

学校编码：10384
学号：200123023

分类号_____ 密级
UDC

学 位 论 文

马尔可夫体制转换模型及其实证研究

Markov Switching Regime Models and Empirical Study

陈祥钟

指导教师姓名：黄荣坦 副教授

申请学位级别：硕士

专 业 名 称：概率统计

论文提交日期：2004 年 04 月

论文答辩时间：2004 年 06 月

学位授予单位：厦 门 大 学

学位授予日期：

答辩委员会主席：_____

评 阅 人：_____

2004 年 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人(签名)：

年 月 日

摘 要

资产定价理论表明预测收益与时变风险报酬、随机理性泡沫、学习机制呈现出非线性的结构，用于捕捉这种结构的一种灵活模型就是离散混合分布，它具有时变条件均值和条件方差，是尖峰厚尾的分布，详见 Timmermann(2000)。该类模型中应用最广泛的是 Hamilton (1989)提出的马尔可夫体制转换模型。Hamilton 模型及其推广成功地对大量的宏观经济数据、金融市场数据进行了分析，合理地考虑了体制变化，消除了伪高度波动持续性，成功地识别了重要的事件，得到较优的预测表现。本文将对体制转换 GARCH 模型做适当地改进及修正平滑概率算法，用以对上证综合指数和深圳成分指数进行实证分析，描述中国股票市场的体制变化、波动率持续性等特征。据笔者所知，国内尚无这方面研究方法介绍和实证应用。

本文主要的研究结果表明：(1)中国股市存在着明显的体制变化特征，高低波动体制显著相异；(2)体制持续性是波动率聚类的重要来源；引进转换体制之后，持续性系数显著降低，传统的单体制 ARCH 类模型存在伪度量波动率持续性问题；(3)利用平滑体制概率可以成功地识别出重要的政策性事件对波动率影响的具体时间，与实际情况相当吻合；(4)T+1 制度和涨跌停板制度对高低波动体制天数的影响最为显著，特别是后者实行之后中国股市基本上处于低波动体制。

关键词：马尔可夫体制转换 GARCH；波动率；持续性

Abstract

Asset-pricing Theory show that forecast returns,time-varying risk premium, stochastic bubbles, learning mechanism, etc., present nonlinear structure. A flexible method to capture it is to introduce discrete mixture of distributions, which has time-varying conditional mean and variance and leptokurtic unconditional distribution. And Markov-switching regime model proposed by Hamilton is popularly adopted. The model and its extensions successfully analysis many macroeconomic and financial data, take into account regime shifts reasonably, decrease pseud high volatility persistence and improve out-of-sample forecasts. This paper will propose empirically adjusted MS-GARCH and smoothed probability, and apply them to Shanghai Stock index and Shenzhen Constituent index to describe the characteristics of regime shifts and volatility persistence in China's stock market. As the author know, there are no such empirical studies in China to this day

The main results show (1) There exist obvious regime shifts in China's stock market and high- and low-volatility regimes are significantly different; (2) Regime persistence is an important source of volatility clustering and Introduction of switching regime will significantly decrease coefficient of persistence; (3) By means of smoothed regime probability, we can successfully identify important political event in China; (4) The system of T+1 and Limit up or down make strong impacts on high- or low-volatility regimes, especially after carrying out of the latter China's stock market basically stays in a low-volatility regime.

Key Words: MS-GARCH ; Volatility ; Persistence

目 录

摘要	II
引言	1
第一章 理论基础及文献综述	6
§ 1.1 体制转换均值模型	6
§ 1.2 ARCH 类模型	8
§ 1.3 体制转换与 GARCH 的联合模型	9
第二章 实证模型和检验	12
§ 2.1 体制转换模型的构造	12
§ 2.2 波动持续性分析	14
§ 2.3 参数检验	15
§ 2.4 诊断统计量的计算公式	15
§ 2.5 体制推断	16
§ 2.6 预测表现估值	17
第三章 实证结果及分析	19
§ 3.1 单体制常方差模型	20
§ 3.2 单体制 GARCH(1,1)模型	21
§ 3.3 体制转换常方差模型	21
§ 3.4 体制转换 GARCH 模型	23
§ 3.5 预测表现的比较	30
第四章 结论	32
附录	33
参考文献	36
致谢	39

