得有

$$i) \ \|x_1 - y_1\| \leq r_1, \quad ii) \ \|x_2 - y_1\| \geq r_2$$

且

$$iii) \ \|x_2 - y_2\| \leq r_2, \quad ii) \ \|x_1 - y_2\| \geq r_1$$

则由i),iv)有

$$\langle x_1, y_2 - y_1 \rangle < 0$$

由ii),iii)有

$$\langle x_2, y_2 - y_1 \rangle > 0$$

这与$x_1, x_2 \in R^+ x_0$矛盾。得证。 □

引理2.2.4：假设$X = R^n$，如果$\mathbb{B} = \{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^{m}$是$S_X$的一个球覆盖，那么必存在$c \in \{\|x_i\|\}_{i=1}^{m}, r \in (r_i)_{i=1}^{m}$且$c \geq r$使得$\mathbb{B}' \equiv \{B(y_i, r)\}_{i=1}^{m}$也构成$S_X$的球覆盖，其中$y_i = c\frac{x_i}{\|x_i\|}, (i = 1, 2, \cdots, m)$。