

# 主观期望理论及其在保险精算中的应用

Subjective Expected Theory and Its Applications  
in Actuarial Research

何凯浩

指导教师：谭忠教授

## 摘 要

“偏好”、“效用”是现代经济科学最为基础的概念，效用理论一直是传统经济学的理论基础，效用理论也一直是研究在风险和不确定因素下进行合理决策的理论基础。经济学家以近乎公理的形式认为：所有的经济主体在作决策的时候都是寻求期望效用的最大化；而且效用函数的形态是固定的。在传统的期望效用理论的框架下，唯一能对风险厌恶作出解释的是效用函数相对于财富是凹函数：一个人对财富的边际效用随着其财富的增长而降低。但是，由于现实中人的决策行为往往与期望效用理论所规范的“合理决策”模式不相吻合，人们对效用理论本身的合理性提出了广泛的质疑。

本文系统分析了传统的期望效用理论在实践与实验研究中的一些局限，研究了人们在不同的获取概率下对风险的不同态度，构造了安全系数  $SC(p)$  模型和主观概率  $SP_i$  模型，并在这两个模型的基础上对传统的期望效用模型作了改进，建立了主观期望效用模型和主观期望模型，并利用这两个模型较好地解释了彩票问题等一系列传统的期望效用理论所无法解释的问题，得出了一些富有理论意义和现实指导意义的结论；最后，本文将所建立的模型应用于保险精算的研究，揭示了保险定价的可行性在于保险人和被保险人所处的不同的风险环境，说明了对人的心理特征的分析在保险精算研究中的重要地位，并在此基础上对我国保险精算事业的发展提出了建议。

总之，本文是在对国内外关于效用理论及其改进方面的研究的综合考察的基础上对人们的风险态度作出的全面系统的研究，并创造性地建立了相应的数学模型，利用这些模型较好地描述了现实世界中人的决策行为，分析和研究了心理因素在保险精算中的重要地位，并分析了我国目前在这方面的现状，提出了相应的建议。

**关键字：**安全系数、主观概率、主观期望效用

### Abstract

“Preference”& “Utility” are the most basic conceptions in modern economic science, utility theory has long been the theoretic basis of original economics, and it is the academic basis in the research of how to make decision under risk and uncertainty, too. Economists view it as an axiom that all of the economic units are suit for the maximal expected utility when she is making decision, and the form of utility function is decided. Within the expected utility framework, the only explanation for risk aversion is that the utility function is concave: a person has lower marginal utility for additional wealth when she is wealthy than when she is poor. However, because the decision people made always not follow the “rational form” that the theory of expected utility provide, the rationality of the utility theory itself is always be oppugned.

In this paper, I analyze the limitations of traditional expected utility theory systematically, study people’s different attitudes towards risk under different gaining probabilities, construct security coefficient  $SC(p)$  model and subjective probability  $SP_i$  model, improve the original expected utility model by replace the probability  $p_i$  in the model with subjective probability  $SP_i$ , found subjective expected utility model and subjective expectation model, with these two models, I explained the paradoxical results led by expected utility model such as lottery problem etc. properly, drive some reasonable conclusions; at the end of this paper, I apply the model I constructed ahead in actuarial research, reveal the feasibility of insurance lies in the fact that the insureds and insurers face different risk circumstance, illuminate the importance of psychological analysis in actuarial research, make some suggestions on the actuarial research in our country.

In all, this paper make a full research on utility theory and its improve forms, study people’s risk attitude systematically, and construct mathematical models accordingly; with these models, I study and analyze the importance of psychological factors in actuarial research, investigate the status quo of our country and propose some suggestions accordingly.

