学校编号：10384 分类号________密级_______
学 号：200223020 UDC________________________

厦 门 大 学
硕 士 学 位 论 文

具有不连续对流系数的奇异摄动问题的**Petrov-Galerkin** 格式和数值分析

Petrov-Galerkin Schemes and Numerical Analysis for Singularly Perturbed Problems with Discontinuous Convection Coefficients

赵 辉

指导教师姓名：刘发旺教授，博导
申请学位级别：硕 士
专 业 名 称：计 算 数 学
论文提交日期：2005 年 4 月
论文答辩时间：2005 年 5 月
学位授予日期：

答辩委员会主席:________
评 阅 人 :________

2005 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

摘 要

奇异摄动问题出现在自然科学和力学的很多领域，大多数奇异摄动问题主要考虑有一个边界层的现象. 奇异摄动问题的特性是小参数出现在微分方程的高阶导数项. 古典的差分方法依赖于摄动参数，不适合解奇异摄动问题. 对于带有不连续对流系数的奇异摄动问题，在不连续的数据附近有一个转向点，从而有一个内层. 对解中存在内层的奇异摄动微分方程问题, Shishkin 和 Riordan 在分段一致网格的基础上，构造了参数一致的数值方法. 但是，他们的结果还达不到一阶收敛. 在本文中，我们采用了计算有效的 Petrov-Galerkin 方法去考虑带有不连续对流系数的奇异摄动问题，我们的结果是一致收敛的.

本文共分四章，第一章给出了引言和记号；第二章介绍奇异摄动抛物偏微分方程的性质，提出一族与时间相关的 Petrov-Galerkin 格式，讨论这族 Petrov-Galerkin 格式的性质，并证明了这族格式是一致收敛的. 第三章叙述了奇异摄动常微分方程的性质，提出了计算有效的 Petrov-Galerkin 格式，讨论了 Petrov-Galerkin 格式的性质，同时证明了这种格式也是一致收敛的. 第四章给出两种情况下数值结果. 我们可以看到，数值结果是一致收敛的，这与我们的理论结果相一致. 最后，我们给出小结.

关键词：奇异摄动;　　Petrov-Galerkin 格式;　　一致收敛

Abstract

Singularly perturbed problems (SSP) arise in many fields of science and engineering. Most singularly perturbed problems concentrate on problems having only a boundary layer. The character of the SSP is that the small parameter appears in the higher derivative term of the differential equations. The classical differencing depends on the perturbed parameter, so we don't use it to solve the SSP. For these SSP with a discontinuous convection coefficients, there is a weak interior layer. Shishkin and Riordan constructed and analysed parameter-uniform numerical methods, based on piecewise-uniform meshes for a class of SSP, whose solutions exhibited interior layers. But, their numerical results aren't proven to be first-order uniformly convergent. In this paper , we use effective Petrov-Galerkin method to solve the singularly perturbed problems with discontinuous convection coefficients. Our result is proven to be uniformly convergent.

This paper is organized as follows: In Chapter 1, we give the introduction and the notations. In Chapter 2, we introduce the properties of the singularly perturbed parabolic partial differential equations, propose a class of time-dependent Petrov-Galerkin schemes , discuss the properties of the class of the Petrov-Galerkin schemes, and prove that the schemes are uniformly convergent. In Chapter 3, we describe the properties of the singularly perturbed ordinary differential equations, give an effective Petrov-Galerkin scheme, discuss the properties of the Petrov-Galerkin scheme, and prove that the scheme is uniformly convergent. In Chapter 4, we present the numerical results of two cases. It can be seen that the numerical results are uniformly convergent r which are in good agreement with the theoretical results. Finally, we give conclusions.

