学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号_______密级________
学　　号：200223022　　　　　　　　　UDC___________________

厦　门　大　学
硕　士　学　位　论　文

随机波动率环境下可违约债券的近似定价计算

The Approximative Calculation and Analysis of Defaultable Bond' Price under the Assumption of Stochastic Volatility

陈　侃

指导教师姓名：李　时　银 副教授
厦 门 大 学数学系

申请学位级别：硕　　　士
专 业 名 称：概率论与数理统计
论文提交时间：2 0 0 5 年 5 月
论文答辩时间：2 0 0 5 年　月
学位授予单位：厦　门　大　学
学位授予日期：2 0 0 5 年　月

答辩委员会主席：__________
评　　阅　　人：__________

2005 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

论 文 摘 要

由于信用风险往往对定价风险债券有着十分重要的作用，所以本文采用公司价值模型来量化和分析违约风险。为此必须要寻找一个合适的数学模型来描述公司价值的变动规律。在Merton所创立的分析框架中，假定标的资产价格的波动率为常数。但是实证研究表明，这并不符合现实情况。从而就产生了许多改进模型和计算方法。

因为人们发现随机波动率模型是描述隐含波动率“期限结构”的有效模型，同时还可以解释“波动率微笑”现象。另外，在实证中还发现波动率一般具有自回归、均值回复等特性。鉴于OU过程所具备的性质，我们认为使用OU过程的非负函数来描述随机波动率比其它过程更为合理，也更能解释波动率现象。

但是这样一来，就必须要考虑效用函数和波动率的风险溢价，从而使得我们所面对的是一个非完全市场，而且定价过程所涉及的参数也大大增加。同时，随机波动率的存在使得由复制组合方法所得的定价方程变得更加复杂，并且没有封闭的解析解，只能采用近似算法。所以，本文采取把解函数按波动率回复时间$\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\alpha^{-1}}$作幂级数展开，并求解一系列Poisson方程的方法来寻求定价公式的近似表达，然后将这种方法推广到不同的补偿函数，以及允许提前破产的情况上去。

近似定价公式在确保了一定的计算精度的同时，给出了解析表达式，并且减少了所需的参数个数，大方便了计算。但是，公式中所用到的参数仍然无法直接从市场观测到。为此，本文使用回归分析、最小二乘法等统计手段对参数进行了估计，从而保证了整个计算过程有实际应用的价值。

关键词： 随机波动率，快速均值回复，公司价值模型，可违约债券

Abstract

In this thesis, we use the “Firm value models” to analyze the Default Risk, because the Credit Risk always has important effect in risky bonds’ pricing. So we must find a suitable mathematical model to describe the movement of firm’ s value. There is an assumption of constant volatility in Merton’ theory. But, the researches show that it doesn’ t accord with the reality. So more and more studies concentrate on how to extend this assumption and calculation.

Not only do stochastic volatility models explÿain the basic shapes of smile patterns, but they also allow for more realistic theories of the “term structure” of implied volatility. In order to generate a pricing formula that is appropriate for the case where volatility follows an autoregressive and mean-reverting stochastic process, a large and growing literature suggests that this case is empirically relevant; we use the function of Ornstein-Uhlenbeck process to describe stochastic volatility. At the same time we can make sure that volatility is posiive.

Now, we must face the incomplete market and have more parameters in the procedure because of the existence of volatility risk’ price and the utility functions. At same time, it will make the partial differential equation of pricing become more complex and hasn’ t any closed-form solution. So we will derive an approximate solution of this equation as the price formula of defaultable bond under the incomplete market by using the solution function expansion according to $\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\alpha^{-1}}$ and the methods of solving Poisson equations. Then, we will generalize the result to some different payment functions and the situation allowing bankruptcy ahead.

At last, we use the statistic methods, such as regression analysis and least-square method to estimate the parameters of the approximate pricing formula. It ensures that all the procedures of calculation are applicable and practical.

Key Words： stochastic volatility, fast mean-reverting, firm value models, defaultable zero-coupon bond.

