学校编码：10384　　　　分类号＿＿＿＿ 密级＿＿＿＿
学号：200423071　　　　UDC＿＿＿＿

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

具强非线性源的 p-Laplace 方程第二初边值问题

Non Newton Filtration Equation with a Nonlinear Boundary Condition

于　海　波

指导教师姓名： 赵 俊 宁 教 授

专 业 名 称： 基　础　数　学

论文提交日期： 2007 年 4 月

论文答辩日期： 2007 年　月

学位授予日期： 2007 年　月

答辩委员会主席： ＿＿＿＿＿＿

评　阅　人： ＿＿＿＿＿＿

2007 **年** 4 **月**

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　　）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

目 录

Contents

摘　要

本文研究了一类定义在具有光滑边界区域上的带有非线性源的 p-Laplace 方程

$$u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - \lambda u^q,$$

并且具有非线性边界条件

$$|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial \eta = u^m$$

的初值问题, 其中 $p \geq 2, m > 1$. 我们证明了: 若 $q+1 < mp/(p-1)$ 且 $mp-2p+2 > 0$, 或 $q+1 = mp/(p-1)$, $mp-2p+2 > 0$, 且 $\lambda < m$, 则初值适当大时，解在有限时间内爆破；若 $q+1 > mp/(p-1), q > m$ 或 $q+1 = mp/(p-1), q > m$ 且 $\lambda > m$, 问题的解整体存在且有界.

关键词：p-Laplace 发展方程；整体存在；爆破.

Abstract

In this work we analyze the existence of weak solutions that globally bound or blow-up in finite time for a Non Newton Filtration equation

$$u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - \lambda u^q$$

in a smooth domain Ω with nonlinear boundary condition

$$|\nabla u|^{p-2}\partial u/\partial\eta = u^m,$$

where $p \geq 2, m > 1$. Then, blow-up in finite time occurs if $q+1 < mp/(p-1)$ and $mp-2p+2 > 0$, or $q+1 = mp/(p-1)$, $mp-2p+2 > 0$, and $\lambda < m$; globally bound occurs if $q+1 > mp/(p-1), q > m$ or $q+1 = mp/(p-1), q > m$ and $\lambda > m$.

Keywords： p-Laplace equation, global existence, blow-up.

第一节 引言

非线性扩散方程作为一类重要的抛物方程,来源于自然界广泛存在的扩散现象.渗流理论,相变理论,生物化学以及生物群体动力学等领域都提出了这类方程,特别是渗流问题. 两百多年前 (1755) 欧拉推导了著名的欧拉方程,对流体运动给出了最基本的数学描述,开创了流体动力学的研究. 在物理上,人们根据流体本身的切应力与切应变换之间是否满足线性关系,将流体分为 Newton 流体和非 Newton 流体.

对于多孔介质中非 Newton 流体的运动,设 ρ 为流体的密度,压力为 P, V 为流体在空间每点 x 和时间 t 上的速度. 首先满足多孔状态方程

$$P = c\rho^{\gamma},$$

其次满足连续性方程

$$k\rho_t + \mathrm{div}(\rho V) = 0,$$

最后在湍流状态下满足方程

$$\rho V = -M|\nabla\Phi|^{p-2}\nabla\Phi,$$

这里系数 c, k, M 均为正的物理常数,指数 γ, 和 p 满足 $p \geq 2, \gamma > 0, \Phi = P^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$.联合以上方程可以得到

$$k\rho_t = Mc^{\frac{(p-1)(\gamma+1)}{\gamma}}\mathrm{div}(|\nabla\rho^{\gamma+1}|^{p-2}\nabla\rho^{\gamma+1}),$$

略去常数项即为非 Newton 多方渗流方程

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m),$$

其中 $m = \gamma + 1$.