Table of Contents

Abstract	II
Introduction	1
§ 1 Fundamentals and Summarization	6
§ 1.1 Regime-switching Mean Model	6
§ 1.2 ARCH-type Models	8
§ 1.3 Combination of Regime-switching and GARCH models..	9
§ 2 Empirical Models and Tests	12
§ 2.1 Construction of Regime-switching models	12
§ 2.2 Analysis of Volatility Persistence	14
§ 2.3 Hypothesis Testing	15
§ 2.4 Formulae of Diagnosis Statistics	15
§ 2.5 Regime Inference	16
§ 2.6 Valuation of Forecasting Performance	17
§ 3 Empirical Results and Analysis	19
§ 3.1 Single-regime Constant Variance Model	20
§ 3.2 Single-regime GARCH(1,1) Model	21
§ 3.3 Regime-switching Constant Variance Model	21
§ 3.4 Regime-switching GARCH Model	23
§ 3.5 Comparision of Forecasting Performance	30
§ 4 Conclusions	32
Appendix	33
References	36
Acknowledge	39

引言

金融市场的波动率是资产收益的条件方差，是风险的一种度量；波动率的预测在资产组合理论，特别是期权定价理论中起重要的作用，其准确的度量和良好的预测十分关键，因而波动率理论及其实证研究受到广大研究者的关注。从 Mandelbrot (1963) 和 Fama (1965) 的研究开始，研究者们普遍认识到了金融市场收益率具有尖峰厚尾分布这个事实，因此考虑时变波动率将会提高参数估计的效率和区间预测的精确度，构造合适的时变波动率模型来刻画金融市场收益率就成为热门的研究方向，为此就提出了一系列的模型，比如 ARCH 类模型、MACH 模型、CHARMA 模型、RCA 模型、SV 模型；其中 ARCH 类模型就因为其简单化、易于估计而引起广泛注意和使用，实证研究表明 ARCH 类模型能很好地刻画大部分金融市场资产收益率的“波动率聚类”和“尖峰厚尾”特征。

然而金融市场经常由于政策变化、股市泡沫和一些突发事件而起伏动荡，周期性地由高波动和低波动体制间，或者说在牛市和熊市间互相转换，而所有时期都采用单体制固定参数的 GARCH 模型，并不考虑体制间经常性的转换，这显然会低估高波动时期的波动率，高估低波动时期的波动。波动率的结构变化对衍生证券的定价和最优套期保值比率的构造有着重要的意义。比如说，波动率有由低至高的体制变化，而定价时仍假定一个固定的历史无条件波动率，那么期权价格就会被低估。另外，既然现货和期货价格差在波动率高的时期趋向于增长，交易者就会面临更大的风险，这就复杂化了最优保值比率问题。

MACH: Moving Average Conditional Heteroscedastic 滑动平均条件异方差; CHARMA: 条件异方差自回归滑动平均; RCA: Random Coefficient Autoregressive 随机系数自回归; SV: Stochastic Volatility 随机波动率。

中国股票市场是一个新兴的、制度不完善的市场，更受到制度和政策消息的影响，有着明显的周期性和阶段性特征。以往对波动体制的划分或过于主观，或虽客观却较为保守且割裂历史，比如钟蓉萨和顾岚(1999)根据交收制度和有无涨跌停板限价这两个主要的制度性因素，将中国股票市场的发展阶段分成三个。陈浪南等(2002)采用 ICSS 法则(迭代累计平方和法则, Indan&Tiao, 1994)，该法则较为保守，只能找出少数的结构变化点，而且不能解决下文要提到的高度持续性问题。而且将整个发展历史分割成几个阶段，在每个阶段内分别进行数据拟合，会割裂整个历史数据的动态行为，不能完整地解释过去；另外，采用在条件方差方程的常数项中加入虚拟变量的方法，若结构变化点过多，加入的虚拟变量过多，就需要估计许多参数，这会导致计算效率极大下降。无论用哪种方法，条件方差结构变化模型对未来波动率的预测效果都很差，无法用以进行金融决策。