目　录

第一章　导　言..........1

第一节　信用风险模型的发展与分类介绍..........1

第二节　公司价值信用风险模型中的波动率改进模型..........7

第三节　OU 过程简介..........12

第二章　随机波动率模型下的定价方程..........14

第一节　带随机波动率的公司价值模型..........14

第二节　定价方程的推导..........15

第三章　定价方程的近似求解..........18

第一节　解函数的分解..........18

第二节　分解的合理性证明..........19

第三节　已知结果介绍..........20

第四节　深入计算..........21

§3.4.1 求解 V_3 函数..........21

§3.4.2 求解 V_2 函数..........22

§3.4.3 对波动率函数 f 的性质分析..........24

第五节　小 结..........25

第四章　实际应用..........28

第一节　不同的赔偿函数假定..........28

第二节　参数估计..........29

第五章　推　广..........34

第六章　总　结..........37

参考文献..........38

后　记..........40

第一章　　导　言

第一节　信用风险模型的发展与分类介绍

现代金融体系是一个完全建立在信用基础之上的经济体系，故信用风险对于金融市场，尤其是金融产品价格的影响是一个不可忽视的重要因素。一般说来，信用风险可以定义为：由于合约另一方未履行合约订立的义务而导致债权人发生经济损失的可能性。不论对方是由于财务困难而未能履行合约规定，还是由于不愿意而不履行非强制性合约，都可以广义地称之为信用风险。

自从金融市场形成之日起，人们就很自然地将信用风险看作是债务价格与债务承诺回报率的关键决定因素。较之于那些市场参与者认为信用风险较低的合约，隐含高风险的债务合约必须向投资者承诺更高的回报率。而较高的承诺回报率意味着：在其它合约条款相同的条件下，债券价格较低。同时通过对美国 1970 年到 1997 年债券的平均累计违约率的观察结果还表明[25]：那些最初被评为投资级的优良债券，随着债龄的增加，其违约率趋于增加；而最初被评为投机级的债券，随着债龄的增加，其违约率趋于下降。当然，前提是这些债券还存活着。也就是说，信用风险是动态变化的，它对债券定价始终发挥着重要作用，是一个不可忽略的关键因素。其之所以有时在定价过程中会被忽略的主要原因并不在于交易对手的信用品质不需置疑，而是在于缺乏合适的信用风险评估模型。

为了具体分析信用风险对金融产品价格，特别是债券价格所存在的影响，明确得到每份合约的合理承诺回报率，众多的市场参与者长期以来开发出了大量的研究方法，总的归纳起来，有传统方法、公司价值模型、首越边界时间模型与密度模型这四大类型。以下将就此分别作一些简单介绍。

一.　传统方法(traditional methods)

传统的信用风险定价方法为收集历史违约数据，并从这些数据中推得信用利差。其定价风险债券的大致作法是：根据历史数据估计债券的期望损失，并据此补偿投资者的损失。这种信用风险定价探讨方法关注的是信用风险评估这个概念，即

从历史数据中推得违约信息，但通常都不以模型为基础。另外，除了将历史违约数据投射到未来这个假定之外，这个探讨方法还假设投资者真的是风险中立的，除非信用风险不是系统风险。由马克威茨的证券投资分析理论我们知道，如果信用风险并非系统风险，那么信用风险债券就不应要求取得超过无风险利率的期望回报。换而言之，它们超过无风险债券的利差反映的就只是经验概率下违约所致的期望损失，而决不是风险溢价。可是经验研究表明，信用风险是系统风险。例如，Altman(1989)就曾发现，低息债券比高息债券往往具有更高的长期平均收益率。这说明信用风险高低对实际收益率有影响，即确实是系统风险，否则的话二者应该相等。由此也就说明了我们利用传统的信用风险定价方法所计算出来的利差必然隐含了以往债券的信用风险的风险溢价。

另一方面，Litterman 与 Iben(1991)等人采用的探讨方法虽然也属于传统方法，但思路则与上述的恰恰相反，他们是从观察到的信用利差来推得隐含的违约概率。

二.　　公司价值模型法(firm value models)

长期以来，人们多是采用传统方法分析信用风险，直到最近才发展出量化这一影响的分析模型。Black 和 Scholes(1973)在他们关于期权定价的开创性论文中朝信用风险模型迈出了关键的第一步。Merton(1974)则进一步发展了他们的直觉，并将其融入分析框架。之后，人们追随这三人进行了大量的研究，发展出了诸多的信用风险模型。然而，当前的许多理论都是以早先探讨的基本理论为基础，或是其扩展。

