学校编码：10384　　分类号 ______ 密级 ______
学号：200423023　　UDC __________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

二次特征值逆问题的模型修正方法

Model Updating Method for Inverse Quadratic Eigenvalue Problems

吴　敏　丽

指导教师姓名：卢 琳 璋 教授

专 业 名 称：计算数学

论文提交日期：2007 年 5 月

论文答辩日期：2007 年 6 月

学位授予日期：2007 年 6 月

答辩委员会主席：__________

评　阅　人：__________

2007 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目　　录

Content

摘 要

有限元模型修正指的是关于动力系统模型的设计、构造和修正．在上个世纪九十年代有限元模型修正开始成为一门有意义的学科．目前，有限元分析技术在工程技术领域中应用很广，发展迅速。模型修正的目的是用实测数据校正不精确的分析模型，而这些数据像固有的频率、阻尼比和振型等，一般是通过振动测试得到的。根据实际测量得到的频率 (即特征值 $\lambda_1,...,\lambda_k$) 和相应的振型 (即特征向量 $X_1,...,X_k$) 修正模型分析得到的近似质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，这是本文要讨论的有限元模型修正问题，也就是求二次特征值逆问题最佳逼近解的问题。根据修正对象的不同，模型修正方法有很多种，本文主要介绍两种类型的修正方法：一种是基于最优化理论的方法，利用了经典的对偶理论；另一种是参考基方法，以质量矩阵为参考基准，通过目标函数最小化来进行模型修正。

本文回顾总结了中外许多学者在有限元模型修正方面所做的工作，给出了二次特征值逆问题的一种解法，并提出了一种新的模型修正方法。

本文内容分为以下五个部分：第一章为引言，讲解了二次特征值逆问题和有限元模型修正问题的背景以及具体的数学描述。第二章主要构造了二次特征值逆问题的解。第三章介绍了基于最优化理论的模型修正方法。第四章利用了参考基方法，以质量矩阵为参考基准，同时修正阻尼矩阵和刚度矩阵，提出了一种新的模型修正方法。第五章为数值实验。

关键词： 二次特征值；二次特征值逆问题；有限元模型修正

Abstract

Finite Element Model Updating has emerged in the 1990's as a significant subject to the design, construction and maintenance of mechanical systems. Currently, finite element analysis techniques in the field of engineering technology used widely to develop rapidly. Model updating, at its ambitions, is used to correct inaccurate analytical models by measured data, such as natural frequencies, damping ratios and model shapes, which can usually be obtained by vibration test. Updating the analytical mass, damping and stiffness matrices by measured frenquencies (eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$) and model shapes (eigenvectors $X_1, \ldots, X_k$) is the finite element model updating problem, which we will discuss in this paper. That is also the problem about finding the best closest solution for the inverse quadratic eigenvalue problem. According to updating different object, there are many model updating methods. We will mainly introduce two types of updating methods: One is based on the optimization theory, has used classics dual theory; Another is a reference based method, using mass matrix as a reference basic and through minimization of the objective function for updating model.

In this paper, we look back many scholars' works in this area and give a method for the inverse quadratic eigenvalue problems. We also develop a new method for the model updating problems.

This paper includes five chapters. Chapter 1 gives us an introduction of the background and content about the inverse quadratic eigenvalue problems and the finite element model updating problems. In chapter 2, we mainly constructe the solution for the inverse quadratic eigenvalue problems. Chapter 3 introduce the model updating method basic on optimization theory. In chapter 4, we introduce the model updating method by updating the damping and stiffness matrices simultaneously. Numerical experiments are given in the last chapter.

Keywords: Quadratic Eigenvalue Problem; Inverse Quadratic Eigenvalue Problem; Finite Element Model Updating.

符 号 说 明

以下是本文中会遇到的一些记号：

$x \in R^n$ ：表示向量 x 是 n 维实的列向量。

$A \in R^{n\times m}$ ：表示矩阵 A 是 $n \times m$ 的实矩阵。

$A \succeq 0$ ：表示矩阵 A 是实对称半正定矩阵。

$A \succ 0$ ：表示矩阵 A 是实对称正定矩阵。

S^n: 表示所有 n 阶实对称矩阵集合。

S^n_+: 表示所有 n 阶实对称半正定矩阵集合。

$S^n_{\dagger}$: 表示所有 n 阶实对称正定矩阵的集合。

$\Omega_0 := S^n \times S^n \times S^n$.

$\Omega := \{(M, C, K) \in \Omega_0 : M \succeq 0, K \succeq 0\}$.