而非 Newton 渗流方程

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

又称 p-Laplace 发展方程，描述的是一种单项渗流问题．假设有一种可压流体在均匀，各向同性的刚性多孔介质中流动．由质量守恒定律

$$\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0,$$

其中 θ 为介质的空隙率 (此时是常数)．当我们考虑非 Newton 流体 (例如拟塑性流体) 时，需要计及流量大小，分子与离子效应等诸多因素的影响，线性的 Darcy 定律不再成立，代替它的就是下列非线性关系

$$\rho V = -\lambda |\nabla P|^{\alpha-1} \nabla P,$$

其中 $\lambda > 0$ 和 $\alpha > 0$ 是某物理常数.

本文研究的就是如下具有强非线性源的非 Newton 渗流方程

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \lambda u^q, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) = Q_T, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = u^m, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) = S_T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中边界充分光滑的有界区域，$\partial/\partial\eta$ 是对单位外法向求导，$p \geq 2, m > 1, \lambda, q$ 是正的常数； $0 < u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

对于非 Newton 渗流方程的研究，在三十年前就已经开始 (见 [1]-[3])，近年来，随着对渗流方程研究的深入，这类方程的研究也得到迅速发展．关于解的唯一性、解的正则性、解的初始迹问题以及解的分界面的正则性等理论已日趋完善 (见 [4]-[8])．而拟线性方程 (即 p=2 时) 解的整体性和爆破性结果早已在一系列文章中有详尽的研究 (见 [9][10])．具有非线性边界条件的多孔介质方程弱解的局部存在性和爆破性结果也已经在 [11][12] 中得到.

本文的目的是研究弱解的整体有界性和爆破性关于参数 p, q, m, λ 之间的依赖关系．为此，需要构造合适的上解和下解，思想源自文献 [11] 和 [12].

第二节 主要结果

在本篇论文中，我们用以下弱解定义.

定义 2.1. 若 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, 且 $u_0 \geq 0$, 称 u 为 (1.1) 在 Q_T 上的弱解，若 u 满足

$$u \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$$

$$\int_{Q_T} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi - u\varphi_t + \lambda u^q \varphi\right) dxdt - \int_{S_T} u^m \varphi dSdt = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x$$

对任意检验函数 $\varphi \in L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,1}(0,T; L^1(\Omega))$, 其中 $\varphi(T) = 0$.

关于问题 (1.1), 我们证明如下结论.

定理 2.1. 若 $u_0 \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, 则 (1.1) 存在定义在 $[0, T(u_0)]$ 上的局部弱解，其中 $T(u_0)$ 只依赖于 u_0. 另外，如果 u, v 分别是 (1.1) 的弱上解和弱下解，若有 $\inf_{Q_T} |\nabla u| = C_0 > 0$ 或 $\inf_{Q_T} |\nabla v| = C_0 > 0$ 成立，那么在 Q_T 上就有 $u \geq v$, 其中 $0 < T < \min\{T(u_0), T(v_0)\}$.

下面的定理说明了解的整体性和爆破性对参数的依赖关系. 爆破是指存在时间 $0 < T < \infty$ 满足

$$\lim_{t \nearrow T} \sup \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty.$$

定理 2.2. 当 $p < m + 1$.

(a) 若 $q + 1 < mp/(p-1)$, 且初值充分大，则 (1.1) 存在解在有限时间爆破.

(b) 若 $q + 1 > mp/(p-1)$, $q > m$, 则对任意初值 $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, (1.1) 存在整体弱解.

(c) 若 $q+1=mp/(p-1)$, 解的爆破性依赖于 λ: 存在 $\lambda_0=m$, 当 $\lambda<\lambda_0$ 时，初值充分大时解是爆破的；当 $\lambda>\lambda_0$, $q>m$ 时，对任意初值 $u_0\in L^\infty(\Omega)$, *(1.1)* 存在整体弱解.

定理 2.3. 当 $p\geq m+1$.

(a) 若 $q+1<mp/(p-1)$ 和 $mp-2p+2>0$, 且初值充分大，则 *(1.1)* 存在解在有限时间爆破.

