学校编号： 10384　　　　　分类号： _____ 密级： _____
学号： B200423010　　　　　UDC: _______________________

学　位　论　文

空间分数阶对流－扩散方程的数值解及其应用

Numerical Solution of the Space Fractional Advection-Dispersion Equations and Applications

刘　青　霞

指导教师姓名：　刘发旺　教授

申请学位级别：　博　士　学　位

专　业　名　称：　计　算　数　学

论文提交日期：　2007 年　4 月

论文答辩日期：　2007 年　5 月

学位授予单位：　厦　门　大　学

学位授予日期：　2007 年　　月

答辩委员会主席： ________________________________

评阅人： ____

2007 年　4　月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1. 保密（ ），在　　年解密后适用本授权书。

2. 不保密（ ）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　日期：　　年　　月　　日

导师签名：　　　　日期：　　年　　月　　日

目　录

中文摘要 I
英文摘要 III
第一章　绪论 1
§1.1 引言 1
§1.2 分数阶微积分的定义和性质 6
第二章　空间分数阶对流 - 扩散方程 13
§2.1 Lévy-Feller 对流 - 扩散方程 13
§2.1.1 随机游走模型 13
§2.1.2 布朗运动和扩散方程 14
§2.1.3 Lévy flight 过程推导对称的空间分数阶扩散方程 16
§2.1.4 一种平稳随机过程推导非对称的空间分数阶对流 - 扩散方程 . . . 18
§2.2 高维空间分数阶对流 - 扩散方程 19
§2.2.1 多孔介质中的渗流问题 19
§2.2.2 渗流问题的主方程 20
§2.23.3 高维空间分数阶对流 - 扩散方程 21
第三章　Lévy-Feller 对流 - 扩散方程的数值模拟 23
§3.1 Lévy-Feller 对流 - 扩散方程的基本解 23
§3.2 Lévy-Feller 对流 - 扩散方程的离散随机游走模型解释 26
§3.2.1 离散随机游走模型 26
§3.2.2 离散随机游走收敛于稳定的概率分布 28
§3.3 有限区间内 Lévy-Feller 对流 - 扩散方程的有限差分近似 31
§3.4 数值例子 35
第四章　二维多孔介质中渗流问题的数值模拟 41
§4.1 二维均匀多孔介质中非连续渗流问题的分数阶 Euler 隐格式 41
§4.1.1 非连续渗流方程的分数阶 Euler 隐格式 41
§4.1.2 分数阶 Euler 隐格式的稳定性和相容性分析 44
§4.1.3 数值例子 46
§4.2 二维非均匀多孔介质中连续渗流问题的修正 Peaceman-Rachford 交替方向法 49

§4.2.1 连续渗流问题的修正 Peaceman-Rachford 格式 ... 49
§4.2.2 修正 Peaceman-Rachford 格式的稳定性和收敛性分析 ... 53
§4.2.3 Richardson 外推提高逼近精度 ... 55
§4.2.4 数值例子 ... 55
第五章 三维多孔介质中渗流问题的数值模拟 ... 57
§5.1 三维均匀多孔介质中非连续渗流问题的修正交替方向法 ... 57
§5.1.1 有界区域内均匀介质中的非连续渗流方程的修正交替方向法 ... 58
§5.1.2 修正交替方向隐格式的稳定性和收敛性分析 ... 59
§5.1.3 数值例子 ... 64
§5.2 三维非均匀多孔介质中连续渗流问题的修正 Douglas 交替方向法 ... 68
§5.2.1 有限区域内非均匀介质中连续渗流方程的修正 Douglas 格式 ... 68
§5.2.2 修正 Douglas 格式的稳定性和收敛性分析 ... 71
§5.2.3 Richardson 外推提高逼近精度 ... 76
§5.2.4 数值例子 ... 76
第六章 总结 ... 79
参考文献 ... 81
攻读博士学位期间的研究成果 ... 89
致谢 ... 91