**Key Words:** Security Coefficient; Subjective Probability; Subjective Expected Utility

目 录

导论	8
§ 1 选题的目的和意义	8
§ 2 研究方法和主要结论	9
§ 3 论文的结构安排	12
第一章 效用理论综述	14
§ 1 效用函数	14
1.1.1 引言	14
1.1.2 风险与风险的度量	17
1.1.3 效用函数与风险态度	20
§ 2 期望效用理论	24
1.2.1 不确定性与期望效用	24
1.2.2 偏好与二元关系	25
1.2.3 混合集与策略空间	26
1.2.4 效用函数基本定理	28
第二章 主观期望理论与实证分析	32
§ 1 期望效用理论的争论与改进	33
2.1.1 彩票问题	33
2.1.2 实验经济学中的悖论	34
2.1.3 期望效用理论的改进	38
§ 2 主观期望理论模型	42
2.2.1 安全系数	42
2.2.2 主观概率、主观期望效用模型和主观期望模型	47
§ 3 实证分析	51
2.3.1 彩票问题	51
2.3.2 Allais 悖论	53

2.3.3 Ellsberg 悖论	54
2.3.4 小结	56
<b>第三章 主观期望效用模型在保险定价中的应用</b>	<b>57</b>
§ 1 期望效用理论在保险定价中的应用述评	57
§ 2 主观期望理论在保险定价中的应用	60
§ 3 社会心理在保险精算中的地位	65
<b>总结</b>	<b>73</b>
§ 1 结论和本文的创新之处	73
§ 2 本文的不足之处和今后的研究方向	74
<b>参考文献</b>	<b>77</b>
<b>附录一：定理 1.2.1 的证明</b>	<b>80</b>
<b>附录二：投资偏好问卷调查</b>	<b>82</b>
<b>后记</b>	<b>84</b>

Contents

<b>Introduction</b>	<b>8</b>
§ 1 The Significance of Problem Selection	8
§ 2 Research Methodology and Main Conclusions	9
§ 3 Framework of Paper	12
<b>1. Utility Theory Review</b>	<b>14</b>
§ 1 Utility Function	14
1.1.1 Preface	14
1.1.2 Risk and Its Measurement	17
1.1.3 Utility Theory and Risk Attitude	20
§ 2 Expected Utility Theory	24
1.2.1 Uncertainty and Expected Utility	24
1.2.2 Preference and Binary Relation	25
1.2.3 Mixed Set and Strategy Space	26
1.2.4 The Basic Theorem of Utility Function	28
<b>2. Subjective Expected Theory and Empirical Analysis</b>	<b>32</b>
§ 1 The Argument and Improvement of Expected Utility Theory	32
2.1.1 Lottery Problem	32
2.1.2 Paradoxes in Empirical Research	34
2.1.3 The Improvement of Expected Utility Theory	38
§ 2 The Model of Subjective Expected Theory	42
2.2.1 Security Coefficient	43
2.2.2 Subjective Probability, Subjective Expected Utility Model and Subjective Expectation Model	47
§ 3 Empirical Analysis	51
2.3.1 Lottery Problem	51

2.3.2 Allais Paradox .....	53
2.3.3 Ellsberg Paradox .....	54
2.3.4 Summary .....	56
<b>3.The Application of Subjective Expected Theory in Actuari al Research .....</b>	<b>57</b>
<b>§ 1 Analysis of The Application of Expected Theory in Actuarial         Research .....</b>	<b>57</b>
<b>§ 2 The Application of Subjective Expected Theory in Actuarial Resear         ch .....</b>	<b>60</b>
<b>§ 3 The Importance of Psychology Analysis in Actuarial Science.....</b>	<b>65</b>
<b>Conclusions and Future Research .....</b>	<b>73</b>
<b>§ 1 Conclusions and Innovations .....</b>	<b>73</b>
<b>§ 2 Shortcomings and Future Research .....</b>	<b>74</b>
<b>Bibliography.....</b>	<b>77</b>
<b>Appendix 1: Proof of Theorem 1.2.1 .....</b>	<b>80</b>
<b>Appendix 1: A Questionnaire of Preference.....</b>	<b>82</b>
<b>Postscript .....</b>	<b>84</b>