其中，公司价值模型法运用 Merton(1974)发展的探讨方法，通过给相对于其负债的公司资产价值建立模型，并根据给定的公司价值模型的演变规律来判断违约率和清偿率，进而推得违约风险价格。由于它们建立了公司资本结构模型，它们有时也称为结构模型。在这类方法里，信用风险都可以被理解成为是公司资产价值的看跌期权，差别只是在于具体模型的选择及清偿率的假定不同而已。比如可以规定一个固定清偿率，或是按照公司资产价值与其总负债的相对比例来确定清偿率。更一般化的，我们甚至可以在此框架下假定包含随机负债和随机利率两种情形的一般化信用风险模型。

1. 莫顿模型

由于最初为信用风险债券或类似金融工具定价建立的模型之一是 Merton(1974) 创立发展的，有着特殊的地位。故以下对莫顿模型作一个简单介绍。至于对莫顿模型的改进所得的其它模型，将在后文中介绍。

莫顿模型假设公司偿还债务的能力取决于公司资产的全部价值 V。考虑这样一个公司：它唯一的负债是承诺在某个时期支付 K，可以将这个要求权理解为一零息债券，并假定当债券到期时若公司资不抵债，即此时公司价值 $V_T< K$，则公司破产，并以公司所余的全部价值 V_T 来偿付债券。根据 Black 和 Scholes(1973)的观点，可以将其理解为，通过发行债务，股票持有人将公司资产出售给债券持有人，同时保留赎回资产的看涨期权（call option）。这也等价于下面这个说法，即，股票所有人拥有公司资产，并从债券持有人那里购买了一份看跌期权（put option）。如果公司资产的价值低于公司欠债务持有人的债务量，那么股票所有人可以用来自看跌期权的偿付金额来结清应付债务。于是公司债券可以看作是无违约风险债券减去执行价格 K 的看跌期权，执行价格则是根据公司资产 V 签定的。在这种情况下，执行价为 K 的债券支付额是：$\Phi = K - \max(K-V,0) = \min(V,K)$

风险中立测度 Q 下公司价值的动态变化可以规定为一个标准几何布朗运动：

$$\frac{dV}{V} = rdt + \sigma_V d\widetilde{W}_t \qquad (1.1.1)$$

这里的 r 是瞬间无风险利率，σ_V 是公司价值的波动率。虽然 V 本身不是交易资产，但 V 的衍生产品即公司的股票是。Merton(1974)的研究显示，在这种情况下，V 的衍生产品的价值与投资者的风险偏好无关。因此可以假设为风险中性，而不失其一般性。这意味着若 V 用连续无风险复利打折的话，则存在唯一等价概率测度 Q，使得 V 是测度 Q 下的鞅。这样，风险债券 t 时的价格 $P^d(t,T)$ 就可通过求解相应的偏微分方程（PDE），由布莱克-舒尔茨期权定价公式给出如下：

$$P^d(t,T) = P(t,T)\cdot N(d-\sigma_V\sqrt{T-t}) + V\cdot N(-d) \qquad (1.1.2)$$

其中，$P(t,T)$ 为与对应的到期偿付金额为 K 的无风险债券价格，而：

$$d = \frac{\ln(V/P(t,T)) + \frac{1}{2}\sigma_V^2(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}$$

这个简单的信用风险模型进行了大量的严格假设。例如：它假设违约不能发生在债务到期日前；公司的债务只由单一类别构成，排除了不同到期日或是不同资历、不同偿付优先权的可能性；而且不能有票息，破产也假设为没有任何相应成本。根据类似的思路，还假设破产只能在公司价值低于债务面值时发生，因此也排除了由于流动性不足所致的破产。

2. 莫顿模型的扩展与应用。

莫顿的零息债券信用风险模型有多种扩展方式。有适应各种不同类型证券的扩展，如付息债券、可赎回债券、抵押证券、可转化债券、可变票面利息率债券等等。另一些的扩展则可以用来处理那些有着不同到期日、不同资历或是特殊契约条款的要求权的评估。

例如，Gox, Ingersoll 与 Ross(1980)将 Merton 的探讨方法应用于可变票面利率信用风险债券的评估，以此确定可变票面利息支付结构，这种结构有助于消除或减少利率风险。同时，运用莫顿模型，Claessens 与 Pennacchi(1996)从布雷迪（brady）债券（布雷迪债券是由新兴市场国家发行，由美国政府提供担保的新兴市场债券，通常多以拉丁美洲国家为主）价格中推得隐含的违约概率。