(b) 若 $q+1>mp/(p-1)$, $q>m$, 对任意初值 $u_0\in L^\infty(\Omega)$, *(1.1)* 存在整体弱解.

(c) 若 $q+1<mp/(p-1)$ 和 $mp-2p+2>0$, 存在 $\lambda_0=m$, 当 $\lambda<\lambda_0$, 且初值充分大时， *(1.1)* 存在解在有限时间爆破.

第三节 定理 2.1 的证明

§ 3.1 局部存在性

选择 $u_{0n} \in C^3(\Omega)$, 满足

$$\|u_{0n}\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 1, \tag{3.1}$$

$$\|u_{0n} - u_0\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad 当\ n \to \infty,$$

$$\|\nabla u_{0n}\|_{L^p(\Omega)} \le C\|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.2}$$

考虑逼近问题

$$(P_n)\begin{cases} (u_n)_t = \operatorname{div}\left((|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_n\right) - \lambda u_n^q + \frac{1}{n}, & (x,t) \in Q_T, \\ (|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_n}{\partial \eta} = u_n^m, & (x,t) \in S_T, \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

$$令\ g_j(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0, \\ u^m, & 0 < u < j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \\ j^m, & u \ge j, \end{cases}$$

g_j 关于 j 单调递增，并且在 S_T 上一致有 $g_j \to u^m$ 当 $j \to \infty$. 考虑初边值问题

$$(P_{nj}) = \begin{cases} (u_{nj})_t = \operatorname{div}\left((|\nabla u_{nj}|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_{nj}\right) - \lambda u_{nj}^q + \frac{1}{n}, & (x,t) \in Q_T, \\ (|\nabla u_{nj}|^2 + \frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u_{nj}}{\partial \eta} = g_j(u_{nj}), & (x,t) \in S_T, \\ u_{nj}(x,0) = u_{0n}(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

这里 u_{0n} 满足相容性条件. 根据一致抛物方程理论，(P_{nj}) 有古典解, 其解 $0 \le u_{nj} \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$(见 [13]).

引理 3.1. 若 u_{nj}, $u_{n,j+1}$ 分别是 (P_{nj}) 和 $(P_{n,j+1})$ 的解，则

$$u_{nj}(x,t) \le u_{n,j+1}(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

证明：记 $u=u_{nj}, v=u_{n,j+1}$. 用 $(u-v)_+$ 乘 $P_{nj}-P_{n,j+1}$ 的两端，得到

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_t}(u-v)_t(u-v)_+dxdt \\
= \; & -\sum_{i=1}^N\int_{Q_t}\left((|\nabla u|^2+\frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}D_iu-(|\nabla v|^2+\frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}D_iv\right) \\
& \times D_i(u-v)_+dxdt-\lambda\int_{Q_t}(u^q-v^q)(u-v)_+dxdt \\
& +\int_{S_t}(g_j(u)-g_{j+1}(v))(u-v)_+dSdt \\
= \; & -\sum_{i=1}^N\int_{Q_t}\int_0^1\frac{d}{ds}\left((|\nabla(su+(1-s)v)|^2+\frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}D_i(su+(1-s)v)\right)ds \\
& \times D_i(u-v)_+dxdt-\lambda\int_{Q_t}(u^q-v^q)(u-v)_+dxdt \\
& +\int_{S_t}\int_0^1\frac{d}{ds}g_j(su+(1-s)v)ds(u-v)_+dSdt \\
\le \; & -\sum_{i=1}^N\int_{Q_t}\int_0^1\left(|\nabla(su+(1-s)v)|^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}}ds|\nabla(u-v)_+|^2dxdt \\
& -(p-2)\sum_{i=1}^N\sum_{l=1}^N\int_{Q_t}\int_0^1\left(|\nabla(su+(1-s)v)|^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-4}{2}}D_i(su+(1-s)v) \\
& \times D_l(su+(1-s)v)dsD_l(u-v)D_i(u-v)_+dxdt \\
& +\int_{S_t}\int_0^1 g_j'(su+(1-s)v)(u-v)ds(u-v)_+dSdt \\
= \; & -\sum_{i=1}^N\sum_{l=1}^N\int_{Q_t}a^{il}D_i(u-v)_+D_l(u-v)_+dxdt+C\int_{S_t}(u-v)_+^2dSdt,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
a^{il} = & \, \delta_{il}\int_0^1\left(|\nabla(su+(1-s)v)|^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}}ds \\
& +(p-2)\int_0^1\left(|\nabla(su+(1-s)v)|^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-4}{2}}D_i(su+(1-s)v)D_l(su+(1-s)v)ds.
\end{aligned}$$