## 导 论

### § 1 选题的目的和意义

社会科学中数学有什么用？在几十年前甚至就在短短的十几年前在还很多人在问这个问题。现在，在社会科学中使用数学已被广泛接受了，只有少数领域尚在探讨之中。原因不需要从任何高深的哲学论战中去寻找，而是从许多简单的事实中就可以明白。首先是社会科学的许多分支在明显的定量化，甚至可以说是被迫地定量化，人口统计学和经济学就是这方面明显的例子。其次，社会科学的主题，关于复杂系统的理论是用文字表达的，而他们的分析与比较用数学形式来表示会有很大的帮助。第三，一些社会科学理论关系只有通过定量化才能使它们的应用更一般化。第四，对于一些主题中比较模糊、甚至很难得到确切信息的概念，数学可以提供一种领会的手段。最后，社会科学关注的不仅是描述发生了什么，它们之间是如何联系的，还在于隐藏在背后的有效的，还是无效的决策；很大程度上，这些决策过程可以数学地表述和分析，使得我们的决策可以较多地依赖于知识，较少地依赖于推测<sup>[34]</sup>。

当伟大的美国经济学家欧文·费希尔（Fisher, 1898）撰写他的博士论文时，认为那时在全世界大约只有 50 种称得上是名副其实的关于数量经济的书和一些论文。现在的情况完全不同了：不仅在经济学中，而且在所有社会科学中涉及数学的书籍和论文每年以数以万计地出现。

效用函数这个词在现在的社会科学著作、文献中是常常遇到的，说明效用理论在实际的应用和研究中的重要性。但是，尽管效用理论一直是研究在不确定条件下进行合理决策的理论基础，是描述和度量决策者风险态度和风险偏好的主要途径，它在经济学的很多领域的研究分析中却受到了普遍的质疑。因为人们发现多数决策者的决策行为往往与期望效用理论所规范的“合理决策”模式不相吻合，如著名的 Allais 悖论。

2002 年 10 月 9 日，瑞典皇家科学院宣布，将 2002 年诺贝尔经济学奖

授予美国学者丹尼尔·卡尼曼 (D.Kahneman) 和弗农·史密斯 (Vernon L.Smith), 以表彰他们在心理经济学和实验经济学研究方面所做的开创性工作。中国社会科学院国民经济研究所所长樊刚对此从理论意义上总结说, 经济学确实是跟人们的主观意识相关的, 很多可以由人的主观意识来解释; 人的行为既然受客观环境、主观意识的影响, 所以经济学从一定意义上讲是包含主观因素和客观因素相互作用的科学, 它确实包含了人们的心理因素; 在研究体制改革、经济政策时不能忘记这些政策和体制是作用与人, 并与人相关的, 人要对这些政策作出反应, 要真正使人们从主观上、从内心接受这些政策, 才能使这些政策对人的行为产生积极的作用, 而只有对人的行为产生积极的作用, 才具有现实意义。这说明, 研究人在经济生活中的主观感受、他们在经济生活中获得的主观满足程度是很有现实意义的。也就是在 2002 年的全国大学生数学建模竞赛上, 有一道关于对彩票方案的优劣的评价的题目, 由于决策者的经济行为是为了在主观上获得最大的满足感, 所以, 评价彩票方案的优劣需要从消费者的“效用函数”或“心理曲线”出发去考虑彩票给消费者带来的主观满足程度; 正是经过这次竞赛, 引发了我对目前彩票日趋流行的态势进行研究; 在期望效用理论的框架下, 彩票由于其在设计时所规定的返还率, 使彩票对于彩票“投资者”来说是一个不公平的赌博, 理性人应该不去购买彩票的; 那么, 是什么原因促使众多的消费者去购买彩票呢?

正是由于效用理论在经济学研究中的日益重要性及其对现实经济生活中的一些现象进行解释时的力不从心, 使我认为将数学方法应用于效用理论, 通过建立一个较好的数学模型从而更好的对现实的经济现象进行解释是具有较大的现实意义的, 因此, 我就选择了关于效用理论方面的一些问题作为我的研究方向。

## § 2 研究方法和主要结论

### 研究方法

就方法论而言，本文采取了理论和实践相结合、实证分析和规范分析相结合的研究方法。在具体语言运用上，以定量分析和定性分析相结合的方法，以期能够更好地对决策者在经济生活中的实际决策行为作一个比较全面深入的研究。