Keywords: singularly perturbed; Petrov-Galerkin schemes; uniform convergence

目 录

Contents

第一章 引言

在物理、力学和工程技术等实际问题中存在大量的含有小参数ε的微分方程问题. 这类问题的解除了与变量x有关外，还与小参数ε有关. 在这类问题中小参数有的包含在微分方程的低阶导数中(包括方程的右端)，有的包含在高阶导数中，还有包含在定解条件和所讨论区域的边界中. 由于包含小参数的形式不同，相应定解问题的解也具有不同的性质. 这类问题统称为摄动问题. 若摄动问题的解当摄动参数$\varepsilon \to 0$时，不存在关于变量x一致收敛的极限，则称摄动问题为奇异摄动问题[1]. 而奇异摄动问题的数值解法发展比较晚，其中有差分法和有限元法，而后者更晚一些，这是由于数值解这种类型问题有很大的难度. 虽然发展比较晚，但还是引起了应用数学、计算数学和力学工作者的广泛重视，发表了许多文章. Miller[2]、刘发旺[3–5]、Shishkin 教授对奇异摄动做了很多研究，也发表了很多文章，对奇异摄动问题的发展做了很大的贡献.

Miller, Riordan, Shishkin[2]主要介绍了在一维和二维的情况下，当解只有常规层时，奇异摄动线性问题的拟合方法和理论知识. 他们主张用适当的网格来解决数值问题. 然而，在解决问题时，选择什么样的拟合算子或构造什么样的拟合网格，都需要预先知道层的位置和宽度. 他们在书中指出有限差分算子的ε一致稳定性基本上都是用最大值原理来检验的，除了个例. 他们把问题的精确解分成光滑部分和奇异部分，分别对每个分量进行误差估计，然后得到精确解和数值解之间的误差估计.

Farrell, Hegarty, Miller, Riordan, Shishkin[6]构造数值方法解决有不光滑解的微分方程问题，解关于边界层有奇性. 这些问题出现在许多物理现象中，从数学的观点看，它们是奇异摄动的. 他们构造了强的层-分解法，来产

生对精确解的近似. 一个数值方法是层-分解的, 是指在解邻域的每一点上, 当摄动参数从有限值到任意小的值时, 它能产生数值解和它的导数. 这些数值解须满足不依赖于摄动参数的结点误差界. 通过大量的计算可以把数值解计算出来，且计算量也不依赖于摄动参数. 数值近似是强的, 是指如果通过保持初始问题的单调性, 数值近似能继承精确解的稳定性质. 对于线性对流扩散和非线性对流扩散问题, 他们构造了强的层-分解法. 所谓强的层-分解方法是指首先指定有限差分算子和网格，然后证明数值逼近是强的层-分解，也就是要找到参数一致的常数 p 和 C_p. 为了找到这样的常数, 他们用两种不同的逼近. 第一种逼近是理论的且应用到一族有限制的数学问题上. 然而, 在预估的收敛阶 p 通常很小和常数 C 几乎不考虑的情况下, 产生了弱的结果. 第二种逼近是实验的, 它应用到具体的有代表性的问题上, 对 p 和 C 产生了理想的估计. 注意到, 对大多数流体力学问题, 只有实验方法是可行的.

Farrell, Hegarty, Miller, Riordan, Shishkin[7]还考虑了带有奇异摄动参数 ε，且有一个源项在区域内的某一点不连续的奇异摄动扩散对流两点边界值方程. 他们把整个区间分成四个子区间, 在分段一致网格的基础上构造了一种关于 ε 一致收敛的数值方法. 这种数值方法还没达到一阶收敛. 通过数值结果验证了理论结果的正确性.

苏煜城、吴启光[1]指出若用通常的有限元法解奇异摄动问题，即在试探函数空间和试验函数空间中取相同的基函数, 若步长超过一定的限度, 有限元将出现振动, 只有大大缩小单元的大小才能得到所要的结果, 但由于工作量太大, 是不可能实现的. 因此通常的 Galerkin 方法也不适用于奇异摄动问题, 在此情况下必须求助于广义 Galerkin 方法.

