学校编码：10384　　　　　　　　　　分类号：　　密级：

学号：17020051403017　　　　　　　　　　UDC：

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

Université Paris-Sud 11

图论中的组合方法和概率方法

Combinatorial Methods and Probabilistic Methods in Graph Theory

陈 爱 莲

指导教师姓名：张福基　教授

　　　　　　　李　皓　教授

专 业 名 称：应 用 数 学

论文提交日期：2008 年 6 月

论文答辩时间：2008 年 8 月

学位授予日期：2008 年　月

答辩委员会主席：

评　　阅　　人：

2008 年 8 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声 明 人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　日期：　　　年　　月　　日

目　录

Contents

ABSTRACT

A random graph is a graph in which properties such as the number of vertices, edges, and connections between vertices are randomly determined. The theory of random graphs founded by Erdös and Rényi during the period of 1959-1961 ([91, 92, 93, 94]) has been an active area of research that combines probability theory and graph theory, and that is widely applied in various disciplines, such as computer science, chemistry, social science and biology, among others.

Now the theory of random graphs has been developed into one of the main research streams of modern discrete mathematics which has produced a prodigious number of results, many of which highly ingenious, describe statistical properties of graphs, such as the evaluation of the random graph, asymptotic distribution, subgraph properties, extremal properties and Ramsey properties. Nowadays, probabilistic methods and ideas play a more and more important role in graphs theory.

In this thesis we will focus on the study of asymptotic behaviors of random graphs on n vertices where n tends to infinity. As customary, we say that almost every (a.e.) graph has a certain property if the probability of the set of graphs with that property tends to 1 as $n \to +\infty$.

This thesis is divided into three parts. The first part is the introduction chapter(Chapter 1); the second part consists of 3 chapters (Chapter 2, 3 and 4), and investigate the degree sequence of random multigraphs and random hypergraphs and the third part

is on the rainbow Hamilton cycles and H-factors in edge-colored hypergraphs (Chapter 5, 6).

Let n be a natural number, r a fixed natural number and $n_i = n_i(n)$ $(1 \le i \le r)$ nonnegative integer-valued functions on n with $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. The random r-uniform r-partite hypergraph model $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$, as a generalization of the classic random bipartite graph model, consists of all the r-uniform r-partite hypergraphs with vertex partition $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$, where $|V_i| = n_i = n_i(n)$ $(1 \le i \le r)$ and where each r-subset of vertex set $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r$ containing exactly one element in V_i $(1 \le i \le r)$ is chosen to be a hyperedge of $H_{n,p}^{(r)} \in \mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ with probability $p = p(n)$, all choices being independent. In Chapter 2 we consider the limit distribution of the degree sequence in V_1 of $H_{n,p}^{(r)} \in \mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$, as $n \to \infty$.

Let $\Delta_{V_1} = \Delta_{V_1}(H)$ and $\delta_{V_1} = \delta_{V_1}(H)$ be the maximum degree and the minimum degree of vertices in V_1 in H, respectively; $X_{d,V_1} = X_{d,V_1}(H)$, $Y_{d,V_1} = Y_{d,V_1}(H)$, $Z_{d,V_1} = Z_{d,V_1}(H)$ and $Z_{c,d,V_1} = Z_{c,d,V_1}(H)$ be the number of vertices in V_1 with degree d, at least d, at most d, and between c and d in H, respectively. In Chapter 2 we obtain that in the space $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$, random variables X_{d,V_1}, Y_{d,V_1}, Z_{d,V_1} , and Z_{c,d,V_1} all have asymptotically Poisson distributions as $n \to \infty$. We also consider the following two questions. In what range of p can there be a function $D(n)$ such that in the space $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$, $\lim_{n\to\infty} P\{\Delta_{V_1} = D(n)\} = 1$? In what range of p has almost every $H_{n,p}^{(r)} \in \mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ a unique vertex in V_1 with degree $\Delta_{V_1}(H_{n,p}^{(r)})$? We prove that if $p \le 1/2$ then the answer for the first question is $Np/\log n_1 \to 0$, and for the second is $Np/\log n_1 \to \infty$. We also give a good estimate for $d_{i,V_1} - d_{i+1,V_1}$, where

$$d_{1,V_1} \ge d_{2,V_1} \ge ... \ge d_{n_1,V_1}$$

are the degree sequence of $H_{n,p}^{(r)}$ in V_1 in decreasing order.

