学校编码：10384 分类号_______ 密级______

学号：19020060153164 UDC______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

几类矩阵的逆特征值问题

Several Kinds of Matrix Inverse Eigenvalue Problem

吴春红

指导教师姓名: 卢 琳 璋 教授

专 业 名 称: 计 算 数 学

论文提交日期: 2009 年 5 月

论文答辩日期: 2009 年 6 月

学位授予日期: 年 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2009年5月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文(包括纸质版和电子版)，允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

中文摘要

矩阵逆特征值问题的研究领域非常广泛, 主要来自于离散的数学物理反问题、控制设计、系统参数识别、地震断层成像技术、主成分分析与勘测、遥感技术、天线讯号处理、地球物理、分子光谱、粒子物理、结构分析、电路理论、机械系统模拟等许多应用领域. 矩阵逆特征值问题的研究内容是: 对给定的特征值或特征对, 能否构造出所要求的特定类的矩阵及满足一定谱约束的最佳逼近.

本文主要讨论了几类矩阵的逆特征值问题. 全文共分为五章. 第一章介绍了矩阵逆特征值问题的来源、研究内容、发展现状、矩阵逆特征值问题的不同的提法以及本文的结构.

第二章讨论了一类具有特殊形式的矩阵A_n的两类逆特征值问题. 问题 I 是由A_n的顺序主子阵$A_j(j=1,2,\cdots,n)$的最小、最大特征值来构造矩阵A_n；问题II是由A_n的顺序主子阵$A_j(j=1,2,\cdots,n)$的所有特征值来构造矩阵A_n. 我们分别给出了两类问题有解的充分必要条件, 提供了相应的算法和数值例子, 并用数值结果表明我们的算法是很有效的.

第三章研究了两个参数的Jacobi矩阵逆特征值问题(IEP2p): 给定两对不同的实数$(\lambda_1,\ \mu_1)$, $(\lambda_2,\ \mu_2)$; 两非零实向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$; 对角阵$D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$, 求$n$阶Jacobi矩阵$A$, B, 使得$((\lambda_1,\mu_1),x)$, $((\lambda_2,\mu_2),y)$为广义特征问题

$$\begin{cases} Az=\lambda Dz, \\ Bz=\mu Dz, \end{cases}$$

的特征对, 且$D^{-1}A$, $D^{-1}B$可交换. 我们得到了IEP2p存在唯一解的充分必要条件, 并给出了相应的算法和数值例子.

第四章考虑的是一类逆奇异值问题. 给定非负实数$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$, 两非零实向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$, 求$m\times n$阶实矩阵A, 使得$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$为$A$的奇异值, 并且$x,y$分别为$A$的左右奇异向量. 我们基于Householder变换和矩阵秩1的修正的方法得到了问题的算法, 而且算法比较经济易于并行, 同时给出了相应地数值例子.

第五章讨论了次对角元是正数的为酉上Hessenberg矩阵H的逆特征值问题. 当$k<n$时, H的k阶顺序主子阵H_k不再是酉阵, 其特征值在单位圆的内

部, 修正H_k得到酉上Hessenberg矩阵$\tilde{H}_k$, 使得$\tilde{H}_k$的特征值位于单位圆上. 然后由$\tilde{H}_k(k=1,2,\cdots,n)$的最小、最大特征值来构造出唯一的$H$, 我们得到了问题有解的充分必要条件, 并通过数值例子加以说明.

关键词： 逆特征值问题；Jacobi矩阵；最大特征值；最小特征值；广义特征值；逆奇异值问题；酉Hessenberg矩阵

Abstract

The inverse eigenvalue problems (IEP) for matrices are studied in many fields, they arise in a remarkable variety of applications, the list includes dispersed mathematical physical inverse problem, control design, system parameter identification, seismic tomography, principal component analysis, exploration and remote sensing, antenna array processing, geophysics, molecular spectroscopy, particle physics, structural analysis, circuit theory, and mechanical system simulation. An inverse eigenvalue problem is concentrated on the following problem: given eigenvalue and eigenpairs, whether or not we can construct the specific matrix or the optimal approximation of a matrix under given spectral restriction.

In this paper, we mainly discuss several kinds of matrix inverse eigenvalue problems. This thesis comprises five chapters. In Chapter 1, we firstly give a brief review of the background of the inverse eigenvalue problem, then list different kinds of inverse eigenvalue problem, finally introduce the structure of this paper.

In Chapter 2, we discuss two inverse eigenvalue problems of a special kind of matrices A_n. Problem I is to construct A_n by the minimal and maximal eigenvalues of its all leading principal submatrices $A_j(j = 1, 2, \cdots, n)$. Problem II is to construct A_n by all eigenvalues of its all leading principal submatrices $A_j(j = 1, 2, \cdots, n)$. The necessary and sufficient conditions for the solvability of the two problems are derived, respectively, and results are constructive. We also give the corresponding numerical algorithms and examples, numerical results show good efficient of the algorithms.