理论和实践相结合是马克思主义认识论的一个基本原则<sup>[24]</sup>。因此，本文力求理论问题和实际问题之间的紧密联系，努力在对决策者的实际决策行为进行深入分析的基础上建立数学模型，使本文的分析尽可能的符合实际情况。理论须来源于实践，最后又要回到实践中去，并对实践起指导意义。本文首先对决策者的主观决策行为进行详尽深入的分析，并在此基础上建立本文的两个主要数学模型——安全系数曲线模型和主观概率模型；然后，在这两个模型的基础上对传统的期望效用理论进行改进，建立了主观期望效用模型和主观期望模型，应用这两个模型对彩票问题、Allais 悖论、Ellsberg 悖论等一系列现实问题进行实证分析，使所建立的数学模型在实践中得到检验；同时，也将这个模型应用与精算定价方面去解释精算定价的原理及定价的可行性，在此基础上对我国的精算研究提出一点建议，这是本文研究的基本思路。

实证分析和规范分析则是现代经济理论研究中广泛使用的一个研究方法。二者的结合可以对一个问题进行深入、透彻的分析，了解它的前因后果。实证分析方法研究的是“现实是什么”的问题，而规范分析方法则研究“应该是什么”的问题。本文首先立足于规范分析，通过对决策者的实际决策行为的深入分析，揭示出决策者主观上对获取概率产生的主观反应，说明决策者在面临不确定事件时“应该是有什么样的反应”的，从而建立数学模型去定量描述这些反应。然后，通过大量的实证分析，研究和分析决策者的一系列决策行为，通过这些实证分析所得出的具体结果和决策者的实际选择行为进行比较，我们就可以清楚地看到本文所建立的模型的合理性和适用性。

此外，图表也是本文的一个重要分析工具，其目的是为了得出全面而直观的结论，使文章的论述变得生动活泼。

## 主要结论

本文的主要结论包括：

（一）获取概率的不同取值会对决策者的风险倾向造成影响，在获取概率较小时，人们对获取概率的变化的敏感度要比获取概率较大时的敏感度小得多。传统的期望效用理论并没有注意到人们在不同获取概率下对风险的不同态度，忽视了决策者主观上对获取概率的产生的反应，所以会产生期望效用理论与人们的实际选择行为不符的现象；通过对决策者的主观决策行为进行深入的分析以后，在充分考虑决策者对客观获取概率的主观反应的基础上建立的安全系数  $SC(p)$  模型和主观概率  $SP_i$  模型较好的描述了决策者在面临不确定性事件时的主观选择行为，在此基础上对传统的期望效用理论进行改进而得到的主观期望效用模型弥补了原模型在捕捉决策者对获取概率主观反应方面的缺陷，使理论的分析与人们的实际选择行为实现一致，从而能够更加准确地描述现实中人的实际选择行为及其选择的动机，较好地解释了经济生活中一些用传统期望效用理论模型所无法解释的问题，这无论是对经济学的理论研究还是对现实市场的把握都具有较大的现实意义。

（二）通过运用主观期望效用模型于保险精算方面的研究可以发现：保险定价的可行性在于保险人与被保险人所处的不同的风险环境，被保险人由于面临着一个波动性比较大的风险环境，其对风险的厌恶促使其去寻求保障，而保险人通过承保大量的同质标的使其所面临的风险环境趋于稳定，提高了自己的安全系数，从而有“能力”承保被保险人的风险；当保险人自身也面临不稳定的风险时，也是“惧怕”风险的，将通过再保险的方式对自己所面临的风险进行“保险”。我们可以从中得到的一个启示是：保险人在设计保单的时候必须注意对被保险人心理特征的研究，并在研究

的基础上进行有针对性的保单设计，从而使设计出来的保单能够为广大消费者所接受，这样才能使保险人赖以生存的大数法则得以实现，确保保险公司的良性经营。

（三）在我国加入 WTO 以后，外资保险业正涌向我国，民族保险业面临着巨大的冲击和挑战。与外资保险业相比，民族保险业在资金、经验及管理方法上都有一定的差距，所以，民族保险业要利用自身对本国市场的比较透彻的理解，利用自身对本国人们的心理特征的相对比较深入的了解，同时也加快对我国的社会心理特征及其对我国保险精算业的影响的研究，发挥自身优势，扬长避短，争取开发出更能为大众的心理所接受的产品，在竞争中赢取主动，并以此推动我国保险精算业的发展。