$\|A\|_F$: 表示矩阵 A 的 Frobenius 范数， $\|A\|_F = (trA^TA)^{\frac{1}{2}}$.

$\langle A, B\rangle$: 表示矩阵 A 与 B 的内积， $\langle A, B\rangle = tr(B^TA)$ ，其中 $A, B \in R^{n\times m}$.

$\Pi_\Omega(A)$: Π 是投影算子， $\Omega \subseteq \Omega_0$ ， $A \in \Omega_0$ ， $\Pi_\Omega(A)$ 表示 A 在 Ω 上的投影，

即 $\| A - \Pi_\Omega(A) \|_F = \min\limits_{X\in\Omega} \| A - X \|_F$.

第一章 引言

§1.1 问题背景

有限元模型修正是一门正在兴起的学科，近几十年来，人们渐渐发现它在很多科学领域中发挥了越来越重要的作用，特别在结构动力学、工程技术、信号处理和电子震荡等领域，它是关于动力系统的设计、构造和修正 [13,24] 。在工程技术领域里，要解决工程中普遍存在的振动问题，首先就必须建立结构的动力学模型。一般的建模方法有理论建模和实验建模两种，而理论建模工程上常用有限元方法。

目前，有限元分析技术应用广泛，发展迅速且日益成熟。这种方法用离散化的思想，将连续系统结构转化为节点上的离散结构。由于实际问题的结构复杂，有限元方法就必须对一些条件进行简化处理，这就使得有限元模型计算结果与实验结果之间存在着误差。另一方面，由于实验模态分析技术的发展，人们通过模态试验已能获得一些结构低阶、不完全的模态信息参数，如何利用这些实测的模态信息修正初始动力学模型，使其能更准确地模拟实际结构，这就是有限元模型修正所要研究的问题。通过模型修正，缩小有限元模型与实测模型之间的误差，改善有限元模型。

在很多动力系统模型，尤其是弹性结构动力系统模型修正技术领域往往会遇到二次特征值逆问题，因此很多数学研究者和工程技术人员开始关注和研究二次特征值逆问题 [7,20,29,36,37,39] 。由于不同的动力系统对质量矩阵，阻尼矩阵和刚度矩阵的结构有各种各样的要求，因此二次特征值逆问题的提法有很多种，不过前提都是要满足谱约束。虽然二次特征值逆问题基本上已经解决，但是要求二次特征值逆问题的最佳逼近解，这就涉及到求解有条件约束的最优化问题，即有限元模型修正问题。

§1.2 二次特征值逆问题

在研究弹性结构动力学问题时，特别是用有限元方法或其他方法，将结构系统离散化，最后可以归结为一个由二阶线性常微分方程所描述的系统

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0, \tag{1.1}$$

其中 $M, C, K \in R^{n\times n}$ 分别称为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵， $u \in R^n$ 为 n 维列向量， $\ddot{u}, \dot{u}$ 的分量分别为 u 的对应分量对时间 t 的二阶和一阶导数。

令方程的齐次解为 $u = Xe^{\lambda t}$ ，得

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)X = 0. \tag{1.2}$$

该系统的稳定性往往转化为如下的二次特征值问题 (QEP)：

给定 $M, C, K \in R^{n\times n}$ ，求数 λ 和非零向量 X ，使得

$$Q(\lambda)X = 0, \tag{1.3}$$

其中 $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ 称为二次束，数 λ 和非零向量 X 分别称为二次束的特征值和特征向量。

所谓的二次特征值逆问题 (IQEP) 是与 QEP 相反的问题. 从数学意义上来讲就是给定二次特征值问题的部分或者全部信息去确定或估计矩阵 M,C,K . 从工程意义上讲就是从系统表现出的行为去反演或识别系统的物理参数。

下面我们给定 k 个特征值和相应的特征向量分别为

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l, \lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_k,$$

$$X_{1R} \pm iX_{1I}, \ldots, X_{lR} \pm iX_{lI}, X_{2l+1}, \ldots, X_k.$$

我们把 k 个特征值改写成如下形式

$$\Lambda = diag\{\lambda_1^{[2]}, \lambda_2^{[2]}, \ldots, \lambda_l^{[2]}, \lambda_{2l+1}, \ldots, \lambda_k\}, \tag{1.4}$$

其中

$$\lambda_j^{[2]} = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}, \quad \beta_j \neq 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

相应的特征矩阵记为 X ，如下

$$X = \{X_{1R}, X_{1I}, \ldots, X_{lR}, X_{lI}, X_{2l+1}, \ldots, X_k\}. \tag{1.5}$$