实际当中引起股票价格波动变化的因素多且复杂，比如公司投资和金融决策的公布、监管制度和金融政策的变化、宏观经济政策的信息、未公布的内幕消息；所有这些信息都会影响证券市场，引起股票价格的波动，也就导致股票指数的结构变化。但实际当中很难识别所有与股价波动有关的信息的公告日期；即使可能，也很难决定哪些公开信息确能改变风险结构，然而有些信息并没有公开，却也能影响风险结构(比如内幕消息)。另一方面，难以确定公告日期(Announcement date)是否与真正的事件日期(Event date)相同，因为只有在有效市场当中这两个日期才会相同。实际当中可能存在信息泄露或投资者延迟反应，这两种情况下事件日期可能发

结构变化(Structural Change)模型只是以某时刻为断点，比如已知中断点为 t ， $t \leq t$ 时观测数据服从一个动态模型， $t > t$ 时服从另一动态模型。通常引入虚拟变量来表征。不妨参见 Perron(1989)对三种结构变化模型的设定和讨论。

生在公告日期之前或者之后。由此可见只有利用统计的方法才能有效地发现真正的波动率变化点。

波动率的其中一个重要研究方向是波动率持续性 (Volatility Persistence)，对于其定义，通常认为是当前的外部冲击对条件方差影响的长久和大小程度。对于标准的 GARCH(1,1) 过程：

$$h_t = \mathbf{w} + \mathbf{a}\mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{b}h_{t-1}$$

条件方差的向前 s 期最小均方误差预测服从一阶差分方程：

$$\hat{h}_{t+s|t} = \mathbf{w} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\hat{h}_{t+s-1|t} \quad \forall s > 1 \quad (0.1)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 是该一阶差分方程的衰减参数，也正是波动率持续性的度量（以下称 \mathbf{r} 为持续性系数）。

波动率影响价格的程度完全依赖于外部冲击对它的持续性，特别是在期权定价时，若期权到期日很长，一个短暂的冲击对期权价格的影响就比一个高度持续的冲击影响小。国内外利用单体制 ARCH 类模型对金融市场的股票或股指收益率、利率、汇率等数据作实证分析，皆发现持续性系数十分接近于 1，表明当前的外部冲击对未来条件方差的影响是不可忽略的和长久的，这必然导致动态模型在易变 (volatile) 时期过高地预测波动率。有鉴于此，Engle & Bollerslev (1986) 参照单位根过程的定义，提出 IGARCH (Integrated GARCH, 共积 GARCH) 过程来刻画这种性质。但 IGARCH 过程缺乏理论上的依据，尽管它的无条件方差是无穷大的，却是严平稳的和遍历的，而单位根过程都是发散的，详见 Nelson (1990)。

Lamoureux & Lastrapes (1990) 认为这种高度持续性是由条件方差方程

实际上，易证： $\partial h_{t+s|t} / \partial \mathbf{e}_t^2 = \mathbf{a}(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{s-1}$ 。当 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 1$ 时，有 $\partial h_{t+s|t} / \partial \mathbf{e}_t^2 = \mathbf{a}$ ($\forall s > 1$)，因此说对于 IGARCH 过程，当前的外部冲击对未来波动率有着恒久的和不可忽略的影响。