1975 年以后出现了一系列用 Petrov-Galerkin 方法讨论对流占优的对流-扩散问题的研究工作, 其中大部分都在于有限元子空间的构造. 对于非奇异摄动问题在分段多项式组成的试探空间中, Galerkin 方法离散化可产生解

的几乎最佳逼近. 此外, 由于试验空间含有格林函数在网格点上的好的逼近, 因此 Galerkin 逼近产生“超收敛”的结果. 这些都是众所周知的事实, 但对奇异摄动问题来说, 情况就大不相同. 由于在微分方程的高阶导数项含有小参数 ε, 微分方程问题的解及其格林函数都含有狭窄的边界层, 分段多项式空间一般地不能对它们给出满意的逼近, 为了能改进解空间和试验空间的逼近性质, 分别对它们加上分段指数函数, 这些分段指数函数分别是给定的摄动算子及其共轭算子的边界层解的局部逼近. 结合具体的例子, 他们使用 Petrov-Galerkin 进行离散, 并给出了几个 Petrov-Galerkin 方法的误差阶.

在试验函数空间加上分段指数函数后, 用 Petrov-Glaerkin 方法解奇异摄动问题, 有限元法不但不会出现振动, 还能给出满意的逼近.

根据 Petrov-Galerkin 方法的这些优点，Liu 等 [8–11] 把 Petrov-Galerkin 方法和预估-校正方法结合起来去处理工业上的凝固或熔化等移动边界问题. 他们的计算结果与前人所做的结果是一致的, 但是他们的方法更简单一些, 对参数也没有限制. 相比而言, 这种方法更适合各种各样的移动边界问题.

在本文中, 我们也考虑用 Petrov-Galerkin 方法来近似带有不连续对流系数的奇异摄动微分方程. 其中, 我们考虑偏微分方程和常微分方程两种形式, 理论上是关于 ε 一致收敛的，实际例子的数值结果也验证了我们的理论结果是正确的.

本文轮廓如下：本文共分四章，第一章给出了引言和记号；第二章介绍奇异摄动抛物偏微分方程的性质，提出一族与时间相关的 Petrov-Galerkin 格式，讨论了这族 Petrov-Galerkin 格式的性质, 并证明了这族格式是一致收敛的. 第三章叙述了奇异摄动常微分方程的性质, 提出一种计算有效的 Petrov-Galerkin 格式, 讨论了这种 Petrov-Galerkin 格式的性质, 并证明了这种格式是一致收敛的. 第四章给出两种情况下的例子和数值结果, 验证了我们的理论结果是一致收敛的. 最后, 我们给出小结.

本文是在对 Stynes, Riordan, Shishkin 的文章进行研究分析的基础上发展起来的.

§1.1 本文的背景

Stynes, Riordan[12] 考虑了没有转向点的奇异摄动抛物扩散-对流问题. 在数据满足一定相容性的假设下，精确解和它的导数是有界的. 在 x 方向上，他们采用 Petrov-Galerkin 方法获得了指数拟合的差分格式; 在 t 方向上，他们采用了古典的有限差分格式. 在满足 Courant-Friedrichs-Lewy-type 条件的情况下，他们的方法是一致收敛的.

Riordan，Shishkin[13] 考虑了带有不连续系数的奇异摄动抛物方程. 对这样一种在解中存在内层的奇异摄动抛物微分方程，他们在分段一致网格的基础上，构造和分析了关于参数一致收敛的数值方法. 但他们的方法还达不到一阶收敛.

§1.2 一些定义和记号

在本文中，为了简单起见，我们把带有不连续对流系数的奇异摄动偏微分方程简称为偏微分方程，把带有不连续对流系数的奇异摄动常微分方程简称为常微分方程. 同时，我们也引入下面的定义和记号.

记号 1. $\overline{\Omega}=[0,1]$，$\Omega=(0,1)$，$\Omega^-=(0,d)$, $\Omega^+=(d,1)$ 其中 $0<d<1$.

$$\overline{G}=\overline{\Omega}\times[0,T], G=\Omega\times(0,T], G^-=\Omega^-\times(0,T], G^+=\Omega^+\times(0,T].$$

定义 1. 如果定义在 G 上的函数 $\omega(x,t)$ 在 G 上是 γ 阶 Holder 连续，$\gamma\in(0,1]$，当且仅当 $\omega\in C^0(G)$ 和 $\sup\limits_{(x_1,t_1)(x_2,t_2)}\dfrac{|\omega(x_1,t_1)-\omega(x_2,t_2)|}{(|x_1-x_2|^2+|t_1-t_2|)^{\gamma/2}}$ 是有限的，记作 $\omega\in C^\gamma(G)$.