In Chapter 3, we generalize the binomial random model $\mathcal{G}(n, p)$, and define the model of multigraphs as follows: let $\mathcal{G}(n;\{p_k\})$ be the probability space of all the labeled loopless multigraphs with vertex set $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, in which the numbers t_{v_i,v_j} of the edges between any two vertices v_i and v_j are identically independent random variables with distribution

$$P\{t_{v_i,v_j}=k\}=p_k, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\dots$$

where $p_k \geq 0$ and $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Then we give a sufficient condition for which the degree distribution of a random multigraph has asymptotically a Poisson distribution as n tends to ∞. In order to improve the condition, we also consider the corresponding problem in the special cases of $\mathcal{G}(n;\{p_k\})$ with $\{p_k\}$ having geometric distribution, binomial distribution and Poisson distribution, respectively.

In Chapter 4, we generalize the classic random bipartite graph model and define the model of random multigraphs as follows: let $\mathcal{G}(n,m;\{p_k\})$ be the probability space of all the labeled loopless bipartite multigraphs with vertex set $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ and $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ in which the numbers t_{a_i,b_j} $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m)$ of the edges between any two vertices $a_i\in A$ and $b_j\in B$ are identically independent random variables with distribution

$$P\{t_{a_i,b_j}=k\}=p_k, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\dots$$

where $p_k \geq 0$ and $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Results analogous to those in Chapter 2 are obtained for this random bipartite multigraph model $\mathcal{G}(n,m;\{p_k\})$.

On the other hand, the study on the edge-colored graphs and hypergraphs is another hot topic in graph theory. As of today, the study on these problems has produced many classic results and many new methods including the probabilistic method.

If H is a hypergraph with h vertices and G is hypergraph with hn vertices, we say that G has an H-factor if it contains n vertex disjoint copies of H. We say a subhypergraph of an edge-colored hypergraph is rainbow if all of its edges have distinct colors, and a rainbow H-factor is an H-factor whose components are rainbow H-subhypergraphs.

In Chapter 5, by the probabilistic method, we prove that if the hyperedges of a complete 3-uniform complete hypergraph $K_n^{(3)}$ are so colored that no color appears more than $\lceil cn \rceil$ times, where $c < 1/1152$ is a constant, and if n is even and is sufficiently large, then the edge-colored complete 3-uniform complete hypergraph $K_n^{(3)}$ contains a rainbow Hamilton cycle.

In Chapter 6, by the probabilistic method, we prove that if h, r and s are positive integers with $s \leq r \leq h$ and if H is a fixed s-uniform hypergraph with h vertices and with $\chi(H) = r$, then there exists a constant $k = k(h, r, s)$ such that any proper edge-colored $\mathcal{T}_{s,r}(k)$ has a rainbow H-factor, where $\mathcal{T}_{s,r}(k)$ is the complete s-uniform r-partite hypergraph with k vertices in each vertex class.

Keyword: degree sequence, random graphs, H-factor, edge-coloring, hypergraphs.

ABSTRACT

一个图如果其性质如顶点、边或者顶点与边之间的关系具有随机性, 我们通常称之为随机图. 随机图理论创始于 Erdös 与 Rényi 在上个世纪50年代末60年代初发表的一系列论文, 他们发现概率方法在处理图论的某些问题时非常有用. 现在，随机图理论在很多方面都有一些很漂亮的结果, 如随机图的进化过程、极限分布、子图理论、极图理论以及 Ramsey 理论等等。作为离散数学的一个重要分支，随机图在其他学科，如计算机科学、化学、社会学及生物学等都有广泛的应用。另一方面，概率理论也已经成为图论研究的一种越来越重要的工具.

本篇论文主要包括三个部分：第一部分是序言（第1章），第二部分我们主要是研究随机多重图和随机超图的度序列的分布问题（第2，3，4 章），第三部分我们主要研究关于边染色超图的彩色的哈密顿圈和 H-因子问题（第5，6章）。

在本文中, 如果在一个随机图模型中, 一个图性质 Q 满足 $\lim_{n\to\infty} P\{Q\} = 1$, 那么我们就说在该空间中几乎所有的图都具有性质 Q.

假设 n 是一个自然数, r 是一个固定的自然数, $n_i = n_i(n)$ $(1 \le i \le r)$ 是一系列关于 n 的非负整值函数且满足$n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. 作为经典随机二部图的的一种推广，随机 r 一致 r 部随机超图模型 $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ 定义如下：

(i) 样本空间由所有具有顶点划分 $V = \{V_1, V_2, ..., V_r\}$ 且每条(超)边恰好有一个端点落在 $V_i(1 \le i \le r)$ 的 r 一致 r 部超图组成;

(ii) $\prod_{i=1}^{r} n_i$ 条边中的每一条边被选取构成超图的概率是 p $(0 < p < 1)$, 且不同边的选取互相独立。

在第二章，我们研究了随机 r 一致 r 部随机超图模型 $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ 中的随机超图在 V_1 中的度序列的分布问题。

