学校编码：10384　　　　分类号______ 密级______
学号：19020060153162　　　　UDC______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

随机微分方程的高阶数值方法

High-order Numerical Approximations to Stochastic Partial Differential Equations

曲东

指导教师姓名：许　传　炬　教授
专 业 名 称：计　算　数　学
论文提交日期：2009　年　5　月
论文答辩日期：2009　年　6　月
学位授予日期：　　　年　　　月

答辩委员会主席：__________
评　　阅　　人：__________

2009 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打”√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　月　日

中文摘要

随着计算机技术和计算方法的快速发展，人们已发展了许多计算确定性问题的高效数值方法。然而，在很多情形下，方程中的一些参数(如扩散项、边界条件以及求解区域等)带有不确定性。为了准确地对不确定性问题做出证明和检验等，需要设计高精度的数值方法求解随机微分方程。谱元法作为一种高阶的数值方法，结合了谱方法的高精度和有限元法灵活的网格剖分技术，在不可压流体的计算中已取得了很大的成功，并正成为计算随机微分方程的一个有力工具。

本文旨在利用随机Galerkin谱方法求解带有不确定性输入参数的微分方程。研究的算法基于随机方向上的Askey正交(混沌)多项式谱分解和物理空间方向上的谱方法。我们针对几个典型问题构造了有效的解法，并做了必要的算法分析和数值检验。具体研究内容如下：

- 通过数值求解一个随机常微分方程，我们考察了参数的不确定性对数值解的扰动影响以及数值方法的收敛性质。

- 以定常、非定常随机扩散方程为例，考察了一种随机Galerkin谱方法的具体实现方式，并用一些数值算例测试了算法的有效性。

- 提出了有效的数值方法求解随机Stokes方程，并分析了算法的有效性。首先，通过随机方向上采用随机Galerkin谱方法，原随机Stokes方程转化为一组关于展开系数的确定性方程组；其次，对于所得到的方程组，我们用 $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_{N-2}$谱方法并结合块Jacobi迭代格式进行数值求解。我们证明了连续问题的弱形式及其离散问题的适定性。另外，我们还给出了严格的误差分析，并用数值试验检验了理论结果。

- 基于热传导方程的谱离散格式，讨论了利用变分伴随数据同化进行参数的优化确定问题。确切地说，我们采用离散型伴随同化求解热传导方程的初始条件的最优化问题。通过在空间方向上引入谱方法和时间方向上采用Crank-Nicolson差分格式先推得一个全离散问题。从这个全离散问题出发，结合全局或局部已知的观测数据，分别构造梯度下降算法求解相应的最优化问题。我们分析了采用不同方法计算梯度所需的代价，另外，还给出一种选择最优迭代步长的算法。数值试验验证了最优化算法的效率。

关键词： 随机Galerkin谱方法，随机Stokes方程，变分伴随数据同化

Abstract

Thanks to the great progress in the development of numerical methods and computer resources, many classical partial differential equations can now be solved very efficiently with high accuracy. However, in many cases, the coefficients, boundary conditions as well as the geometry of the considered partial differential equation may contain uncertainties. In order to provide meaningful predictions to problems involving uncertain data, there is a need to investigate efficient numerical methods for handling general stochastic partial differential equations. The spectral element method, which combines the high-order precision of spectral methods and the geometrical flexibility of finite element methods, has achieved great success and is becoming a useful tool for investigation of such equations.

The purpose of this work is to numerically solve differential equations with uncertain input data by using stochastic Galerkin spectral methods. Some stochastic Galerkin methods, combining the Askey polynomial chaos expansion for the stochastic inputs and the spectral method in the physical space, are proposed to approximate some popular model problems. Precisely, the content of the paper is as follows:

- firstly, the influence of the stochastic input on the numerical solutions and the accuracy of the numerical method are discussed by performing a numerical investigation for the stochastic ordinary differential equations.

- secondly, we propose a stochastic Galerkin spectral method for the steady/unsteady stochastic diffusion problems. The detailed implementation is presented, and its efficiency is tested by some numerical examples.

- thirdly, as a main part of this work, we propose and analyze a spectral method to solve the Stokes equations with random coefficients. A stochastic Galerkin approach is used to reduce the original stochastic Stokes equations into a set of deterministic equations for the expansion coefficients. Then a $P_N \times P_{N-2}$ spectral method, together with a block Jacobi iteration is applied to solve the resulting problem. We establish the well-posedness of the weak formulation and its discrete counterpart. Moreover, we provide a rigorous convergence analysis and numerical validation.

- finally, we investigate the parameter optimization problem via the variational adjoint assimilations in the frame of the spectral approximation of a heat model.

Precisely, we consider the optimization of the initial condition for the heat equation by means of the discrete adjoint assimilations. Spectral methods and the classical Crank-Nicolson scheme are applied to deduce the full discrete system for the continuous model, then the variational adjoint assimilation approach is used to derive the gradient and the corresponding adjoint system. In Particular, a method for choosing optimal step sizes is presented.