Contents

Chinese Abstract I

English Abstract III

1 Introduction 1

§1.1 Introduction 1

§1.2 Definition and properties of fractional calculus operator 6

2 Space fractional advection-dispertion equation 13

§2.1 Lévy-Feller advection-dispersion equation 13

§2.1.1 The random walk model 13

§2.1.2 Brownian motion and diffusion equation 14

§2.1.3 Deriving the symmetric space fractional diffusion equation from Lévy flight 16

§2.1.4 Deriving the asymmetric space fractional advection-dispersion equation from a stable random process 18

§2.2 Multi-dimensional space fractional advection-dispersion equation 19

§2.2.1 Seepage flow in porous media 19

§2.2.2 The master equation of seepage flow 20

§2.2.3 Multi-dimensional space fractional advection-dispersion equation 21

3 Numerical solution of Lévy-Feller advection-dispersion equation 23

§3.1 The fundamentional solution of the Lévy-Feller advection-dispersion equation 23

§3.2 Discrete random walk interpretation for the Lévy-Feller advection-dispersion equation 26

§3.2.1 Discrete random walk model 26

§3.2.2 Convergence for discrete random walk to a stable probability distribution 28

§3.3 Numerical solution of the Lévy-Feller advection-dispersion equation in finite interval 31

§3.4 Numerical results 35

4 Numerical simulation for two dimensional seepage flow in porous media 41

§4.1 Fractional Euler implicit scheme for two dimensional non-continous seepage flow in uniform porous media 41
§4.1.1 Fractional Euler implicit scheme for non-continous seepage flow equation 41
§4.1.2 The stability and consistency for Fractional Euler implicit scheme 44
§4.1.3 Numerical results 46
§4.2 Modified Peaceman-Rachford for two dimensional continous seepage flow in non-uniform porous media 49
§4.2.1 Modified Peaceman-Rachford scheme for continous seepage flow . 49
§4.2.2 The stability and consistency for the Modified Peaceman-Rachford scheme 53
§4.2.3 Improving the approximation order by Richardson extrapolation . 55
§4.2.4 Numerical results 55
5 Numerical simulation for three dimensional seepage flow in porous media 57
§5.1 Modified alternation direction method for three dimensional non-continous seepage flow in uniform porous media 57
§5.1.1 Modified alternation direction method for the non-continous seepage flow in uniform porous media in finite domain 58
§5.1.2 The stability and consistency for the Modified alternation direction method 59
§5.1.3 Numerical results 64
§5.2 Modified Douglas for three dimensional continous seepage flow in non-uniform porous media 68
§5.2.1 Modified Douglas scheme for the continous seepage flow in non-uniform porous media in finite domain 68
§5.2.2 The stability and consistency for Modified Douglas scheme 71
§5.2.3 Improving the approximation order by Richardson extrapolation . 76
§5.2.4 Numerical results 76
6 Conclusion 79
Reference 81
Major Academic Achievements 89
Acknowledgements 91

摘　　要

分数阶微分方程是指方程中含有非整数阶的导数，它非常有效地描述各种各样物质的记忆和遗传性质，在工程、物理、金融、水文等领域中发挥了越来越重要的作用。遗憾的是，大多数分数阶微分方程的解析解都含有复杂的级数或者特殊函数，不利于进行近似计算。于是对分数阶微分方程进行数值求解变得尤其重要。目前分数阶偏微分方程数值解的工作皆以抛物型方程为主要研究对象，数值方法多采用有限差分方法。本文也是采用差分法讨论抛物型方程，有所不同的是两类分数阶微分方程比较复杂。

本文所讨论的第一种抛物型方程是从随机游走和一种随机过程的稳定分布推导出的 Lévy-Feller 对流 - 扩散微分方程，方程中含有较复杂的分数阶导数— Riesz-Feller 分数阶导数，它含有双侧分数阶导数，并且含有倾斜度参数，是一种非对称的分数阶导数。这使得方程的离散处理起来变得复杂。