### § 3 论文的结构安排

本文共分为五个部分。

第一部分是导论。简要介绍本文的研究背景、研究内容、研究的方法和本文的主要结论。

第一章是预备知识：对效用理论的综述。简要的介绍了效用理论的由来，人们的风险态度的识别和度量，并着重介绍了期望效用理论及其公理系统，为后文对效用理论在实践中出现的争议及解决的办法作铺垫。

第二章是本文的重点。这里首先列举了一些比较具有代表性的与期望效用理论所规范的“合理决策”行为相违背的一些实际决策行为和期望效用理论的框架下难以解释的一些经济现象；然后，本文对经济学家自效用理论提出以来对效用理论作出的改进进行了文献的回顾；在吸收了这些文献的一些思路和对决策者关于获取概率的主观反应的深入分析的基础上，创造性地建立了安全系数曲线和主观概率模型，并在这两个模型的基础上建立了主观期望效用模型和主观期望模型；最后，本文应用所建立的模型对前面列举的有代表性的悖论和经济现象进行实证研究，通过实证研究证明了所建模型的稳健性和适用性。

第三章是主观期望效用模型在保险精算中的应用。本章应用第二章建立的主观期望效用模型和主观期望模型对精算定价进行分析，较好的解释了精算定价的原理和可行性，说明了保险业的发展应该建立在对大众的心理特征进行充分的研究的基础上，并对目前我国保险事业的发展提出建议。

最后一部分是本文的总结。主要分析本文理论研究、实证检验、应用分析中得出的一些重要结论以及对本文的创新之处和不足之处的分析，同时也指出今后进一步研究的方向。

## 第一章 效用理论综述\*

自有人类社会以来，人们一直都在作决策而且也在一直研究怎么样去作出科学的决策。在过去的一个世纪里提出了许多决策理论，经济学家、统计学家、社会学家和行为学家们发表了许多决策理论方面的著作和文章，其中最引人注目的理论是由数学家、电脑的创始人冯·诺伊曼(Von Neuman)和著名经济学家摩根斯顿(Morgenstern, 1944)<sup>[17]</sup>在贝努里(D. Bernoulli)所提出的效用的概念上发展起来的期望效用理论。本章从效用函数的起源说起，简要叙述了效用函数及期望效用函数的数学性质及其在对决策者风险态度的分析和如何做出决策等方面的应用。

### § 1 效用函数

#### 1.1.1 引言

效用函数(Utility Function)这一名词在现在的社会科学著作、文献中是常常遇到的，什么是效用函数，它如何确定，怎样使它达到最佳状态，这些问题都是基本而且重要的，这一节从各种角度来论述效用函数，对效用函数的作用有一个了解。

人们认识效用函数的意义，明确它的作用，经历了一个漫长的阶段。最初，人们认为财富是越多越好，但对“好”这个意义并不明确，没有一个衡量的标准；关于财富的效用这个概念首先是从以下一个著名的赌博的例子中得到启示的：

**例 1.1.1 (圣彼得堡悖论)** 传说过去在圣彼得堡街头流行着一种赌博，规则是由参加者先付一定数目的钱，比如 100 卢布，然后掷硬币，当出现第一次人像面朝上时一局赌博终止；如果到第  $n$  次才出现人像朝上，则参加者收回  $2^n$  个卢布， $n=1, 2, 3, \dots$ 。决策人面临的问题是究竟参不参加这个赌博？

假设硬币是均匀的，则第  $n$  次投掷才出现人像面朝上的概率为  $p(n)=$

\* 本章内容主要参考文献[29]

$2^n$ ，相应的回报值为  $2^n - 100$ ， $n=1, 2, 3, \dots$ 。因此，“参加赌博”所对应的平均回报即回报期望值为：

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 100) \cdot 2^{-n} = +\infty$$

而“不参加赌博”所对应的平均回报显然为 0，照此看来，只花 100 卢布就可以赢得“无穷多卢布”，这种赌博对参赌者来说是绝对合算的，应该对绝大部分的人来说都应该具有很强的吸引力的，都会去参加这个赌博。可是实际上却与此相反，公众对这个“合算”的赌博似乎也缺乏兴趣，参与者并不多。