$\Delta_{V_1} = \Delta_{V_1}(H)$ 和 $\delta_{V_1} = \delta_{V_1}(H)$ 分别表示图 H 在 V_1 中的最大度和最小度; $X_{d,V_1} = X_{d,V_1}(H)$, $Y_{d,V_1} = Y_{d,V_1}(H)$, $Z_{d,V_1} = Z_{d,V_1}(H)$ 和 $Z_{c,d,V_1} = Z_{c,d,V_1}(H)$ 分别表示图 H 在 V_1 中度为 d, 度大于或等于 d, 度小于或等于 d, 和度大于或等于 c 且小于或等于 d的顶点数目。

在第二章，我们证明在随机 r 一致 r 部随机超图空间 $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ 中, 随机变量 X_{d,V_1}, Y_{d,V_1}, Z_{d,V_1} , 及 Z_{c,d,V_1} 都近似服从 Poisson 分布. 另一方面，我么也考虑了下面两个问题：

(i)当 p 满足什么条件时，我们能找到一个关于 n 的整值函数 $D(n)$ 使得在空间 $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ 中，$\lim_{n\to\infty} P\{\Delta_{V_1} = D(n)\} = 1$?

(ii)当 p 满足什么条件时，在空间 $\mathcal{H}(n_1, n_2, ..., n_r;\ n, p)$ 中，几乎所有的超图在 V_1 的最大度顶点是唯一的?

我们证明了第一个问题的答案是 $p = o(\log n_1/N)$, 而第二个问题的答案是$Np/\log n_1 \to \infty$. 假设 $d_{1,V_1}(H) \geq d_{2,V_1}(H) \geq ... \geq d_{n_1,V_1}(H)$ 是 H 在 V_1 的度序列。考虑完度序列中最大度和最小度的情况之后，我们考虑了度序列中一般元素 d_{i,V_1} 的分布问题，另外我们还对 $d_{i,V_1} - d_{i+1,V_1}$ 给出了一个估计。

在第三章，我们把经典二项随机图模型推广到多重随机图模型 $\mathcal{G}(n; \{p_k\})$, 定义如下：

(i)样本空间由所有以 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为顶点集的无自同环多重图组成；

(ii) 若用随机变量 $t_{v_i,v_j}(1 \leq i < j \leq n)$ 表示顶点 v_i 与 v_j 之间存在的边数。则 $t_{v_i,v_j}(1 \leq i < j \leq n)$ 相互独立，且服从同分布：

$$P\{t_{v_i,v_j} = k\} = p_k, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, ...$$

其中 $p_k \geq 0$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

首先，我们给出了在空间 $\mathcal{G}(n; \{p_k\})$中多重图的度序列近似服从 Poisson 分布的一个充分条件。然后，为了改进这个结果，我们还分别考查了当 $\{p_k\}$ 服从几何分布、二项

分布及 Poisson 分布的情况，并给出了充要条件。

在第四章，我们把经典随机二部图模型推广到随机多重二部图模型 $\mathcal{G}(n, m; \{p_k\})$，定义如下：

(i) 样本空间由所有以 $A \cup B$ 为顶点集的无自同环多重二部图组成，其中 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$；

(ii) 若用随机变量 $t_{a_i, b_j}(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ 表示顶点 a_i 与 b_j 之间存在的边数。则 $t_{a_i, b_j}(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ 相互独立，且服从同分布：

$$P\{t_{a_i, b_j} = k\} = p_k, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

其中 $p_k \ge 0$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. 在这一章我们得到一些类似于第二章的结果。

另一方面，图的染色理论在图论中占很重要的地位。近年来，对图的染色问题的研究变得异常活跃，得到了一系列漂亮的结果，也产生了很多新的研究方法，其中包括概率方法。在第5，6章我们考虑了边染色超图中的彩色 H-因子和彩色哈密顿圈问题。

我们说一个边染色子图是彩色的, 如果该子图的任意两条边的颜色都不一样. 假设 H 是图 G 的一个子图, 我们称 G 的一个满足每个连通分支都同构于H 的生成子图为G 的一个 H-因子, 且如果每个连通分支都是彩色的H, 那么我们就称之为 G 的一个彩色 H-因子.