本文所讨论的第二种抛物型方程是从渗流问题中推广得到的高维分数阶对流 - 扩散方程，分别讨论了二维和三维情形的数值解。如果采用一般的差分方法离散此微分方程，得到的差分方程在计算过程中的计算量非常庞大，因此本文参考整数阶高维情形的处理方法，提出了几种修正的交替方向法。但是与整数阶方程不同的是，在三维情形中，分数阶导数的复杂性使得在构造差分格式时所添加的摄动项也非常复杂，由此所构造差分格式的理论分析也变得比较复杂。

第一章讨论了本论文的研究背景和意义，总结了前人所做的工作，给出本论文的研究内容和结构。

第二章中首先给出本文中用到的各种分数阶导数的定义及其性质，然后从随机游走和一种随机过程的稳定分布中推导出第三章讨论的 Lévy-Feller 对流 - 扩散方程；从渗流问题中推导第四章和第五章讨论的高维空间分数阶对流 - 扩散方程。

第三章讨论描述服从某种稳定分布反常扩散的非对称空间分数阶对流 - 扩散方程—— Lévy-Feller 对流 - 扩散方程，首先利用 Fourier 变换和 Laplace 变换给出方程的基本解，然后利用 Grünwald-Letnikov 分数阶导数移位离散算子离散方程中的 Riesz-Feller 分数阶导数得到离散格式，证明此格式可以解释为离散随机游走模型，并且证明了当时间和空间步长以一定的比率同时趋于 0 时，所提出的离散随机游走模型收敛到 Lévy-Feller 对流 - 扩散过程的稳定分布。接下来提出求解有界区域内的 Lévy-Feller 对流 - 扩散微分方程的显式差分格式，并且利用前面随机游走模型中的结论证明了显式格式的稳定性和收敛性。

第四章讨论带有不同边界条件的二维多孔介质中两类分数阶渗流方程的数值模拟：提出一种修正的交替方向隐格式——分数阶 Euler 隐格式求解均匀介质中的非连续渗流方程，对所提出的格式进行稳定性和相容性分析；提出修正的 Peaceman-Rachford 格式求解非均匀介质中的连续渗流方程，给出稳定性和相容性分析，并且采用 Richardson 外推技巧，将离散格式的逼近阶数提高到二阶。

第五章讨论三维多孔介质中两类分数阶渗流方程的数值模拟：一种是均匀介质中的非连续渗流方程，另一种是非均匀介质中连续渗流方程。提出一种修正的交替方向隐格式逼近均匀介质中的非连续渗流方程，以及修正 Douglas 格式逼近非均匀介质中的连续渗流方程。并且讨论了两种格式的稳定性、相容性。对于修正 Douglas 逼近格式还进行了 Richardson 外推提高逼近阶数。另外每一章均给出数值例子显示所采用数值方法的可行性。

关键词：分数阶微积分；Grünwald-Letnikov ；Riemann-Liouville ；Riesz-Feller ；修正的交替方向法；修正 Peaceman-Rachford ；修正 Douglas ；稳定性；收敛性

ABSTRACT

Fractional-order differential equation is obtained from the standard differential equation by replacing the integer-order derivative with fractional-order derivative. It describes more efficiently the property of memory and heredity of much material. It plays a more and more important role in various fields, especially in engineering, physics, finance and hydrology. Unfortuenately, most of the analytical solution for the fractional differential equation are complicated, i.e. with complicated series or especial function. So it becomes more important to solve those numerical solutions. The numerical solution of fractional-order partial differential equation is considered mainly about parabolic differential equation up to the present. The finite difference method was studied usually. In this paper we also use the finite difference method to discuss the parabolic differential equation. But in our paper, we discuss two kind of more complicated parabolic differential equations.