具体的 IQEP 表述如下：

给定部分特征对 $(\Lambda, X) \in R^{k\times k} \times R^{n\times k}$（如 (1.4),(1.5) 所示），求 $M, C, K \in R^{n\times n}$ ，使得

$$MX\Lambda^2 + CX\Lambda + KX = 0, \tag{1.6}$$

$$M \succ 0,\ C^T = C,\ K \succeq 0.$$

在工程技术，特别是结构动力模型修正技术领域经常会遇到上述 IQEP 。有许多学者用不同的方法解决了各种类型的 IQEP[7,20,29,36,37,39] 。

§1.3 有限元模型修正问题

用有限元方法或统计方法进行结构动力学分析,可以得到近似的质量矩阵 M_a 、阻尼矩阵 C_a 和刚度矩阵 K_a 。由于离散化过程必须对结构部件之间的连接条件和边界条件作力学上的简化，因此利用有限元分析技术建立的结构有限元模型往往不能准确地反映实际结构的全部情况。另一方面，运用实测技术可测得结构的低阶频率（即特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ）和相应的振型（即特征向量 $X_1, \ldots, X_k$ ）。

一般地,由于有限元方法的计算结果与实测结果之间存在误差,二次束 $Q_a(\lambda) = \lambda^2 M_a + \lambda C_a + K_a$ 的特征值和特征向量跟实际的频率和振型肯定也存在着一定的误差。模型修正技术是利用实测模态数据对质量矩阵 M_a 、阻尼矩阵 C_a 和刚度矩阵 K_a 进行修正，使修正后的质量矩阵 M 、阻尼矩阵 C 和刚度矩阵 K 满足谱约束条件

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)X_i = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.7}$$

Baruch/Bar-Itzak[3,4] 、 Bermann/Nagy[5,6] 和 Wei[32,33,34] 利用实测数据从不同方面考虑了无阻尼结构系统 $(i.e.\ C = C_a)$ 。Datta/Elhay/Ram [9, 10, 11] 主要从事于二次控制模型的反馈设计问题，为研究二次特征值逆问题以及模型修正问题提供了很好的基础。

一般的模型修正问题可表述如下：
给定 $M_a, C_a, K_a \in S^n$ ，以及部分特征对 $(\Lambda, X) \in R^{k\times k} \times R^{n\times k}$（如 (1.4),(1.5) 式所示），求 $M, C, K \in R^{n\times n}$ ，使得

$$\begin{aligned} &min\ \ \frac{c_1}{2} \parallel M - M_a \parallel_F^2 + \frac{c_2}{2} \parallel C - C_a \parallel_F^2 + \frac{1}{2} \parallel K - K_a \parallel_F^2 \\ &s.t.\ MX\Lambda^2 + CX\Lambda + KX = 0, \\ &M \succ 0,\ C^T = C,\ K \succeq 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

这里的 c_1, c_2 为两个正的参数。

这是一个有多个条件约束的最优化问题，我们要同时修正质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，其真正的难点是质量矩阵必须是对称正定的。文献 [2] 有效的解决了该模型的修正问题，但是方法比较复杂，涉及到对偶理论和广义的牛顿方法，算法花费的时间也比较多。

不同类型的动力系统对质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵有不同的要求，因此具体的模型修正问题有很多种提法。文献 [37] 讨论了构造二次特征值逆问题的中心斜对称解的问题，并解决了中心斜对称的动力模型修正问题。 Baruch[3,4] 研究的是无阻尼结构系统，他提出了参考基方法 (reference basic methods)，其基本思想是：以一个参数作为不可改变的参考基准。这个基准可以是质量、刚度或测试模态振型，然后通过目标函数的最小化来进行模型修正。文献 [3] 是用 $\min\{\frac{1}{2} \parallel M_a^{\frac{1}{2}}(K - K_a)M_a^{\frac{1}{2}} \parallel\}$ 来修正刚度矩阵，其中 M_a 是分析质量矩阵， K_a 是分析刚度矩阵。

对于阻尼结构动力系统，如果以质量作为不变的参考基准，那么我们就可以直接修正阻尼矩阵和刚度矩阵 [13,21] 。即假定分析质量矩阵 M_a 是准确的，直接取 $M = M_a$ ，此时只需要使罚函数 J 最小

$$\begin{aligned} &J = \frac{1}{2} \parallel N^{-1}(K - K_a)N^{-1} \parallel_F^2 + \frac{1}{2}\mu \parallel N^{-1}(C - C_a)N^{-1} \parallel_F^2, \\ &s.t.\ M_aX\Lambda^2 + CX\Lambda + KX = 0, \\ &C^T = C,\ K^T = K. \end{aligned} \tag{1.9}$$