对每个整数 $n\geq 0,\omega\in C^{n+\gamma}(G)$，如果 $\dfrac{\partial^{k+m}\omega}{\partial x^k\partial t^m}\in C^\gamma(G),0\leq k+2m\leq n$.

定义 2. 在偏微分方程中，分段常数 $\overline{a_1}(x,t_m)$, $\overline{a_2}(x,t_m)$, $m\in\{0,...,M\}$ 定义为：

$$\overline{a_1}(x,t_m)=a_{i-1,m},x\in[x_{i-1},x_i),\ i=1,...,\frac{N}{2},0\le x<d;$$

$$\overline{a_2}(x,t_m)=a_{i,m},x\in(x_{i-1},x_i],i=\frac{N}{2}+1,...,N,\ d<x\le 1.$$

在常微分方程中，分段常数 $\overline{a_1}(x),\overline{a_2}(x)$ 定义为：

$$\overline{a_1}(x)=a_{i-1},x\in[x_{i-1},x_i),i=1,...,\frac{N}{2},0\le x<d;$$

$$\overline{a_2}(x)=a_i,x\in(x_{i-1},x_i],i=\frac{N}{2}+1,...,N,d<x\le 1.$$

记号 2.

$$(0,d)^-=(0,d)\setminus\{x_1,...,x_{\frac{N}{2}-1}\},\ (d,1)^+=(d,1)\setminus\{x_{\frac{N}{2}+1},...,x_{N-1}\},I^-=\{i:1\le i\le\frac{N}{2}\},$$

$$I^+=\{i:\frac{N}{2}+1\le i\le N-1\},\ I=I^-\cup I^+,\overline{I}=\{i:0\le i\le N\},I^*=\{i:1\le i\le\frac{N}{2}-1\},$$

$$J=\{m:1\le m\le M\},\ J^0=\{m:0\le m\le M-1\},\ \overline{J}=\{m:0\le m\le M\},$$

$$\Omega_{MN}=\{(x_i,t_m):(i,m)\in I\times J\},\ \overline{\Omega}_{MN}=\{(x_i,t_m):(i,m)\in\overline{I}\times\overline{J}\},\Gamma=S_0^\Gamma\cup S_1^\Gamma\cup S_x^\Gamma,$$

$$S_0^\Gamma=\{(0,t_m):0\le m\le M\},\ S_1^\Gamma=\{(1,t_m):0\le m\le M\},S_x^\Gamma=\{(x_i,0):0\le i\le N\}.$$

记号 3. 在偏微分方程中：

$$(v,w)_m=\int_0^1 v(x,t_m)w(x,t_m)dx,m\in\overline{J}.$$

$$\begin{cases}\overline{B}_m(v,w)=(-\varepsilon v_x,w_x)_m+(-\overline{a_1}v_x,w)_m,\ x\in[0,d).\\ \overline{B}_m(v,w)=(-\varepsilon v_x,w_x)_m+(\overline{a_2}v_x,w)_m,\ \ x\in(d,1].\end{cases}$$

而在常微分方程中：

$$(v,w)=\int_0^1 v(x)w(x)dx.$$

$$\begin{cases}\overline{B}(v,w)=(-\varepsilon v_x,w_x)+(-\overline{a_1}v_x,w),x\in[0,d).\\ \overline{B}(v,w)=(-\varepsilon v_x,w_x)+(\overline{a_2}v_x,w),x\in(d,1].\end{cases}$$

记号 4. 在偏微分方程中，让

$r=u-U$ 在 $\overline{\Omega}_{MN}$.