In Chapter 3, we study the following inverse eigenvalue problem of two-parameter (IEP2p): given two pairs of distinct real number $(\lambda_1,\ \mu_1)$ and (λ_2, μ_2), two nonzero real vectors x, y, and a diagonal matrix $D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)(d_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$, find $n \times n$ Jacobi matrices A, B, such that $((\lambda_1, \mu_1), x)$ and $((\lambda_2, \mu_2), y)$ are the eigenpairs of the coupled generalized eigenvalue problem

$$\begin{cases} Az = \lambda Dz, \\ Bz = \mu Dz, \end{cases}$$

and $D^{-1}A$, $D^{-1}B$ are commutative. We propose the necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of IEP2p's solution. Furthermore, corresponding numerical algorithm and example are included.

In Chapter 4, we concern a kind of matrix inverse singular value problem. Given real nonnegative number $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, two nonzero real vectors $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$, find $m \times n$ real matrix A, such that $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$are the singular values of A, and x, y are the left and right singular vectors, respectively. Based on Householder transformation and rank-one updating, we propose a algorithm which is economical and easily to parallel to solve the inverse singular value problems. we also give the corresponding numerical example.

In Chapter 5, we consider the inverse eigenvalue of unitary upper Hessenberg matrix H whose subdiagonal elements are all positive. Let H_k be the k-th leading principal submatrix of H, H_k is not unitary for $k < n$, and it's eigenvalues are inside the unit circle, we introduce the modified unitary submatrices $\tilde{H}_k$, such that it's eigenvalues are on the unit circle. H is constructed uniquely if the minimal and maximal eigenvalues of $\tilde{H}_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ are known, $\tilde{H}_k$ is the modified submatrices of H. We give the necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of the solution. Numerical experiment is also presented to illustrate our results.

Key words: Inverse eigenvalue problem; Jacobi matrix; Minimal eigenvalue; Maximal eigenvalue; Generalized eigenvalue problem; Inverse Singular value problem; Unitary Hessenberg

目　录

Contents

本文的记号

- $\mathbb{R}$：实数集合；
- $\mathbb{C}$：复数集合；
- $\mathbb{R}^{n\times m}$：$n\times m$阶实矩阵集合；
- $\mathbb{C}^{n\times m}$：$n\times m$阶复矩阵集合；
- I_n：n 阶单位阵；
- e_j：在有意义的前提下为任意阶单位阵的第j列；
- A_j：矩阵A的j阶顺序主子阵；
- A^T：矩阵A转置；
- A^H：矩阵A共轭转置；
- $\bar{x}$：数x的共轭；
- $\|x\|_2$：向量x的2-范数；
- $\|A\|$：矩阵A的Frobenius范数；
- $rank(A)$：矩阵A的秩；
- $trace(A)$：矩阵A的迹；
- $\Lambda(A)$：矩阵A的谱集；
- $diag$：对角阵；
- $[\ ]$：向下取整；
- $\mathcal{H}_n$：n阶不可约的酉Hessenberg阵全体；
- $\varphi_j(\lambda)$：矩阵A_j的特征多项式，即$\varphi_j(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

第 一 章 绪论

§1.1 引言

一般而言, 每一个数学问题都有正问题和相应的反问题, 如给定两个数求其乘积, 是乘法正问题; 其反问题就是求一个数的两个因子, 比如求乘积为20的两个自然数, 共有3对, 分别为1和20, 2和10, 4和5, 由此可见反问题的解很可能不唯一, 如果要使反问题的解唯一, 往往需要附加一些限制条件或从问题的物理背景来考虑. 一般来说反问题要比正问题复杂, 而且反问题的解通常带有某种程度的不稳定性.

在数值代数中, 已知一个矩阵, 求其特征值和特征向量称为代数特征值问题（又叫做矩阵特征值问题）, 特征值问题可用于分析和认识某一物理系统; 然而在结构设计中, 却往往要求设计出具有给定的频率或振型的结构, 并推论或识别出结构的其它的物理参数, 来进行系统的设计和优化, 这反映到数学上就是由给定的特征值或特征向量构造出相应的矩阵, 我们称之为代数特征值反问题(又叫做矩阵逆特征值问题或矩阵特征值反问题). 矩阵逆特征值问题是近代数学物理中有重要意义的问题, 在固体力学、物理学、量子力学、地球物理、结构设计、系统参数识别、自动控制等许多领域都具有重要的应用, 而这个问题一般是不适定的, 这给矩阵逆特征值问题的研究带来了不少困难, 但也使它更具有挑战性和吸引力.