Ho 与 Singer（1982），则在莫顿框架下分析了诸如到期期限，公司融资约束，优先原则以及支付时间安排等等这些契约条款的不同对债券的信用风险的影响。

Chance(1990)在莫顿模型框架内考察可违约零息债券的持续期。他指出：两种债券到期期限相同，有违约倾向的债券持续期小于其对应的无风险债券的持续期。这个分析结论与经验观察结论相一致，即：信用风险越高，利率变化对债券回报率的影响力就越低。

Shimko，Tejima 与 Deventer（1993）在假定利率遵循维西塞克（Vasicek，1977）演变规律前提下推出零息风险债券的封闭解。由于莫顿模型中的风险债券含有期权，所以该公式类似于相应的维西塞克利率下的期权定价公式。

三. 首越边界时间模型(first passage time models)

首越边界时间模型也是运用公司价值这个概念，但与公司价值模型法不同的是

公司价值被用来确定违约的时间，而且清偿率通常不是以公司价值为基础来确定的。这种方法试图解决的是到期日前发生破产的问题。Merton(1974)模型中的破产没有在债券到期前发生的，而与此不同，首越边界时间模型假设，即使是在到期日之前，只要公司价值超过了某个通常与时间有关的特定界限，那就发生破产。另一方面，此时对清偿率加以模型化变得更加困难了。因为如果假设公司价值刚刚越出边界时公司就破产，并且边界是由时间决定的函数，那么清偿率也是时间决定的函数。于是有些作者希望通过假设给定一个独立于公司价值的外生清偿率来处理这个问题。

首越边界时间模型是 Black 与 Cox(1976)引进的，他们对莫顿的公司价值模型进行了调整，促进了对契约里所谓的安全条款的建模。安全条款赋予债券持有人在一定条件下强迫公司破产的权利。安全条款经常包含赋予债券持有人这样的权利，即：若债务人无法履行利息支付义务, 那么债券持有人就可宣布债务人有义务兑回发行的全部债务。在这种情况下，全部债务就立刻变成应付款，并迫使公司重组，否则就破产。这类条款的目的是保护债券持有人免受公司价值进一步贬值造成的损失。

Black 与 Cox（1976）模型中将这类安全条款处理成外生的、由时间决定的边界。他们将这个边界设为一个指标函数，表达式如下：

$$V^d(t) = ke^{-r(T-t)} \tag{1.1.3}$$

这里的 k 和 r 是外生常数。只要公司价值等于 $V^d(t)$，那么公司就被迫进行重组或破产。这种情况下，债券持有人接管公司资产价值。设立这样一个条款的结果是约束股票持有人通过增加公司资产的波动将财富从债券持有人那里转移到自己那里的能力。由于 Black 与 Cox 在他们的分析中没有包含破产成本，于是他们证明这类条款有可能大大减少信用风险，但这取决于边界的界定。外生边界的存在使最初的莫顿模型转变为首越边界时间模型，当公司价值低于这一边界时，若不引发破产公司价值就不会再下跌。Black 与 Cox 求得了此时债券价格的封闭解，同时假设股息是连续派发的, 而且是与公司价值成比例的。

Brennan 和 Schwartz（1980）也对违约进行了探讨，并建立了类似于 Black 与 Cox（1976）的模型，但他们是在其可转换债券模型中应用了连续违约边界，并求得了最终 PDE 的数值解。

四. 密度模型(intensity models)

密度模型则是更近引进的另一类方法，采用了与公司价值模型完全不同的探讨思路，它假设公司破产的发生是由外部的冲击造成的，而非仅仅由公司自身价值所决定，进而由于公司破产而导致违约。故它强调的是导致出现违约的外部违约分布过程。为此，密度模型引入外生的无套利破产函数来表示违约或破产过程。一般假定违约分布过程是一个泊松分布过程，而违约函数通常被定义为一个跳跃函数，即，可以从无违约跳到违约。既定时间段中发生这一跳跃的概率取决于违约密度，通常用 λ 表示。由于违约函数模型中只包含违约时间，而没有包含发生违约时造成的损失严重程度，因此经常假设清偿率由外部给定，是外生于模型的。进而，人们根据历史数据对密度函数不断加以校正，使之更加符合市场实际情况。具体来说，比较常用的密度模型主要有以下几种：