等价地说就是持续性系数 $\mathbf{r} = 1$ 时，GARCH 过程为 IGARCH

的误设定造成的；他们通过实证发现，当 GARCH 模型中未考虑到方差方程中常数项确定性的结构变化时，就会隐含过多的持续性，即结构变化被误认为“波动率聚类”时期；因此能更稳健地描述数据的是带结构变化的更一般化的 GARCH 模型。对于条件均值模型，Perron(1989)有相似的结论。他对标准的单位根检验提出了质疑，而扩展成带结构中中断的 ADF 检验，得出的实证检验结果认为大部分的宏观经济时间序列可以由一个带中断的趋势平稳过程来表征，而并非单位根过程；一般冲击都是暂时的，只有与 1929 年大萧条和 1973 年石油危机相关的异常冲击才对经济系统有持久的影响。Kim&Kon(1999)对国外多只股票和股指收益率、陈祥钟(2003)对上证综合指数收益率作实证分析表明，当在 GARCH 模型中考虑到利用统计方法检测到的无条件方差变化点之后，持续性系数将极大的降低。

然而，笔者认为以上采用的条件方差结构变化模型存在以下几个弊病：[1]它的变化点检测方法与估计方法分离，比如 Kim&Kon(1999)，结构变化的检测方法采用 Bayes 统计方法，而参数估计时却采用经典统计方法；[2]通常需要估计大量的参数，计算效率较低；[3]未考虑均值方程的参数变化和方差方程中其它参数的变化，灵活性不够；[4]只能用于解释过去，预测效果非常差。

将体制转换模型和 ARCH 类模型联合正好消除了以上这些不足之处：[1]它有着更灵活的结构，所有不同体制的对应系数皆不同，或者不同体制采用不同的(G)ARCH 结构，标准(G)ARCH 模型只是其中一个特例；[2]它可以产生比单体制(G)ARCH 过程更广泛的偏度、峰度和序列相关，

Lamoureux&Lastrapes(1990)也建议用 MS 模型处理由结构中断而导致的方差方程误识别问题。实际上结构变化模型也是体制转换模型的特例。当 $P_{21}=0$ ， $P_{12}>0$ 时，则由体制 1 进入体制 2 之后，就再也不能返回体制 1 了，即在体制 1 开始进入体制 2 那一刻起，数据原来的动态行为发生了中断

适用于刻画一些过度尖峰厚尾的数据。近年来一些实证表明,单体制 ARCH 类模型并不足以描述由结构变化引起的过度尖峰厚尾现象; [3] 结构变化点被看作是数据生成过程(data-generating process)内生的一个结构性事件,在参数估计的同时可以进行识别。

本文将对上证综合指数和深证成分指数分别用 MS-GARCH 模型拟合,通过模型的拟合优度、诊断检验及预测表现的比较,找出最合适的实证模型,对过去十年中国股市的波动率特征做出合理的解释。据笔者所知,国内至今尚无这方面的研究方法介绍和实证应用。本文各章的结构如下:第一章介绍马尔可夫转换模型类的理论来源、模型形式、估计算法,并对相关文献做一番综述,提出笔者的一些总结和看法。第二章提出笔者修正的实证模型和平滑算法,介绍本文诊断检验和预测表现比较的方法。第三章对上证综合指数和深证成分指数分别拟合一系列模型,包括单体制模型和体制转换模型,比较各种模型的估计结果和预测表现。第四章对本文的工作和结论做一番总结,并提出不足之处和进一步的研究方向。

第一章 理论基础及文献综述

§ 1.1 体制转换均值模型

许多宏观经济或金融时间序列的正常行为会发生偶然性中断，致使经济系统从一个体制转换到另一个体制，此类动态行为可能源于战争、经济危机、股市泡沫、政策变化等。当这种转换发生时，数据的分布特征也要改变。比如，宏观经济周期性地在扩张和紧缩间不断相互转换，这两个时期应该有不同的动态行为，需用不同的时间序列模型来刻画，等价地说经济时间序列有两个不同的体制。显然，如果在样本研究周期内存在结构变化，而仍利用固定参数的线性模型来建模将导致错误的统计推断。