上世纪50年代末至70年代初以来, 矩阵逆特征值问题的研究日益受到数学界的重视. A.G. Downing和A.S. Householder在1956年最早给出两类矩阵逆特征值问题：加法和乘法问题[1]. M.R. Osborne在1971年研究了从微分方程、差分方程导出矩阵的逆特征值问题[2]. O.H. Hald1972年在其博士论文中用差分法解Sturm-Liouville问题, 从而导出Jacobi矩阵的逆特征值问题[3]. 近年来, 有关特征值反问题的研究非非常活跃, 特别是一些具有特殊结构的矩阵, 如：Jacobi矩阵[4–10]、Toeplitz矩阵[11–13]、非负矩阵[14–18]、随机矩阵[19–22]、酉阵[23,24]等. 国内外有很多关于矩阵逆特征值问题方面的文献和综述. 周树荃、戴华的专

著《代数特征值反问题》全面系统地阐述了各种类型的矩阵逆特征值问题及其主要结果[25]; 徐树方的专著《An Introduction to Inverse Algebraic Eigenvalue Problems》主要讨论了Jacobi矩阵特征值反问题、极点配置问题、加法和乘法反问题、非负矩阵反问题, 并分析了这四类矩阵逆特征值问题解的敏感性[26]; Gladwell的专著《The Inverse Problems in Vibration》主要从应用力学角度阐述了振动中的各种逆特征值问题[27]; Boley和Golub的综述《A Survey of Matrix Inverse Eigenvalue Problems》讨论了Jacobi矩阵特征值反问题的不同的提法及数值算法[28]; Chu和Golub的《Structured Inverse Eigenvalue Problems》综述了39类矩阵逆特征值问题[29].

矩阵逆特征值问题的研究内容包括如下四个方面：

1. 可解性, 包括问题可解的充分和必要条件.
2. 适定性, 包括问题解的存在性、唯一性和稳定性.
3. 数值方法, 包括构造问题的解, 并讨论与数值方法有关的问题.
4. 实际应用, 包括问题的背景及实际应用.

§1.2 矩阵逆特征值问题的提法

一般地, 矩阵逆特征值问题的提法可概述如下：给定一些特征信息(特征值、特征向量、特征多项式) 及附加条件(矩阵的部分元素或指定矩阵为某类特定矩阵), 讨论在什么条件下存在以及如何构造所求矩阵. 但由于所给条件不同或应用背景不同而又有各种各样的提法[25].

1. 加法问题

给定矩阵A, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 求对角矩阵$D$, 使得$A + D$以$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为特征值. 加法问题来源于Sturm-Liouville问题的反问题离散化.

2. 乘法问题

给定矩阵A, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, 求对角矩阵$D$, 使得$DA$以$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为特征值. 复合摆的研究导出乘法问题.

3. 含参数的特征值反问题

给定$n+1$个n阶实矩阵$A_k (k = 0, 1, \cdots, n)$, n个实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$, 使得矩阵$A = A(c_1, c_2, \cdots, c_n) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i A_i$具有特征

值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

含参数的特征值反问题出现在结构设计、振动反问题、粒子物理、分子光谱学等许多领域, 由于所讨论的矩阵类不同又有以下不同的提法:

给定$n+1$个n阶实对称矩阵$A_k(k=0,1,\cdots,n)$, n个实数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求$c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, 使得矩阵$A=A(c_1, c_2, \ldots, c_n)=A_0+\sum\limits_{i=1}^{n} c_i A_i$具有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

给定$n+1$个n阶复矩阵$A_k(k=0,1,\cdots,n)$, n个复数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求$c=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, 使得矩阵$A=A(c_1, c_2, \cdots, c_n)=A_0+\sum\limits_{i=1}^{n} c_i A_i$具有特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

如果$A_k=e_k e_k^T(k=1,2,\cdot,n)$, e_k为n阶单位阵的第k列, 则上述含参数的特征值反问题分别是实数域、实对称阵、复数域上的加法问题. 含参数的特征值反问题提出于1956年, 已经发展了Newton迭代、同伦方法、逐次谱分解迭代等方法. Chu证明了问题最多有$n!$个不同的解[30]. 如果$\lambda_i \neq \lambda_j(i \neq j)$, 孙继广等证明了问题有几乎处处不可解性[31], 因此应从实际背景出发重新分析问题的提法, 进展情况可参阅[32].