The first kind of parabolic differential equation discussed in this paper is the Lévy-Feller advection-dispersion equation. There is a complicated fractional derivative - Riesz-Feller fractional derivative. It is a non-symmetirc fractional derivative, with two-side fractional derivatives and skewness parameter, which results in the complicated disposal of the discrete form.

The second kind of parabolic differential equation, multi-dimensional fractional equation, is generalized from the seepage flow. The two- and three- dimensional cases are discussed in this paper. The calculation of numerical solution is intense large, if the traditional difference method is used. We fall back on the alternation direction method, according to the multi-dimensional equation with integral derivative. Unfortunatly, the added disturbed term becomes more complicated because of the fractional derivative, which results in the theoretical analysis more complicated.

In the first chapter, the background and significance of this dissertation are dicussed, the former research is introduced, and finally the framework of this dissertation is proposed.

In the second chapter, the definitions and properties of the fractional derivatives used in this paper, are listed. Then the Lévy-Feller advection-dispersion equation discussed in the third chapter, is deduced from the random walk and Lévy flight. And the multi-dimensional fractional advection-dispersion equation discussed in the

forth and fifth chapters, are deduced from the seepage flow.

In the third chapter, the Lévy-Feller advection-dispersion equation describing anomalous diffusion, with asymmetric fractional derivative, is considered. Firstly, the fundamentional solution is derived from Fourier and Lapalace transform. And secondly, the discrete scheme is obtained after discreting the Riesz-Feller fractional derivative in the Lévy-Feller advection-dispersion equation by Grünwald-Letnikov shift operators, then the scheme is proved to be considered as discrete randon walk model. And we show that random walk model converges to the stable law of Lévy-Feller advection-dispersion equation by use of a properly scaled transition to vanishing space and time steps. We propose an explicit finite difference approximation for Lévy-Feller advection-dispersion equation. As a result of the interpretation of the discrete random walk model, the stability and convergence of the numerical method in a bounded domain are discussed.

In the forth chapter, the numerical simulation of two-dimensional seepage flow with fractional derivatives in porous media, is considered under two special cases with different boundary conditions: a modified alternating direction implicit scheme, fractional Euler implicit scheme, for the non-continued seepage flow in uniform media, is proposed with the stability and consistency analysis. And the modified Peaceman-Rachford scheme for the continued seepage flow in non-uniform media are proposed with the stability and consistency. A method for improving the order of convergence by Richardson extrapolation for the Peaceman-Rachford scheme is also presented, which obtains the two order approximating accuracy.

In the fifth chapter, the numerical simulation of three-dimensional seepage flow with fractional derivatives in porous medias, is considered under two special cases: a modified alternating direction implicit scheme for the non-continued seepage flow in uniform media, is proposed with the stability and consistency analysis. And a modified Douglas scheme for the continued seepage flow in non-uniform media are proposed with the stability and consistency. To improve the order of convergence for the modified Douglas scheme, Richardson extrapolation is also presented. Some numerical results are presented to support our theoretical analysis in every chapter.

Key Words: Fractional calculus; Grünwald-Letnikov; Riemann-Liouville; Riesz-Feller; Modified alternation direction method; Modified Peaceman-Rachford; Modified Douglas; Stability; Convergence

第一章　绪论

§1.1　引言

分数阶微积分是传统的整数阶微积分概念的推广，它的阶数是任意的数，甚至可以是复数。分数阶微积分概念有很长的历史，它的提出时间跟整数阶微积分的时间差不多一样早，可以追溯到 Leibniz 和 Newton 发明微积分的时候，在 1695 年 Leibniz 写给 L'Hospital 的信中讨论整数阶微积分概念的时候就提到了 1/2 阶的导数。分数阶微积分的发展与泛函论、微积分方程以及解析学的许多分支的发展有着紧密联系。数学分析中许多已有的概念和结果都用到了分数阶微积分理论中，这使得单变量以及多变量的分数阶微积分的理论研究得到了迅速的发展。