1．约罗-腾布尔（Jarrow-Turnbull）模型。考虑一个以 Jarrow 和 Turnbull(1995)为基础的离散时间的简单密度模型。假设无违约短期利率具有马尔可夫特性，因此就能够用一个重组格状图来表示。格状图的每一个节点上的短期利率可以跳往两个节点,跳跃次数与它们的风险中性概率则可以通过标准期限结构建模技术计算出来。t 时上跳的概率用 π_t 表示，相应地，风险中立下跳的概率就是 $1-\pi_t$，由此得到一个标准的二项格状图，这是经常在离散时间期限结构建模中应用的模型。接着将破产函数叠加到无违约期限结构格状图中。在每一时期发生违约的风险中立概率是 λ_t。于是在每个时段、每个无违约债券价格可以上下跳动的节点，都会有违约的情况出现。从而，在格状图的每个结点处可得到的是四种状态而非仅仅两种。如果已经知道风险中立概率的话，就可以在这个叠加所得的格状图中，用类似于标准格状图的方式递推出信用风险债券的价值。

2．约罗-兰多-腾布尔模型（Jarrow-Lando-Turnbull）为了克服约罗-腾布尔模型的一些缺陷。Jarrow, Lando 和 Turnbull(1997)又提出了将违约概率与信用级别联系起来的模型，他们借助生成矩阵定义了一个时齐性的有限状态空间马尔可夫链作为新外部违约分布过程模型。

3．其它密度模型。近年来，其他学者陆续提出了一些新的模型。比如 Madan 和 Unal(1998)提出了一个具有随机密度的密度模型，即违约密度为：

$$\lambda(t) = c \Big/ \ln^2(S/d) \tag{1.1.4}$$

这里 c,d 是常数，S 则是缩水了的公司价值，即 $dS = \sigma_S S dW_t$，W_t 为标准布朗运动。

不妨将 d 看作公司负债。可以知道，随着 S 趋于 d，违约密度将上升到无穷大。所以，d 是违约边界，即 S 比 d 小而不出现违约是不可能的。同时假定清偿率也是一个随机变量，但独立于利率，并规定它满足一个贝塔分布。

以上，我们对当前正在使用的一些信用风险模型做了一个简单概括，并讨论了一下它们各自的特点。对含有交易对手违约风险的金融衍生产品的定价，我们都可以采用前面讲述的这些模型进行分析研究，如公司价模型和密度模型。当然，这种模型的区别并非是绝对的，有些模型兼用了两种方法的要素。但是，正如前文所述，当前的许多理论都是以早先探讨的基本理论为基础，或是其扩展。

第二节　公司价值信用风险模型中的波动率改进模型

如上所述，公司价值模型方法的运用，完全依赖于对公司价值如何进行建模。故选择一个符合实际的模型至关重要。而其中最关键的步骤之一就是对公司价值波动率的假定。

在最初 Merton 所提出的公司价值风险模型中，假设公司价值的波动率是一个无法直接观察得到的常数，并由此得到相关的衍生证券的定价公式：Black-Scholes 公式。但实证研究表明[32]，我们利用相关证券的市场实际价格的历史数据，依据 B-S 公式，采用叠代算法倒推回去所得到的波动率，即隐含波动率，却并非是常数。这说明常数波动率模型并不完全符合真实市场的实际情况。因为如果模型是完备的，那么公司价值的隐含波动率对所有与公司价值有关的衍生证券而言应该都是相同的。从而，我们有必要对 Merton 模型的常数波动率假定作一些改进。为此，人们通过进一步研究，在实践中发现波动率还有以下几个特点：

1. 隐含波动率与相关衍生证券的期限有关，即存在“期限结构”，而且往往期限短的隐含波动率较高。
2. 隐含波动率与标的资产价格（公司价值）有关，往往资产价格高时，波动率倾向于下降，即与标的资产价格存在负相关的关系。
3. 隐含波动率与衍生证券的执行价格也有关，即存在“波动率的微笑”。研究发现，当股票期权处于非平值状态（即若期权立即执行，则持有者的现金流不为零）时的波动率比期权处于平值状态（现金流为零）时的隐含波动率更大。此时若使用 B-S 公式计算则会与实际结果有偏差，实践者必须不断调整波动率参数。
4. 随着时间增长，在长期的变化规律中，波动率还存在着均值回复的现象。

为此，人们陆续提出了如下几种常见的波动率改进模型、方法。不过必须要特别指出的是，若采用改进波动率的公司价值模型来评估信用风险，则在大多数情况下没有解析解，需要使用数值方法或其它方法来近似计算。