显然

$$\sum_{i=1}^N\sum_{l=1}^N a^{il}\xi_i\xi_l\ge\int_0^1\left(|\nabla(su+(1-s)v)|^2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}}ds|\xi|^2.$$

假设 $\bigcup\limits_{i=1}^{M} U_i$ 是 $\overline{\Omega}$ 的一个开覆盖，那么存在 $\eta_1 \in C_0^\infty(U_1), \cdots, \eta_M \in C_0^\infty(U_M)$, $0 \le \eta_i(x) \le 1, \sum_{i=1}^M \eta_i(x) = 1, \forall x \in \overline{\Omega}$. 不失一般性，可以假设 $\partial\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{M-1} U_i \cap \partial\Omega$, $U_i \cap \partial\Omega$ 是由 $F_i(x_1, \ldots, x_N) = 0 (i = 1, \cdots, M-1)$ 确定的. 记 $n_i = (F_{ix_1}/|\nabla F_i|, \cdots, F_{ix_N}/|\nabla F_i|)$. 根据 Guass-Green 定理，得到

$$\int_{\partial\Omega} (u-v)_+^2 ds = \sum_{i=1}^{M} \int_{\partial\Omega} (u-v)_+^2 \eta_i n_i \cdot n_i ds$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} \left((u-v)_+^2 \eta_i \frac{F_{ix_k}}{|\nabla F_i|} \right) dx = 2 \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega (u-v)_+ \frac{\partial}{\partial x_k} (u-v)_+ \eta_i \frac{F_{ix_k}}{|\nabla F_i|} dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega (u-v)_+^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta_i \frac{F_{ix_k}}{|\nabla F_i|} \right) dx \le 2 \int_\Omega (u-v)_+ |\nabla (u-v)_+| dx + C \int_\Omega (u-v)_+^2 dx$$

$$\le C(\varepsilon) \int_\Omega (u-v)_+^2 dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla (u-v)_+|^2 dx. \tag{3.4}$$

对任意固定的 $n \in \mathbb{N}$, 由 (3.3),(3.4), 有

$$\int_\Omega (u(t) - v(t))_+^2 dx \le C \int_0^t \int_\Omega (u(\tau) - v(\tau))_+^2 dx d\tau,$$

利用 Gronwall 引理就得到

$$\int_\Omega (u(t) - v(t))_+^2 dx = 0,$$

即

$$u(x,t) \le v(x,t) \qquad a.e. (x,t) \in \Omega \times [0, \infty).$$

□

存在常数 $R > 0$ 满足 $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \le R/2$. 固定 $j_0 > R$, 则存在时间 $T = T(R) > 0$, 满足

$$u_{n,j_0}(x,t) < R, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0, T). \tag{3.5}$$

注意到对任意固定 j_0, P_{n,j_0} 的解关于 $n \in \mathbb{N}$ 是一致连续的 (见 [14]). 由 g_j 的定义和引理 3.1, u_{n,j_0} 还是 (P_n) 和 (P_{nj}) 在 $\Omega \times (0,T)$ 上的解. 又由 (P_n) 解的唯一性, 可以得到

$$u_{n,j}(x,t) = u_{n,j_0}(x,t) = u_n(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T), \forall j > j_0, \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

只要 $j > j_0$. 利用 (3.5) 和 (3.6), 就得

$$\|u_n(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < R, \qquad \forall t \in [0,T], \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

下面是能量估计.