从 Leibniz 提出 1/2 阶导数以后的 300 年里，分数阶微积分的研究仅仅限于数学家们进行的数学领域内的理论研究，其中作出重要贡献的有，匈牙利的 Grünwald 、俄国的 Letnikov 、法国的 Liouville 、Fourier 和 Lacroix 、德国的 Riemann 和 Weyl 、挪威的 Abel 。然而在近几十年内，研究者们发现，分数阶微积分算子与整数阶微积分算子不同，具有非局部性，从而非常适合用来描述现实世界中具有记忆以及遗传性质的材料，比如，各种材料的岩石流变性质描述、地震分析、粘弹性阻尼器、正弦振荡器、电子电路、电解化学、电容理论、电子 - 电解质接口描述、粘弹性系统和柔软构造物体的振动控制等等，可以说分数阶微积分在诸如分形理论 [1, 2] 、随机游走 [3, 4, 5, 6] 、粘弹性力学 [7] 等很多的科学领域中发挥了越来越重要的作用。

分数阶微积分在各个领域得到广泛应用的同时，分数阶微积分理论也得到了快速的发展。我们可以从如下专门会议和著作中追寻到分数阶微积分理论的发展历史 [8, 9, 10, 11] 。第一次关于分数阶微积分的会议——“分数阶微积分及其应用”于 1974 年在美国举行。第二次会议——“分数阶微积分”于 1984 年在英国举行。与分数阶微积分相关的杂志也有很多，其中专门刊登分数阶微积分内容的杂志有包括《 Fractional Calculus Modelling 》、《 Fractional Calculus & Applied Analysis 》等。

比起传统的整数阶微积分模型来，在分形理论、随机游走、粘弹性力学等很多的科学领域中，分数阶微积分模型更适合模拟现实问题 [12, 13] ，其中分数阶微分方程应用的最为广泛。 1998 年 Chavesz[14] 在讨论 Lévy 统计时，提出了一种分数阶扩散方程描述 Lévy flight 过程。 2000 年 Benson 等 [15, 16] 在讨论 Lévy 运动时

分别提出了分数阶 Fokker-Planck 方程和空间分数阶对流 - 扩散方程，并且通过与实验数据的对比证实了用分数阶方程模拟 Lévy 运动确实有很好的近似。 2001 年 Schumer 等 [17] 在研究多孔介质中溶质传输的 Eulerian 估计时，用分数阶的 Fick 定律代替传统的 Fick 定律得到分数阶对流 - 扩散方程。2002 年 Lu 等 [18] 将三维的分数阶对流 - 扩散方程应用到多孔介质中的传输问题。同年 Eli[5] 在讨论时间连续的随机游走路径时，提出了分数阶扩散方程，并且展示了分数阶的扩散方程能够很好地描述随机游走粒子的运动轨迹。 2005 年 Wang 等 [1] 在讨论悬移颗粒运动轨迹时，运用随机分形动力学方法，导出了悬移颗粒运动特征值的理论分布，其中一种分布的动力学基础就是分数阶方程。同年 Vasily 等在文献 [2] 中为了描述分形介质，对分形上的积分采用分数阶积分进行近似，于是从分形介质中的变形 Euler-Lagrange 方程推导出分数阶的广义 Ginzburg-Landau 方程以及非线性的分数阶 Schrödinger 方程。随后在 2006 年 Francisco 等 [19] 在研究无序多孔介质中的反应 - 扩散问题时，采用平均体积法以及进行必要的简化后，得到了描述有效物质浓度动力学的流量守恒方程——分数阶的 Cattaneo 定律方程。