假设 y_t 为某经济变量增长率，在扩张时期其动态行为服从如下形式：

$$y_t - \mathbf{m}_1 = \mathbf{f}(y_{t-1} - \mathbf{m}_1) + \mathbf{e}_t$$

而在经济紧缩时期，均值增长水平必然发生变化，采用另一形式来刻画其动态行为更适合：

$$y_t - \mathbf{m}_2 = \mathbf{f}(y_{t-1} - \mathbf{m}_2) + \mathbf{e}_t$$

我们可以将上述两式合并用统一的表达式来表示：

$$y_t - \mathbf{m}_{s_t} = \mathbf{f}(y_{t-1} - \mathbf{m}_{s_{t-1}}) + \mathbf{e}_t \quad S_t = 1 \text{ or } 2 \quad (1.1)$$

这就是 Hamilton(1989)提出的状态相依的马尔可夫体制转换

(Markov- Switching Regime 简记为 MSR)自回归模型，用以刻画宏观经济相依序列的结构变化，并描述其非对称的经济周期现象，它构造了一个复杂灵活的结构将由不同经济机制生成的数据结合进一个单一模型中。由于体制的转换不能视作完全可预见的、确定性事件，即研究人员并不确知结构变化发生的时间，所以假设体制之间的转换由不可观测的外生变量 S_t

本文中变量 S_t 皆指马氏链

来控制是合理的,通常指定该变量服从 K 状态的遍历且不可约齐次马尔可夫链,其转移概率如下:

$$P(S_t = j | S_{t-1} = i) = p_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, K \quad (1.2)$$

若用转移概率矩阵来表示则有:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{K1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{K2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{1K} & p_{2K} & \dots & p_{KK} \end{bmatrix}$$

MSR 过程是混合分布的推广,即使不含有自回归项且体制内为常方差,也能产生较大的自相关系数及厚尾分布。Hamilton (1989, 1990) 提出滤子算法和平滑算法,构造似然函数用以估计表征不同体制的参数及体制间转移概率;利用可观测数据构造事前概率和平滑概率,进行体制推断,即确定体制转换发生的时间。

MSR 模型同结构变化、门限、平滑转移模型(详见 Tong, 1990)一样是用来对带结构变化的非线性时间序列建模,但结构变化模型的变化点通常是指定的,门限和平滑转移模型的结构变化依赖于滞后解释变量,而正如前文所指出的结构变化的发生通常是外部因素造成的,因而采用 MSR 模型是较为合理的。另外,MSR 模型还有一优点就是,序列的变化点被看作是数据生成过程内生的结构事件,可在参数估计的同时对其进行推断。

Hamilton(1990)采用 MSR 四阶自回归模型对美国 GDP 增长率进行实证

参照后来文献的用词,Hamilton(1989)中的 filtered probability 是本文所定义的 ex ante probability。体制概率英汉对照及其定义如下(以下引用同):

ex ante regime probability(事前体制概率): $p_{ii} = P_{t-1}(S_t = i) = P(S_t = i | \mathbf{j}_{t-1})$

ex post(事后): $P_t(S_t) = P(S_t | \mathbf{j}_t)$, $t \geq t$ filtered(滤子): $P_t(S_t) = P(S_t | \mathbf{j}_t)$

smoothed(平滑): $P_T(S_t) = P(S_t | \mathbf{j}_T)$ 。上式中 \mathbf{j}_t 指可观测变量信息集

分析，成功地推断出与 NBER(美国国家经济研究局)的经济周期波峰和波谷十分相近的结果。之后 MSR 模型被广泛而成功地应用于各个实证领域的分析并加以推广：Engel&Hamilton (1990)对汇率数据进行实证分析；Cecchetti, Lam&Mark(1990)对股票收益均值回复现象建模 Diebold, Lee&Weinbach(1994)假设转移概率依赖于某一潜在的经济指标滞后，即允许时变的转移概率；Kim (1994)提出体制转换状态空间模型并改进平滑算法。