在第五章，我们用概率方法证明了如果一个具有 n 个顶点的完全 3 一致超图 $K_n^{(3)}$ 的边染色满足任意一种颜色出现的次数不超过 $\lceil cn \rceil$ 次，则该染色包含一个每一条边颜色都不一样的哈密顿圈，其中 c 是满足 $c < 1/1152$ 的任意常数。

在第六章，我们用概率方法证明了如果 h, r 和 s 是正整数且满足 $s \le r \le h$, H 是具有 h 个顶点且满足 $\chi(H) = r$ 的 s 一致超图，那么我们可以找到一个常数 $k = k(h, r, s)$ 使得任何正常边染色的超图 $\mathcal{T}_{s,r}(k)$ 都包含一个每条边颜色都不一样的彩色的 H-因子，其中 $\mathcal{T}_{s,r}(k)$ 是顶点划分为 $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ 且$|V_i| = k(1 \le i \le r)$ 的 s 一致 r 部超图.

关键词： 度序列，随机图，边染色，H-因子，超图.

RÉSUMÉ

Un graphe aléatoire est un graphe dans lequel des propriétés comme le nombre de ses sommets et de ses arêtes , et certaines relations entre eux sont déterminés d'une façons aléatoires. La théorie des graphes aléatoires est un domaine actif de la recherche qui combine la théorie des probabilités et la théorie des graphes. La théorie des graphes aléatoires est fondée par Erdös et Rényi(1959, [45]) après que Erdös ait découvert que les méthodes probabilistes étaient souvent utiles dans les problèmes de "tackling extremal" dans la théorie des graphes.

que pour tout entier natuel $g \geq 3$ et $k \geq 3$, il existe des graphes avec une maille g et un nombre chromatique k. Ils n'ont pas construit de tels graphes, mais ils ont montré que la plupart des graphes dans une certaine classe peuvent être modifié pour donner des exemples désirables. A travers la définition appropriée des espaces de probabilité, ils ont également montré que pour beaucoup de propriétés monotones de graphes aléatoires, les graphes d'une taille légèrement inférieure un certain seuil ne risquent pas d'avoir une propriété donnée, alors que des graphes avec un peu plus d'arêtes sont presque garantis d'avoir la propriété. (Ce phénomène est désigné comme une phase de transition).

Actuellement, la théorie des graphes aléatoires est considérè comme l'une des plus importantes branches des mathématiques discrète modernes. D'intéressants résultats ont été élaborés, décrivant des propriétés statistiques de graphes comme l'évaluation d'un graphe aléatoire, les distributions asymptotiques, les propriétés de sous-graphes, les propriétés

extremums et les propriétés de Ramsey.

Bien que la théorie des graphes aléatoires est l'une des branches les plus récentes de la théorie des graphes, néanmoins elle est la plus importante. D'excellents ouvrages traitent cette théorie dans [102, 103]. En une dizaine d'années, elle a occupé une place dans plusieurs nouveaux livres de la théorie des graphes (voir, par exemple [3, 42, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101]). Aujourd'hui, les idées probabilistes jouent un rôle trés important en théorie des graphes.

Cette thése concerne la séquence des degrés d'un multigraphe aléatoire et d'un hypergraphe aléatoire et d'un H-facteurs rainbow dans un hypergraphe arêtes-colorées.

Le modèle $\mathcal{G}(n, m; p)$ du graphe biparti aléatoire, et le modèle $\mathcal{G}(n, p)$ du graphe aléatoire, binomial sont les deux modèles basiques dans la théorie des graphes aléatoires.

Le modèle $\mathcal{G}(n, m; p)$ du graphe biparti aléatoire , consiste en tous les graphes biparti dans lesquels la première partie A consiste en n sommets labelisés, la seconde partie B (disjointe de A) consiste en m sommets labelisés, et pour tout $a \in A$ et $b \in B$ l' arête $\{a, b\}$ est présentée par la probabilité p, indépendemment de la présence des autres arêtes.

Le modèle $\mathcal{G}(n, p)$ d'un graphe aléatoire, binomial consiste en tous les graphes labelisés G ayant un ensemble de sommets $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ dans lequel les arêtes sont choisies indépendemment avec une probabilité p.

Dans la théorie des graphes aléatoires, la distribution des degrés donne une distribution de la probabilité des degrés dans un réseau. Son utilisation est originaire de l'étude des graphes aléatoires par Erdös et Rényi (1959, [91]), elle est devenue un concept important, qui décrit la topologie de complexes réseaux. Divers aspects de la séquence des degrés des graphes aléatoires dans un modèle binomial $G(n, p)$ sont étudiés par Ivchenko (1973, [44]), Erdös and Wilson (1977, [48]), and Bollobás (1980-1982, [49, 50, 52]). Récemment, d'autres résultats concernant la séquence des degrés pour d'autres modèles aléatoires ont été publiés, comme ceux traitant les réseaux aléatoires étudiés par Jordan (2006,