从现实问题中抽象出分数阶微分方程之后，研究如何求解分数阶微分方程就成为一个迫切的研究课题。关于分数阶微分方程的解析解，当前的文献中主要有两种求解方法。第一种是对方程进行积分变换和逆变换得到基本解。在 1986 年 Wyss[20] 讨论了时间分数阶扩散方程，给出了含有 Fox 函数形式的解析解。随后 Schneider 和 Wyss[21] 在 1989 年将这一结果推广到时间分数阶扩散 - 波动方程，同样利用 Fox 函数得到相应的 Green 函数。 Yang[22] 在 1996 年利用 Laplace-Mellin 变换求解时间分数阶波动方程，得到含有 Fox 函数的相似解。 2000 年 Gorenflo[23] 讨论了时间分数阶扩散 - 波动方程，利用 Laplace 变换得到了含有 Fox 函数的变尺度解。 2003 年 Liu 等 [24] 讨论了时间分数阶对流 - 扩散方程的复数解。在 2001 年 Mainardi 等 [25] 讨论了含有空间 Reisz-Feller 分数阶导数、时间 Caputo 分数阶导数的时间 - 空间分数阶对流 - 扩散方程，通过 Mellin 变换，根据复平面上的 Mellin-Barnes 积分形式得到了方程的 Green 函数的一般表达式。在 2005 年 Huang 和 Liu[26] 讨论了 n 维空间和半空间上的时间分数阶扩散方程和对流 - 扩散方程，利用 Fourier 和 Laplace 变换以及逆变换得到了由 Mittag-Leffler 函数表示的 Green 函数。随后 Huang 和 Liu[27] 又将这一结果推广到时间 - 空间分数阶方程。

求解分数阶方程解析解的第二种方法是分离变量法。 Varsha 和 Hossein[28] 在 2005 年利用分离变量法，讨论了带有线性和非线性边界条件的非齐次分数阶扩散 - 波动方程的解析解。 Wang[29] 在他的硕士论文中将 Varsha 的结果推广到了三维情形。

遗憾的是，由上面文献中的结论可以看到，分数阶微分方程的解析解大多含有特殊函数，要计算这些特殊函数是相当困难的 [30, 21, 31]，于是越来越多的研究者转而讨论分数阶微分方程的数值解。

分数阶常微分方程数值解法的发展相当缓慢，在 1999 年 Podlubry 在关于分数阶微积分的专著 [8] 中提到一些分数阶常微分方程的数值解法，可是全书在数值解法方面没有给予证明。目前关于分数阶常微分方程数值解法的结果有，在 2004 沈和刘在文献 [32] 中对分数阶 Bagley-Torvik 方程提出一种计算有效的数值方法，同年 Diethelm 在文献 [33] 中提出解分数阶常微分方程的 Adams 方法， 2006 年杨和刘在文献 [34] 中对分数阶 Relaxation-Oscillation 方程提出了分数阶预估－校正方法，给出了误差估计。可惜的是，上面的工作都没有理论证明。直到 Lin 和 Liu 在文献 [35] 中讨论分数阶 Relaxation 方程时，从理论上给出了稳定性和收敛性的证明。之后在 2007 年 Lin 和 Liu 在文献 [36] 中对非线性常微分方程提出高阶方法，并给出了该数值方法的稳定性和收敛性证明，这是分数阶常微分方程数值解法方面的一个开创性工作。

同样分数阶偏微分方程数值解的发展也比较缓慢。直到 2002 年 Liu 等人 [37, 38] 做了一个开创性的工作，他们提出了分数阶的行方法 (Method of Lines)，将分数阶偏微分方程转化为常微分方程系统来求解，它的主要思想是采用自动变阶 (1-5 阶) 变步长的向后差分公式 [39]。一般我们称时间导数是分数阶导数的偏微分方程为时间分数阶微分方程，称空间导数是分数阶导数的偏微分方程为空间分数阶微分方程，时间和空间均为分数阶导数的方程称为时间 - 空间分数阶微分方程。接下来按照这三种分类讨论分数阶偏微分方程的数值解法的新进展。