§ 1.2 ARCH 类模型

资产收益的波动率不仅是时变的，而且在同一段时间内会出现偏高或偏低，呈现“波动率聚类”和“尖峰厚尾”现象。为了刻画这两类现象，Engle(1982)提出了自回归条件异方差(ARCH)过程：

$$\mathbf{e}_t = \sqrt{h_t} u_t \quad (1.3)$$

$$h_t = \mathbf{w} + \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_{t-1}^2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}_{t-2}^2 + \cdots + \mathbf{a}_q \mathbf{e}_{t-q}^2 \quad (1.4)$$

通常约定 $\mathbf{v} > 0, 0 \leq \mathbf{a}_i < 1$ 且 $\sum \mathbf{a}_i \leq 1$ 使方差非负且为平稳过程。

由方程(1.4)可知扰动项 \mathbf{e}_t (即外部冲击)变化幅值越大，序列波动程度就越大；而且过去的外部冲击对未来波动的影响具有减缓作用，使波动会持续一段时间， q 正体现这个时间；因此 ARCH 过程能够刻画波动率聚类，且随机误差服从无条件厚尾分布。然而，在实证估计当中通常需要较大的 q ，估计效率必然会降低。为了弥补这一缺陷，Bollerslev(1986)将 ARCH 过程扩展至广义自回归条件异方差过程，其中 GARCH(p,q)形如：

$$h_t = \mathbf{w} + \mathbf{a}_1 \mathbf{e}_{t-1}^2 + \cdots + \mathbf{a}_q \mathbf{e}_{t-q}^2 + \mathbf{b}_1 h_{t-1} + \cdots + \mathbf{b}_p h_{t-p} \quad (1.5)$$

GARCH(p,q)过程允许了更长的记忆和更灵活的滞后结构，而只需估计少数参数，且能有效地排除收益率中过度的峰值。GARCH 模型由于其简单化、

大量实证表明 GARCH(1, 1)足够刻画大量的金融数据，国外实证可参见 Bollerslev, etc(1992)

易于估计及实证中对时变波动率的成功刻画而得到广泛的应用。

针对 ARCH 模型其它一些不足，众多学者又提出了许多变体。Engle, Lili en&Robins(1987) 考虑到风险与收益之间的跨时权衡关系而提出了 ARCH-M 模型；由于 IGARCH 过程缺乏理论依据及 GARCH 过程参数非负约束问题 Nelson(1991) 提出 EGARCH 模型，并考虑到正负冲击的非对称影响；Glosten, Jaganathan&Runkle(1993) 提出了 GJR-GARCH 模型以简洁的结构同样刻画了波动非对称性，揭示了导致波动非对称性的“杠杆效应”和“反馈效应”，在实证中受到广泛的应用；以上模型可统称为 ARCH 类模型，其模型构造及实证应用详见 Bollerslev, Chou&Kenneth(1992)、Bollerslev, Engle&Nelson(1994)。

§ 1.3 体制转换与 GARCH 的联合模型

为了解决传统 GARCH 模型的伪波动率持续性问题 and 波动率预测或高估或低估的缺陷，以及 MSR 自回归模型、单体制 ARCH 类模型不足以完全刻画金融数据的条件异方差性，一些学者将马尔可夫体制转换模型与 ARCH 类模型联合起来考虑，以消除上述结构变化模型和单体制模型的不足之处。Hamilton&Susmel(1994) 首先提出的 MS-ARCH(Markov-switching) 模型，用 ARCH 过程的规模因子变化来表征体制的变化，见模型(1)。Cai(1994) 参考 Lamoureux&Lastrapes (1990) 的发现，只考虑方差方程中常数项的体制转换，见模型(2)：

模型(1)

$$\begin{aligned} e_t &= \sqrt{g_{s_t}} \tilde{e}_t & \tilde{e}_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ h_t &= \mathbf{w} + \mathbf{a}_1 \tilde{e}_{t-1}^2 + \cdots + \mathbf{a}_q \tilde{e}_{t-q}^2 \end{aligned}$$

模型(2)

$$\begin{aligned} e_t &= \sqrt{h_t} u_t \\ h_t &= \mathbf{w}_{s_t} + \mathbf{a}_1 e_{t-1}^2 + \cdots + \mathbf{a}_q e_{t-q}^2 \end{aligned}$$