4. 极点配置问题

考虑线性时间不变系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{1-1}$$

其中$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$和$u(t) \in \mathbb{R}^m$分别为系统的状态变量和输入变量，设系统的控制或状态的反馈控制为

$$u(t)=Fx(t),$$

其中$F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 将其代入(1-1)得

$$\dot{x}(t)=(A+BF)x(t),$$

在实际应用中，引入状态反馈控制的目的常常是为了使系统变得稳定或者使系统能够快速的反应，而这些都可归结为对系统的谱有某种要求, 这样便得如下极点配置问题：

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$和$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 求矩阵$F \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 使矩阵$A+BF$以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为特征值; 或

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$和$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 求矩阵$K \in \mathbb{R}^{m\times p}$, 使矩阵$A+BKC$ 以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为特征值; 或推广形式:

给定矩阵$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{C}^{n\times m_i}$, $C_i \in \mathbb{C}^{l_i\times n}(i=1,2,\cdots,m)$, n个复数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 求矩阵$K_i \in \mathbb{C}^{m_i\times l_i}(i=1,2,\cdots,m)$, 使得矩阵$A+\sum\limits_{i=1}^{m} B_iK_iC_i$具有给定的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

极点配置问题在80年代曾被广泛研究, 目前已有不少求解极点配置问题的数值方法[33–37], 在Matlab® [38]中就有求解极点配置问题的两个函数, place函数和acker函数.

5. 谱约束下矩阵的最佳逼近问题

给定部分特征值及相应的特征向量和矩阵$\tilde{A}$, 求一个矩阵A, 使A具有事先给定的特征值及特征向量并且与$\tilde{A}$"最接近". 结构振动系统的校正、有限元模型的修正和自动控制系统的复原会遇到此类问题.

6. Jacobi矩阵、实对称带状矩阵特征值反问题

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

称为对称三对角阵; 若$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, 且$b_i > 0$, 则称为Jacobi矩阵.

Jacobi矩阵的逆特征值问题主要来源于杆和球的振动、复合摆、弹簧质点系统以及Sturm-Liouville等实际问题[27,29,39,40]. 下面以两端固定的弹簧-质点系统来说明Jacobi矩阵逆特征值问题.

图1.1是两端固定的弹簧-质点系统共有n个质点, $n+1$段弹簧, 用m_i表示第i个质点的质量, k_i表示第i段弹簧的弹性系数, 假设地面没有摩擦, 用$u_i(t)$表

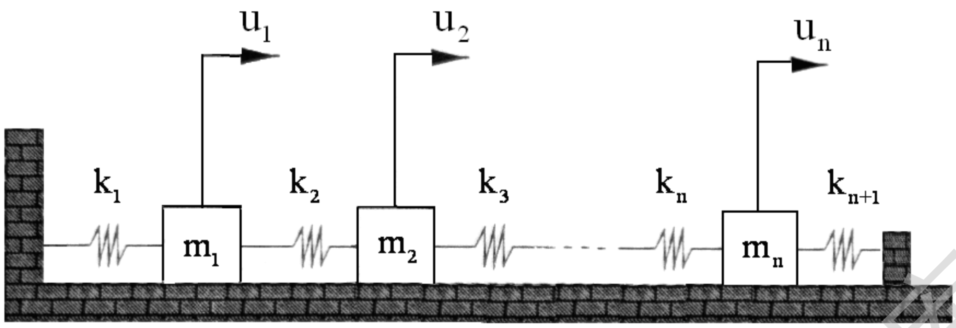

图 1.1 质点弹簧系统

示第i个质点在时刻t的水平位移, 由牛顿运动学定理得到n个质点的运动方程

$$
\begin{aligned}
&m_1\frac{d^2u_1}{dt}=-k_1u_1+k_2(u_2-u_1),\\
&m_i\frac{d^2u_i}{dt}=-k_i(u_i-u_{i-1})+k_{i+1}(u_{i+1}-u_i), i=2,\cdots,n-1,\\
&m_n\frac{d^2u_n}{dt}=-k_n(u_n-u_{n-1})+k_{n+1}(-u_n),
\end{aligned}
$$

将上述方程写成矩阵的形式

$$M\frac{d^2u}{dt}=-Ku, \tag{1-2}$$

其中$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$, $M=diag(m_1,m_2,\cdots,m_n)$, 且

$$K=\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & & 0\\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k_{n-1}+k_n & -k_n\\ 0 & & & -k_n & k_n+k_{n+1}\end{pmatrix},$$

为Jacobi矩阵. 将$u(t)=e^{iwt}v$代入(1-2)得广义特征值问题

$$(K-\omega^2M)v=0, \tag{1-3}$$

其中ω是系统的固有频率, v是对应的固有振型, 令$J=M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}$, $z=M^{\frac{1}{2}}v$和$\lambda=\omega^2$, 则(1-3)变为Jacobi矩阵特征值问题

$$Jz=\lambda z,$$