一. 局部波动率模型

Dupire，Derman 和 Kani(1994)提出，让波动率随资产价格和时间变动的模型：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(S_t, t)dW_t \tag{1.2.1}$$

即资产价格的波动率 $\sigma(S_t, t)$ 由时间 t 和资产价格 S_t 唯一确定。我们可以根据市场历史数据分析，在不同的资产价格下，局部波动率对不同的衍生证券种类所产生的不同的影响效果，从而确定合适的波动率函数σ，建立起相应的公司价值信用风险模型。该类模型有以下两个典型模式：

（1）时间依赖波动率模型：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(t)dW_t \tag{1.2.2}$$

这个模型适用于风险债券具有相同标的资产，且其它条件包括交割价格及违约赔偿方式都相同，只有期限不同的情况。因为当我们只是针对这一类债券进行风险评估时，相互之间的差异仅仅由期限长短决定，所以此时用该模型就可以较好地拟

合公司价值的变动规律。它的优点是可以求出解析解，而且定价简单[20]。但是该模型无法解释具有不同交割价格和赔偿条款，而其它条件相同的风险债券的价格差异。

（2）常数弹性波动率模型：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \delta \cdot S_t^{\eta-1} dW_t \tag{1.2.3}$$

当 η=1 时，上式所表示的是几何布朗运动。为了更好地描述资产价格与波动率之间的关系，一般取 η<1，这样当波动率变大时，资产价格下跌，相比上一个模型而言，较为符合实际情况中二者负相关的现象。该模型可以算出解析解[20]。故这个模型也很容易应用，但不幸的是，该模型允许资产价格为负值是它的一大缺点。

总的来说，局部波动率模型的优点在于该模型只存在一个风险源，债券定价、风险评估仍可保持在完全市场中，所得到的价格与投资者的偏好和预期无关，所以仍可以得到解析解，可以用改进的二叉树模型（隐含树图）定价。其主要缺点是该模型只可与今天市场上的波动率微笑和波动率期限结构相吻合。然而，由于该树图本身也隐含了未来的某个波动率微笑和波动率期限结构，它们可能与今天市场上所观测到的这些值很不相同。所以当一笔交易依赖于未来某个时刻所观察的波动率时，用局部波动率模型定价可能有偏差。

二． 随机波动率模型

由于波动率难于预测和估计，却又对公司价值建模有重要影响，所以很自然的想到用随机波动率模型来描述。随机波动率模型是指真实的波动率是随机的，而非单纯用时间和股票价格来解释。因此我们需要构造另一个随机过程来描述波动率的变化。这种模型的一般性描述为：在实际的概率测度 P 下，资产价格过程 $\{S_t, 0 \le t \le T\}$ 可以用如下的二维 Ito 公式来表示：

$$\begin{cases} dS_t = S_t[\mu dt + \sigma(y_t) dW_t] \\ dy_t = a(t, y_t)dt + b(t, y_t)dZ_t \end{cases} \quad 0 \le t \le T, < dW_t, dZ_t >= \rho dt \tag{1.2.5}$$

其中常数 μ 是标的资产（如股票）的期望收益率，即漂移率，$\sigma(y_t)$ 是资产的波动率，它是另一个随机过程 y_t 的函数，W_t, Z_t 是 Wiener 过程，ρ 为它们的相关系数，反映的是资产价格与其波动率之间的关系，这种关系是局部波动率模型中所重点描

述的。在此，如果我们仍然想保留这一特性，则设ρ≠0。而且根据现实中资产价格与其波动率变化的负相关关系，一般设ρ<0。另外，一旦允许波动率随机，那么效用函数和风险态度就会回到定价公式中来，这是与 Merton 模型所不同的，这时我们面对的是不完全市场。下面我们来回顾一下随机波动率模型的发展过程。

1. Hull 和 White(1987)提出的随机波动率模型[26]：

$$\begin{cases} dS_t = S_t[\mu dt + \sigma_t dW_t] \\ dV_t = \alpha V_t dt + \beta V_t dZ_t \end{cases} \quad 0 \le t \le T, <dW_t, dZ_t> = 0, V_t = \sigma_t^2 \tag{1.2.6}$$

为了得到唯一解，他们假设dW_t, dZ_t二者是不相关的，即ρ=0，且波动率没有系统风险。后者意味着波动率风险不带来任何风险溢酬。有了这些附加的假定，就可得到风险中性概率测度下折现到期收益的期望所计算出来的唯一的风险债券的价格，即对信用风险的评估，并求出其近似公式。