在每一体制内采用 ARCH，每一期的似然函数只依赖于最近 q 期的体制

历史，而若采用 GARCH，则将产生所谓的路径依赖(path dependence)问题。对于如下的 MS-GARCH 过程：

$$h_t = \mathbf{w}_{S_t} + \mathbf{a}_{S_t} \mathbf{e}_{t-1}^2 + \mathbf{b}_{S_t} h_{t-1}$$

由递归可得：

$$\begin{aligned} h_t &= \mathbf{w}_{S_t} + \mathbf{a}_{S_t} \mathbf{e}_{t-1}^2 + \mathbf{b}_{S_t} (\mathbf{w}_{S_{t-1}} + \mathbf{a}_{S_{t-1}} \mathbf{e}_{t-2}^2) + \mathbf{b}_{S_t} \mathbf{b}_{S_{t-1}} (\mathbf{w}_{S_{t-2}} + \mathbf{a}_{S_{t-2}} \mathbf{e}_{t-3}^2) + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{t-1} (\mathbf{v}_{S_{t-i}} + \mathbf{a}_{S_{t-i}} \mathbf{e}_{t-1-i}^2) \prod_{j=0}^{i-1} \mathbf{b}_{S_{t-j}} + h_0 \prod_{i=0}^{t-1} \mathbf{b}_{S_{t-i}} \end{aligned}$$

即实际上 h_t 应写成 $h_t(S_t, S_{t-1}, \dots, S_0)$ ，由此可见，每一期似然函数都将依赖于整个体制历史，则需对所有可能的体制路径进行累和，其计算量是极为庞大的，实际计算几乎不可能，因此 Hamilton & Susmel (1994) 和 Cai (1994) 都只是考虑了体制转换的 ARCH 模型。

为了避免路径依赖问题，Gray (1996) 注意到 \mathbf{e}_t 的条件分布是具有时变混合权数¹¹的混合正态分布，混合权数可用于计算 \mathbf{e}_t 的只基于可观测信息的条件方差，然后将模型 (3) 中的 h_{t-1} 代之以这个条件方差即可解决路径依赖问题：

$$\left\{ \begin{aligned} r_t &= \mathbf{m}_t + \sqrt{h_{it}} z_t & z_t &\sim N(0,1) & i &= 1 \text{ or } 2 \\ h_{it} &= \mathbf{w}_i + \mathbf{a}_i \tilde{\mathbf{e}}_{t-1}^2 + \mathbf{b}_i h_{t-1} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{t-1} &= r_{t-1} - E[r_{t-1} | \mathbf{j}_{t-2}] = r_{t-1} - [p_{1t-1} \mathbf{m}_{t-1} + p_{2t-1} \mathbf{m}_{2t-1}] \\ h_{t-1} &= \text{Var}(r_{t-1} | \mathbf{j}_{t-2}) = E(r_{t-1}^2 | \mathbf{j}_{t-2}) - [E(r_{t-1} | \mathbf{j}_{t-2})]^2 \\ &= P_{1t-1} (\mathbf{m}_{1t-1}^2 + h_{1t-1}) + P_{2t-1} (\mathbf{m}_{2t-1}^2 + h_{2t-1}) - [P_{1t-1} \mathbf{m}_{1t-1} + P_{2t-1} \mathbf{m}_{2t-1}]^2 \end{aligned} \right. \quad \text{模型(3)}$$

其中 \mathbf{j}_t 为可观测信息集。此模型中 h_t 只依赖于当前体制，故而不存在

就两体制问题而言，遍历所有的体制路径至少要计算 2^T (T 为样本量) 个概率；对于样本量为 50 的数据，其计算数量级就达 1032，对于目前的计算机都是不可能实现的，更不用说高频数据和三体制以上的问题

¹¹ 此处的时变混合权数(mixing weight)即指事前体制概率

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士学位论文摘要库