其中 $N = M_a^{\frac{1}{2}}$，μ 是权重参数。

考虑到分析质量矩阵 M_a 并不一定能达到正定的要求，我们有必要先对质量矩阵作适当的修正，再利用罚函数最小化同时修正阻尼矩阵和刚度矩阵。本文在文献 [21] 的基础上导出了一种新的模型修正方法。

本文的其它内容安排如下：第二章解二次特征值逆问题。第三章最优化理论在模型修正中的运用，解决了一般的模型修正问题。第四章介绍了同时修正阻尼矩阵和刚度矩阵的模型修正方法，提出了一种新的模型修正方法。第五章为数值实验。

第二章 解二次特征值逆问题

这一章我们要求解第一章提到的 IQEP(1.6)，文献 [20] 是直接对 IQEP 进行求解，为了保证刚度矩阵 K 半正定，给出的一般解在选取质量矩阵 M 的时候要使其中的元素满足多个约束条件，并不能给出显示的表达式，运用起来比较不方便。下面我们给出一种比较简单的方法，构造出 IQEP 的解。根据给定的谱信息 $(\Lambda, X) \in R^{k\times k} \times R^{n\times k}$（如 (1.4),(1.5) 式所示），我们可以求出 IQEP 的一般解，显然该问题的解是不唯一的。

先对 X 作 QR 分解

$$X = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 $Q \in R^{n\times n}$ 是正交矩阵， $R \in R^{k\times k}$ 是非奇异的。

把 (2.1) 式代入以下方程

$$MX\Lambda^2 + CX\Lambda + KX = 0. \tag{2.2}$$

并在方程两边同乘以 Q^T，得

$$Q^T MQ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda^2 + Q^T CQ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda + Q^T KQ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

我们容易构造出方程的一个特解，如下

$$M_0 = Q \begin{bmatrix} (RR^T)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q^T, \tag{2.4}$$

$$C_0 = Q \begin{bmatrix} -R^{-T}(\Lambda + \Lambda^T)R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T, \tag{2.5}$$

$$K_0 = Q \begin{bmatrix} R^{-T}\Lambda^T\Lambda R^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q^T. \tag{2.6}$$

值得注意的是：IQEP 中的质量矩阵 $M \succ 0$ 的条件可以由 $M \succeq 0$ 来代替。我们记 $\Omega := \{(M,C,K) \in \Omega_0 : M \succeq 0, K \succeq 0\}$，其中 $\Omega_0 := S^n \times S^n \times S^n$. 实际上，如果 $(\vec{M},\vec{C},\vec{K}) \in \Omega$ 是方程 (2.2) 的解，那么对于任意的 $\alpha > 0$，

$$(\vec{M}+\alpha M_0, \vec{C}+\alpha C_0, \vec{K}+\alpha K_0)$$

是 IQEP 的解。

下面我们来求方程 (2.2) 的解 $(\vec{M},\vec{C},\vec{K})$，并且 $(\vec{M},\vec{C},\vec{K}) \in \Omega$.

记 $Y := [X^T,\ \Lambda^T X^T] \in R^{k\times 2n}$， $N(Y)$ 表示矩阵 Y 的零空间。由于 X 是列满秩的， $N(Y)$ 的维数为 $2n-k$ 。设 $U,V \in R^{n\times(2n-k)}$，且

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \in R^{2n\times(2n-k)}$$

的所有列构成 $N(Y)$ 的一组基，即以下方程成立

$$[X^T, \Lambda^T X^T]\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

构造出方程 (2.2) 的解为

$$\vec{M} = VV^T, \tag{2.8}$$
$$\vec{C} = UV^T + VU^T, \tag{2.9}$$
$$\vec{K} = UU^T. \tag{2.10}$$

容易验证， $(\vec{M},\vec{C},\vec{K}) \in \Omega$ 是方程 (2.2) 的解。

定理 2.1 给定任意 k 个特征对 $(\Lambda, X) \in R^{k\times k} \times R^{n\times k}$ (如 (1.4),(1.5) 式所示)，设 U,V 是方程 (2.7) 的一个解，α 为任意正数，(M_0, C_0, K_0) (如 (2.4),(2.5),(2.6) 式所示) 是 IQEP 的一个特解，那么 IQEP 的一般解为

$$M = VV^T + \alpha M_0, \tag{2.11}$$
$$C = UV^T + VU^T + \alpha C_0, \tag{2.12}$$
$$K = UU^T + \alpha K_0. \tag{2.13}$$