Key words: Stochastic Galerkin Spectral Methods, Stochastic Stokes Problems, Variational Adjoint Data Assimilations

目 录

Contents

第 一 章　绪论

随着计算机技术和计算方法的快速发展，数值计算模拟已广泛应用于科学研究和工程设计等领域。科学计算已经发展成为科学研究的重要手段。数值计算中人们关注的一个主要问题是计算结果的可靠性，即计算中不确定性的证明和检验等[1–3]。

不确定性的特征描述是一个较复杂的问题，一般可以将它分为两类，即数值方法的不确定性和物理方程的不确定性。数值方法的不确定性可来源于时空离散误差、人工假设边界条件误差(如出口边界条件的人为设置)、代数系统求解误差(如Jacobi迭代、共轭梯度法)等。人们在近现代离散方法中已发展了有关这方面的精度测试和误差控制[4]。而物理方程的不确定性可来源于未知的初边值条件、不精确的扩散项或物理空间、近似守恒律等。

对于仅带有确定性参数的数学物理方程，人们已发展了许多数值离散方法，这些离散方法在数值计算中占有很重要的地位。谱方法作为一类有效的离散方法，在求解随机偏微分方程时可用于物理空间方向上的离散逼近。然而，通过观察第1.2节中的两个简单例子，不难发现物理方程的不确定性在设计算法时也不容忽视。不确定性量化计算的目的在于辨认不确定性的来源，同时估计它对计算结果的影响。基于对不确定性来源的概率描述，第1.3节将回顾几种常用的求解随机微分方程的概率方法。

1.1　谱方法

随机微分方程的数值计算包括随机方向和物理空间方向上的逼近近似。针对后者，人们已发展了各种离散方法，如差分法、有限元法和谱方法等。本文将主要结合谱方法对一些随机偏微分方程进行数值计算。

谱方法，作为一类高阶的离散方法，利用整体的高阶多项式逼近解。它主要有两种形式：配点法和Galerkin方法，它们都可看作是加权残量法的一种。配点法要求在各配置点上满足原方程，而Galerkin谱方法将偏微分方程定解问题转化成与之等价的变分形式，然后通过试探函数和检验函数的适当选取来逼近解。与Galerkin有限元法不同的是，它选择的试探函数和检验函数都是整体的高阶多项式，并通过提高整体多项式的阶数来提高逼近的精度。谱方法的收敛速度取决于解的正则度，当解无限光滑时它可以达到指数阶的收敛速度，即比任何代数阶的收敛速度都要快，这是谱方法相比于差分法和有限元法的一个主要优点。目前已有大量文献针对谱方法及其应用作出了比较细节的讨论，如文献[5–7]。

另外，Patera等人在文献[8]中发展的谱元法克服了传统意义下谱方法计算复杂区域能力的不足，它结合了谱方法和有限元法各自的优点，既能处理复杂的计算区域，又保持了谱方法的高精度。谱元法已在不可压流体的计算中取得了很大的成功[9]，现已是计算流体中最常用的方法之一。谱元方法与在固体力学中发展起来的 hp有限元方法很相似，尽管两者在发展的初期有许多不同点，hp有限元使用的多项式阶数不高，所使用的基函数也与谱元法不一样。不过随着两类方法的发展，它们呈现出越来越多的共同点，有些学者已把这两类方法归结为同一种方法[10]。

1.2 例子说明

本节将给出两个比较直观的例子考察参数的不确定性对物理系统的扰动影响。

首先，考虑如下的Burgers方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [-1,1], t \in (0,T], \\ u(-1,t) = 1+\sigma, \quad u(1,t) = -1, \quad t \in (0,T], \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，$\sigma > 0$为对应左端点 $x=-1$处边界条件的小扰动，$\nu > 0$为粘性系数。
文献[11,12]中已明确指出，问题(1-1)的解具有一个“边界层”，也就是说解 u将在 $[-1,1]$的某段子区间内迅速衰减。定义 z满足方程 $u(z)=0$，则 z是时间变量 t的函数且 $z(T)$将对边界条件相当敏感。这里引用文献[13]的计算结果：固定 $\nu = 0.05$，采用高精度的谱元法分别计算 $\sigma = 0$和 $\sigma = 0.01$时问题(1-1)的定常解，计算表明 z的取值分别为 0和 0.73764。这个例子说明边界条件中一个非常小的扰动将可能在很大程度上改变解的基本形态。

另外，考察下面的守恒律微分方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial F(\boldsymbol{u})}{\partial x} = 0, \tag{1-2}$$

其中，

$$\boldsymbol{u} = [u_1, u_2]^T, \quad F(\boldsymbol{u}) = [u_2, \alpha^2 u_1]^T, \quad \alpha \neq 0.$$

它对应的Jacobi矩阵为：

$$J = \frac{\partial F(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

这时(1-2)为一个强的抛物型系统，其特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm\alpha$。当这个系统带有不确定性时，如 $F(\boldsymbol{u}) = [(1+\xi(\omega))u_2, \alpha^2 u_1]^T$，其中 $\xi(\omega)$表示一个随机变量，此时它对应的Jabobi矩