2. M.Stein 和 C.Stein（1991）模型：

M.Stein 和 C.Stein（1991）通过研究当股票价格服从具有变化波动率参数的扩散过程时的概率分布情况，得到了关于随机波动率下期权定价的有趣结果，以及这个参数与股票价格分布中的“厚尾”性质之间的关系，并建立了一个比 Hull-White 模型更一般的模型。这些成果同样可以应用于信用风险评估的公司价值模型。他们的模型如下[15]：

$$\begin{cases} dS_t = S_t[\mu dt + \sigma_t dW_t] \\ d\sigma_t = \alpha(m - \sigma_t)dt + \beta\sigma_t dZ_t \end{cases} \quad 0 \le t \le T, <dW_t, dZ_t> = 0 \tag{1.2.7}$$

波动率遵循算术 Ornstein-Uhlenbeck 过程（简称 OU 过程），具有自回归和均值回复特性。在此模型下，他们假设dW_t, dZ_t不相关，即ρ=0，从而可以得到明确的关于股票价格分布的解析解。而且利用他们模型的模拟仿真所得的结果与真实情况也有不少相似之处。但是运用这个模型隐含着必须要对参数α、β、m有合理的选择，而且缺少相关性意味着该模型没有抓住重要的偏度效应。Schobel 和 Zhu 在 1998 年的文章[16]中拓展了以上结论，允许ρ≠0。但以上两个模型都是假设波动率σ遵循算术 OU 过程，因此波动率σ有可能取负数，而这是与事实不相符的。

3. Heston 模型：

Heston (1993)利用一种新的技巧在随机波动率下导出欧式买入期权的解析解。他的模型允许股票价格与波动率之间的任意相关。这就是平方根模型[18]：

$$\begin{cases} dS_t = S_t[\mu dt + \sqrt{V_t}\, dW_t] \\ dV_t = \alpha(m - V_t)dt + \beta_1\sqrt{V_t}\, dZ_t \end{cases} \quad 0 \le t \le T, < dW_t, dZ_t >= \rho dt \tag{1.2.8}$$

该模型中，$\sigma_t = \sqrt{V_t}$ 是波动率。Heston 指出通常股票价格大于或小于交割价格的概率分布是无法得到解析表达式的，但相应的特征函数却可以得到。至少在平方根模型中通过反 Fourier 变换可以得到概率分布函数，这样就可以得到解析解。当这种随机波动率模型应用于信用风险评估时，情况也类似。如果能选择合适的参数，该模型在描述资产价格变动方面很灵活、很有希望。然而，这个模型的主要缺点是需要估计的参数太多，特别是波动率风险的市场价格的估计太难了。同样运用这种方法，Bakshi，Cao 和 Chen(1997)曾得出当股票价格包含跳跃情况下的封闭解。

4. 自回归条件异方差离散模型:

同年，Heston 还与 Nandi 提出了一个用一般自回归条件异方差(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastivity, GARCH)的离散模型来描述波动率的随机运动。例如，GARCH(1,1)

$$\begin{cases} S_{t+1} = S_t(1 + \mu + \sigma_t\varepsilon_t) \\ \sigma_{t+1}^2 = \omega + \phi\sigma_t^2 + \theta\varepsilon_t^2 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

对 σ_{t+1}^2 的一个常见的解释是，它代表了金融市场随机和不均匀的新信息流。人们后来发现实际上 GARCH(1,1)模型的连续时间极限可以类似于下面的方程(其中参数之间的关系取决于时间步长和 GARCH 模型中参数的特性，具体可参考文献[29])。

$$d\sigma_t^2 = \alpha(m - \sigma_t^2)dt + \beta_2\sigma_t^2 dZ_t \tag{1.2.10}$$

比较二者可知，GARCH（1，1）用 $\beta_2\sigma_t^2$ 代替了 $\beta_1\sqrt{V_t}$ 。

5. 随后人们又提出相对于以上两个模型的二分之三模型（the 3/2 model）：

$$d\sigma_t = \alpha\sigma_t(m - \sigma_t)dt + \beta_3\sigma_t^{3/2} dZ_t \tag{1.2.11}$$

此模型的优点是，不但同样可以得到平方根模型类似的解析解，而且经测度变换后变成风险调整过程时，标的资产的信用风险衍生证券价格在此模型下是局部鞅。