有 $r_{i,j}=r(x_i,t_j)$ 对所有的 $(i,j)\in\overline{I}\times\overline{J}$，且让

$$\mathbf{r}_j=(r_{0,j},...,r_{N,j})^T, \text{对所有的 } j\in\overline{J}.$$

让

$$\mathbf{z}_j=(0,z_{1,j},...,z_{\frac{N}{2}-1,j},z_{\frac{N}{2},j},z_{\frac{N}{2}+1,j},...,z_{N-1,j},0)^T,\ j\in\overline{J}$$

和

$$\mathbf{O}(K^i)=(0,O(K^i),...,O(K^i),0)^T, i=1,2$$

都是 $(N+1)$ 维的列向量.

其中 u 是偏微分方程中的精确解，U 是偏微分方程中的数值解.

而在常微分方程中，让

$$r=u-U \text{ 在 } 0\le x\le 1 \text{ 上}.$$

有 $r_i=r(x_i), i\in\overline{I}$，且让

$$\mathbf{r}=(r_0,r_1,...,r_N)^T, \mathbf{z}=(0,z_1,...,z_{N-1},0)^T$$

都是 $(N+1)$ 维列向量.

其中 u 是常微分方程中的精确解，U 是常微分方程中的数值解.

注：常微分形式中的 u，U 不同于偏微分形式中的 u，U. 根据习惯记法，我们把 u 看作是精确解，U 看作是数值解.

记号 5.

在偏微分方程中，$z_{i,\ j},(i,j)\in I\times\overline{J}$ 是用来表示一个数量 Q 满足下列关系的一个一般项:

$$|Q|\le C\{g_{i,j}^{-1}h_l\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(d-x)/\varepsilon})\psi^i(x,t_j)dx$$
$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(d-x)/\varepsilon})dx\},(i,j)\in I^*\times\overline{J}.$$

$$|Q|\le C\{g_{i,j}^{-1}h_r\int_{x_{i-1}}^{x_i}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(x-d)/\varepsilon})\psi^i(x,t_j)dx$$

$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(x-d)/\varepsilon})dx\},(i,j)\in I^+\times\overline{J}.$$

$$|Q|\le C\{g_{\frac{N}{2},j}^{-1}h_l\int_{x_{\frac{N}{2}-1}}^{x_{\frac{N}{2}}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(d-x)/\varepsilon})\psi^{\frac{N}{2}}(x,t_j)dx$$

$$+g_{\frac{N}{2},j}^{-1}h_r\int_{x_{\frac{N}{2}}}^{x_{\frac{N}{2}+1}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(x-d)/\varepsilon})\psi^{\frac{N}{2}}dx\},(i,j)\in\{\frac{N}{2}\}\times\overline{J}.$$

对 $j=1,2$，$O(K^j)$ 用来表示一个数量 Q' 满足 $|Q'|\le CK^j$.

而在常微分方程中，$z_i, i\in I$ 是用来表示一个数量 Q 满足下列关系的一个一般项:

$$|Q|\le C\{g_i^{-1}h_l\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(d-x)/\varepsilon})\psi^i(x)dx$$

$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i}(1+\varepsilon^{-\alpha(d-x)/\varepsilon})dx\},i\in I^*.$$

$$|Q|\le C\{g_i^{-1}h_r\int_{x_{i-1}}^{x_i}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(x-d)/\varepsilon})\psi^i(x)dx$$

$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(1+\varepsilon^{-\alpha(x-d)/\varepsilon})dx\},i\in I^+.$$

$$|Q|\le C\{g_{\frac{N}{2}}^{-1}h_l\int_{x_{\frac{N}{2}-1}}^{x_{\frac{N}{2}}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(d-x)/\varepsilon})\psi^{\frac{N}{2}}(x)$$

$$+g_{\frac{N}{2}}^{-1}h_r\int_{x_{\frac{N}{2}}}^{x_{\frac{N}{2}+1}}(1+\varepsilon^{-1}e^{-\alpha(x-d)/\varepsilon})\psi^{\frac{N}{2}}(x)\},i=\frac{N}{2}.$$