引理 3.2. 若 u_n 是 (P_n) 在 $\Omega \times [0,T]$ 上的解, 则存在不依赖与 n 的常数 C 满足

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \le C(\|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, R, T, \Omega),$$
$$\int_{Q_T} (u_n)_t^2 dxdt \le C(\|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, R, T, \Omega).$$

证明: 把 $(u_n)_t$ 乘到 (P_n) 两端积分, 利用 (3.1),(3.2) 和 (3.7), 有

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (u_n)_t^2 dxdt \\
&= -\int_{Q_T} \left(|\nabla u_n|^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n)_t dxdt \\
&+\frac{1}{m+1}\int_{\partial\Omega} u_n^{m+1} \big|_0^T \, dS - \frac{\lambda}{q+1}\int_\Omega u_n^{q+1} \big|_0^T \, dx + \frac{1}{n}\int_\Omega u_n \big|_0^T \, dx \\
&\le -\frac{1}{2}\int_{Q_T} \frac{d}{dt}\int_0^{|\nabla u_n|^2} (s+\frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}} dsdxdt + C(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, R, T, \Omega).
\end{aligned}$$

这样就得到了引理 3.2 的结论. □

根据引理 3.2, 存在 u_n 的子序列 u_{n_j} 和函数

$$u \in L^\infty(Q_T) \cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \quad u_t \in L^2(Q_T)$$

满足

$$u_{n_j} \to u \quad \text{a.e. } \Omega \times (0,T], \tag{3.8}$$

$$\nabla u_{n_j} \xrightarrow{\text{弱}} \nabla u \quad L^p(\Omega \times (0,T]), \tag{3.9}$$

$$(u_{n_j})_t \xrightarrow{\text{弱}} u_t \quad L^2(\Omega \times (0,T]). \tag{3.10}$$

利用 (3.8)-(3.10), 记 $\phi_k = \sum\limits_{i=1}^{M} \varphi \eta_i F_{ix_k}/|\nabla F_i|, (k=1,2,\cdots,N)$, 就有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^T\int_{\partial\Omega} u_n^m \varphi dSdt &= \lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k}(u_n^m\phi_k)dxdt \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\sum_{k=1}^N \frac{\partial u_n^m}{\partial x_k}\phi_k dxdt + \lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\sum_{k=1}^N u_n^m \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k}dxdt \\
&= \int_{Q_T}\sum_{k=1}^N \frac{\partial u^m}{\partial x_k}\phi_k dxdt + \int_{Q_T}\sum_{k=1}^N u^m \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k}dxdt \\
&= \int_{Q_T}\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k}(u^m\phi_k)dxdt \\
&= \int_0^T\int_{\partial\Omega} u^m\varphi dSdt.
\end{aligned}$$

这里 η_i, F_i 是在引理 3.1 证明中引入的函数. 显然对任意的检验函数 φ, u_n 满足

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T}\left((|\nabla u_n|^2+\frac{1}{n})^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_n\cdot\nabla\varphi - u_n\varphi_t + (\lambda u_n^q - \frac{1}{n})\varphi\right)dxdt - \int_{S_T} u_n^m\varphi dSdt \\
&= \int_\Omega u_{0n}(x)\varphi(x,0)dx,
\end{aligned}$$

令 $n = n_j \to \infty$, 则 u 满足等式

$$\int_{Q_T}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi - u\varphi_t + \lambda u^q\varphi\right)dxdt - \int_{S_T} u^m\varphi dSdt = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx.$$

即 u 就是 (1.1) 的一个解.