在标准扩散方程中，对时间的一阶导数用 0 到 1 之间的分数阶导数代替，空间仍为二阶导数，称之为时间分数阶（次）扩散方程。如果用 1 到 2 之间的分数阶导数代替对时间的一阶导数，称之为时间分数阶扩散 - 波动方程。Liu 等 [39] 在 2005 年提出一种显式差分格式求解有界区域内的时间分数阶扩散方程，采用矩阵分析的方法进行稳定性与收敛性分析，然后进行了非 Markovian 离散随机游走的解释。随后 Zhuang 和 Liu[40] 在 2006 年提出一种隐式差分格式求解有限区域内的时间分数阶次扩散方程，然后首次的采用数学归纳法证明分数阶微分方程的有限差分格式的稳定性与收敛性。 Gorenflo 和 Abdel-Rehim[41] 在 2005 年讨论了带有非线性对流项的时间分数阶扩散方程，分别提出了显式差分格式以及 θ 隐格式并对方程进行数值计算。

由于时间分数阶导数的阶数从 1 到 2 变化时，对应微分方程描述的过程从标准的扩散方程变到波动方程，所描述的方程有本质上的变化，所以数值解方面的理论

分析相对于时间分数阶(次)扩散方程要复杂得多。到目前为止，仅有两篇文章讨论了时间分数阶扩散 - 波动方程的数值解，并给出理论分析。 Sun 和 Wu[42] 在 2006 年提出了有限差分格式求解时间分数阶扩散 - 波动方程，重要的是采用能量方法证明了所提出格式的稳定性。随后陈和刘 [43] 将这一结果推广到带有阻尼项的分数阶波动方程中。

根据各种分数阶导数提出的背景，时间分数阶导数一般为 Caputo 导数，而空间分数阶导数则有很多种，包括单侧的分数阶导数—— Riemann-Liouville 分数阶导数、 Grünwald-Letnikov 分数阶导数、 Caputo 分数阶导数等，还有稍复杂的对称的双侧分数阶导数—— Riesz 分数阶导数，以及更复杂的非对称的双侧分数阶导数—— Riesz-Feller 分数阶导数。 2004 年 Meerschaert 和 Tadjeran 在文献 [44] 中对带有 Grünwald-Letnikov 分数阶导数的空间分数阶对流 - 扩散方程提出了向后 Euler 方法以及隐式 Euler 方法，该文章的另一贡献是利用 Fourier 变换证明了 Grünwald-Letnikov 移位算子的离散逼近的截断误差是步长的一阶逼近。 2005 年 Shen 和 Liu 在文献 [45] 中讨论了带有绝缘端的含 Caputo 导数的空间分数阶扩散方程，提出了显式的有限差分格式并进行误差分析，给出数值例子，并且与行方法求得的结果进行比较。随后 Tadjeran 等 [46] 讨论了带有 Riemann-Liouville 分数阶导数的空间分数阶扩散方程的数值解，提出 Crank-Nicholson 方法，证明了方法的稳定性、相容性、收敛性，此文章中的另一个重要贡献是利用 Fourier 变换证明了关于 Grünwald-Letnikov 移位算子对 Grünwald-Letnikov 分数阶导数的类似于 Taylor 公式的逼近形式。 同年 Meerschaert 和 Tadjeran 在文献 [47] 中讨论了含有双侧的 Riemann-Liouville 分数阶导数的空间分数阶扩散方程的数值解，提出了向后 Euler 方法以及隐式 Euler 方法进行求解。

关于时间 - 空间分数阶微分方程，目前仅有两篇文章讨论它的数值解。其一是 Momani 和 Odibat 在文献 [48] 中利用 Adomian 分解方法提出一种分解算法，但是没有进行理论分析。第二篇是 Liu 等人在文献 [49] 中给出时间 - 空间分数阶对流 - 扩散方程的隐式差分近似格式，并用数学归纳法进行了稳定性与收敛性证明。