§1.3 介绍带有不连续对流系数的奇异摄动偏微分方程

在本文中，我们考虑下面带有不连续对流系数的奇异摄动偏微分方程初、边值问题：

$$u\in C^{1+\gamma}(G)\bigcap C^{2+\gamma}(G^-\bigcup G^+)$$

$$L_\varepsilon u(x,t)=\varepsilon u_{xx}-a_1u_x-bu-cu_t(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in G^-, \tag{1.1}$$

$$L_\varepsilon u(x,t)=\varepsilon u_{xx}+a_2u_x-bu-cu_t(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in G^+, \tag{1.2}$$

$$u(0,t)=q_0(t),\ \ 0\le t\le T, \tag{1.3}$$

$$u(1,t)=q_1(t),\ 0\le t\le T, \tag{1.4}$$

$$u(x,0)=s(x),\ 0\le x\le 1, \tag{1.5}$$

其中 $0<\varepsilon\le 1$ 是一个参数，$a_1,a_2,b,c,f\in C^{4+\gamma}(G^-\bigcup G^+)$，$a_1$ 存在左极限，a_2 存在右极限，b,c,f 存在着左右极限，h,k,g,f 在角点(0,0), (1,0) 还有转向点 $(d,0)$ 处满足充分的相容性. a_1,a_2,b,c 也满足:

$$-a_1(x,t)<-\alpha<0,0<x<d;\quad a_2(x,t)>\alpha>0,d<x<1;b>b_0>0;c>c_0>0.$$

从上面我们可以看出，在 x 方向上的不连续数据 $x=d$ 附近，有一个内层. 在连续的区域 G^-,G^+ 内，为了近似连续数据，我们用 Petrov-Galerkin 方法进行差分离散，得到一个指数拟合的差分格式. 为了近似不连续的数据，我们借助于有限元采用了一种特殊的算子，用这种方式，我们成功地解决了不连续的数据. 值得注意的是，偏微分方程中的 $a_1,a_2,\alpha,b,b_0,d,f,u$ 不同于常微分方程中的 $a_1,a_2,\alpha,b,b_0,d,f,u$.

§1.4 介绍带有不连续对流系数的奇异摄动常微分方程

在本文中，我们考虑下面带有不连续对流系数的奇异摄动常微分方程边值问题:

$$u\in C^1(\Omega)\bigcap C^2(\Omega^-\bigcup\Omega^+)$$

$$L_\varepsilon u(x)=\varepsilon u_{xx}-a_1u_x-bu=f,\qquad x\in\Omega^- \tag{1.6}$$

$$L_\varepsilon u(x)=\varepsilon u_{xx}+a_2u_x-bu=f,\qquad x\in\Omega^+ \tag{1.7}$$

$$u(0)=u_0,\quad u(1)=u_1, \tag{1.8}$$

其中 $0<\varepsilon\le 1$ 是一个参数，$a_1,a_2,b,f\in C^4(\Omega^-\cup\Omega^+)$，$a_1$ 存在左极限，a_2 存在右极限，b,f 存在着左右极限，a_1,a_2,b 也满足:

$$-a_1(x)<-\alpha<0,0<x<d;a_2(x)>\alpha>0,d<x<1;b>b_0>0,$$

从上面我们可以看出，在不连续的点 d 附近有一个内层. 对于连续的区域 Ω^-,Ω^+ 和不连续的数据，我们采用类似于偏微分方程情况时的处理方式.

第二章 带有不连续对流系数的奇异摄动偏微分方程

§2.1 偏微分方程的性质

偏微分方程初、边值问题的解u被分解成两部分，常规部分v和奇异部分w，也就是是$u=v+w$. 其中v,w的定义与[13]中的类似.

引理 2.1. 当$0\le k+m\le 2, k,m\in\mathbb{N}$时，解$u$的常规部分$v$和奇异部分$w$满足下面的界限：

$$\left|\frac{\partial^{k+m}v}{\partial x^k\partial t^m}(x,t)\right|\le C,\quad 0\le k+m\le 2,$$

$$\left|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(x,t)\right|\le C\varepsilon^{-1},\quad (x,t)\in G^-\bigcup G^+,$$

$$|[v_\varepsilon](d,t)|,\quad |[(v_\varepsilon)_x](d,t)|,\quad |[(v_\varepsilon)_{xx}](d,t)|\le C,$$