在上面的推算过程中，对概率的评估、对平均回报即期望值的计算都是显然正确无误的，而且“参加赌博”对应的回报期望值与参加者所付出的初始成本无关，无论开始要投入多少，其所对应的平均回报都是正的无穷大，绝对是“有利可图”的。那么，问题到底出现在哪呢？

那么我们现在实际上是怎样去量化大众参加这种“赌博”的心理满足程度的呢？在经济学上是用效用函数（或者说是心理曲线）来量化的。

**定义 1.1.1 (效用函数)** 设  $G = \{\text{能给人们带来满足的物质}\}$ ，则效用函数的定义为<sup>[19]</sup>：

$$u(x) : G \rightarrow R$$

表示数量为  $x$  的金钱、商品或劳务等能给人带来的满足程度，其函数值的大小表示决策者对某种选择的偏好程度，当什么也不能得到，也就是  $x=0$  时，其函数值为 0，即  $u(0)=0$ ；同时，若有：

$$x_1 \in G, x_2 \in G \quad \text{且} \quad u(x_1) \geq u(x_2)$$

则说明决策者认为  $x_1$  优于  $x_2$ 。

其实，圣彼得堡赌博问题并非一个实际的赌博问题，而是丹尼尔的表兄尼古拉·贝努里 (N.Berneulli) 有意设计的一个悖论，其目的是挑战当时以金额的期望值如平均回报或平均损失作为决策的标准。这个悖论提出后，

许多学者都试图解决它，其中，丹尼尔·贝努里对这个问题的解答最为著名，发表在他 1738 年的论文里，效用的概念也就是丹尼尔·贝努里在解释圣彼得堡赌博悖论的时候所提出的，其中主要包括两条著名原理，这两条相关的原理至今仍是经济学中最基本的原理。

**原理 1.1.1（边际效用递减原理）** 个人对商品和财富所追求的满足程度由其相对于他的主观价值——效用值来衡量，商品和财富的效用值随着其绝对数量（或者货币单位量）的增加而增加，但其增加的速率却逐渐递减。

如果用  $x$  来代表一件商品或者一定数额的货币值，这件商品或这笔钱对某个人所产生的满足程度或者说它对于这个人的主观价值就称为  $x$  的效用，完整的说是  $x$  相对于这个人的效用，记作  $u(x)$ 。边际效用递减原理包含两层含义，其一是说人对于财富和商品的占有是越多越好的，即  $u(x)$  是一个增函数，一阶导数  $u'(x) > 0$ ；其二是说随着财富或商品的不断增加，所获得的满足程度虽然也在增加但增加的速度却在不断下降，即  $u(x)$  是一个凹函数，二阶导数存在且  $u''(x) < 0$ 。效用函数曲线的一般形状如下图 1.1.1：

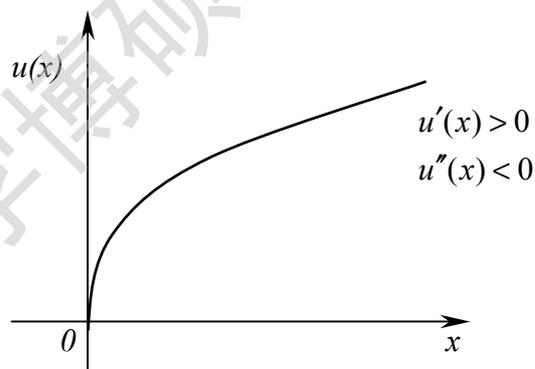


图 1.1.1：效用函数曲线图

Fig 1.1.1: The curve of utility function

**原理 1.1.2（最大期望效用原理）** 在具有风险和不确定条件下，个人决策的目的是为了获得最大期望效用值。

二次世界大战后，数学家、电脑的创始人冯·诺伊曼和经济学家摩根斯顿合写了一本书：《博弈论与经济行为》<sup>[17]</sup>，第一次提出了确定效用函数的

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to [etd@xmu.edu.cn](mailto:etd@xmu.edu.cn) for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库