高维分数阶微分方程的数值解目前有两篇相关的文章： Meerschaert 等人 [50] 采用交替方向法解决分数阶二维问题，在不失精度 (1 阶) 的情况下大大减少了计算时间，不过交替方向法要求 2 个系数矩阵是可交换的，或者说要求 2 个方向上分数阶导数前系数是常系数，不与其它变量有关。 Chen 和 Liu[51] 讨论了二维的分数阶对流 - 扩散方程，提出交替方向 Euler 格式，采用矩阵特征值的方法讨论了格式的稳定性，然后进行 Richardson 外推得到二阶精度。

关于分数阶高阶逼近，目前还没有直接有效的数值方法。对于分数阶导数，人

们尚未构造出局部截断误差为 2 阶的数值逼近。 Grünwald-Letnikov 分数阶导数的离散逼近是 1 阶的，但它是不稳定的； Grünwald-Letnikov 分数阶导数的移位离散也是 1 阶逼近且是稳定的，因此 Grünwald-Letnikov 分数阶导数的移位离散常用于作为 Grünwald-Letnikov 分数阶导数、 Riemann-Liouville 分数阶导数的 1 阶的数值逼近。虽然 Lubich 等人于 1986 年在文献 [52] 中早已对常微分方程提出了一些高阶逼近格式，然而这些系数难于计算，而且其方法在理论上没有得到证明。因此高阶逼近的工作相当困难，直到最近 Lin 和 Liu 在文献 [36] 对常微分方程提出了基于线性多步法的高阶逼近方法。至于偏微分方程，目前除了 Tadjeran 等人在文献 [46] 中以及 Chen 等人在文献 [51] 中进行外推得到二阶逼近外， Roop[63] 和 Zhang[53] 在博士论文中利用有限元法求解偏微分方程得到高阶逼近精度。

当前关于分数阶微分方程的研究中，还有一个热门的研究焦点，就是分数阶的 Fokker-Planck 方程。它描述的是一种反常次扩散过程。在 2004 年 Langlands 和 Henry 在文献 [54] 中，讨论了分数阶 Fokker-Planck 方程，提出了一种数值方法，并且利用方程的特点很巧妙地进行了类似 Taylor 展开的相容性证明，但是文章没有进行严格的稳定性证明。 Zhuang 和 Liu 在文献 [55] 中讨论了一种反常次扩散过程，提出了几种新的隐格式进行数值求解，并且进行了稳定性与收敛性分析。

在微分方程的数值计算中，有限差分法由于容易计算，是工程中应用的最早，也是比较成熟的方法，本论文主要利用有限差分法讨论两类空间分数阶对流 - 扩散微分方程的数值解法。

目前为止，前人所做的空间分数阶微分方程多数是含有单侧分数阶导数或者对称的双侧导数，本文所讨论的第一类对流 - 扩散方程（ Lévy-Feller 对流 - 扩散方程）中含有较复杂的分数阶导数—— Riesz-Feller 分数阶导数，它含有双侧分数阶导数，并且含有倾斜度参数，是一种非对称的分数阶导数。 Mariusz 和 Jacek[56] 讨论过类似的问题，他们给出了无穷边界上的一种离散格式，但是没有进行任何的理论分析。我们首先将 Lévy-Feller 扩散过程推广为 Lévy-Feller 对流 - 扩散过程，然后讨论了有界区域内的数值模拟，并且给出了稳定性相容性分析。

含有 Riesz-Feller 分数阶导数的 Lévy-Feller 扩散方程是用来描述反常扩散的传输过程。 Gorenflo 和 Mainardi 等 [57, 58, 59, 60] 讨论了含 Riesz-Feller 分数阶导数的空间分数阶扩散方程（ Lévy-Feller 扩散方程），对方程中的分数阶导数进行离散逼近后，离散格式解释为离散随机游走模型。随后讨论了含时间 Caputo 分数阶导数和空间 Riesz-Feller 分数阶导数的更复杂的时间 - 空间分数阶扩散方程 [61, 62] 。但遗憾的是都没有进行数值模拟。因此本文第一部分内容即是以此为出发点。

本文所讨论的第二类空间分数阶对流 - 扩散方程是从渗流问题中提出的高维分