$$\left|\frac{\partial^{k+m}w_\varepsilon}{\partial x^k\partial t^m}(x,t)\right|\le\begin{cases}C\varepsilon^{-k}e^{\frac{-(d-x)\alpha}{\varepsilon}}, & (x,t)\in G^-,\\ C\varepsilon^{-k}e^{\frac{-(x-d)\alpha}{\varepsilon}}, & (x,t)\in G^+,\end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial^3 w_\varepsilon}{\partial x^3}(x,t)\right|\le\begin{cases}C\varepsilon^{-3}e^{\frac{-(d-x)\alpha}{\varepsilon}}, & (x,t)\in G^-,\\ C\varepsilon^{-3}e^{\frac{-(x-d)\alpha}{\varepsilon}}, & (x,t)\in G^+,\end{cases}$$

其中C是一个不依赖于ε的参数.

证明： 类似与[13]中的证明过程.

引理 2.2. 当$k,m\in\mathbb{N}$， $0\le k+m\le 2$时， $D_x^kD_t^mu$存在且有

$$|D_x^kD_t^mu(x,t)|\le C(1+\varepsilon^{-k}e^{-\alpha(d-x)/\varepsilon}),(x,t)\in G^-,$$
$$|D_x^kD_t^mu(x,t)|\le C(1+\varepsilon^{-k}e^{-\alpha(x-d)/\varepsilon}),(x,t)\in G^+,$$

其中 C 是一个不依赖于ε的参数.

证明：我们可以根据引理 2.1 很容易的得出此结论.

§2.2 一族 Petrov-Galerkin 格式

对于带有不连续对流系数的奇异摄动偏微分方程初、边值问题，在 x 方向上采用如下的划分形式：在[0，d]上，我们考虑等距网格划分 $0=x_0<x_1<\ldots<x_{\frac{N}{2}}=d$；在[d，1]上，考虑等距划分 $d=x_{\frac{N}{2}}<x_{\frac{N}{2}+1}<\ldots<x_N=1$.

$h_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\ldots,N$. $h_i=h_l=2d/N$ ， $1\le i\le\frac{N}{2}$; $h_i=h_r=\frac{2(1-d)}{N}$ ， $\frac{N}{2}<i\le N$. $H=\max\{h_l,h_r\}$， $h=\min\{h_l,h_r\}$.

在 t 方向上，我们考虑等距的网格划分 $0=t_0<t_1<\ldots<t_M=T$，其中我们让 $K=t_m-t_{m-1}=\frac{T}{M}$， $m\in J$.

我们采用 Petrov-Galerkin 方法来生成我们所需要的指数拟合格式. 试验函数 $\psi^i(x,t_m), i\in I, m\in\overline{J}$ 定义如下：

$$\begin{cases}\varepsilon\psi^i_{xx}(x,t_m)+\overline{a_1}(x,t_m)\psi^i_x(x,t_m)=0, & x\in(0,d)^-,\\ \psi^i(x_j,t_m)=\delta_{i,j}, & j=0,\ldots,\frac{N}{2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varepsilon\psi^i_{xx}(x,t_m)-\overline{a_2}(x,t_m)\psi^i_x(x,t_m)=0, & x\in(d,1)^+,\\ \psi^i(x_j,t_m)=\delta_{i,j}, & j=\frac{N}{2},\ldots,N,\end{cases}$$

其中 $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker delta 函数. 从而得到 $g_{i,m}=(1,\psi^i)_m$ 对所有的 $i\in I, m\in\overline{J}$.

试探函数 $\phi^i(x), i\in\overline{I}$ 满足 $\phi^i(x_j)=\delta_{i,j}$.

我们根据差分的性质有下面的表达式：

$$(L_\varepsilon^{N,M}U,\psi^i)=(f,\psi^i)\quad i\in I,$$

其中 $(f,\psi^{\frac{N}{2}})=(f,\psi^{\frac{N}{2}})_-+(f,\psi^{\frac{N}{2}})_+\approx f_{\frac{N}{2}-1,m}(1,\psi^{\frac{N}{2}})_-+f_{\frac{N}{2}+1,m}(1,\psi^{\frac{N}{2}})_+$，