学校编号： 10384　　　　分类号：________密级：________
学　　号： 17020051301592　　UDC:________________

硕　士　学　位　论　文

# 复流形上具有非光滑边界强拟凸域的 Koppelman -Leray-Norguet 公式及其应用

# The Koppelman-Leray-Norguet formula for strictly pseudoconvex domain with non-smooth boundary on complex manifold and its applications

陈 特 清

指导教师姓名： 邱 春 晖 教授
专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2008 年 4 月
论文答辩时间： 2008 年 　月
学位授予日期： 2008 年 　月

答辩委员会主席：________

评　阅　人：________

2008 年 4 月

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1 、保密（　　），在　　　年解密后适用本授权书。

2 、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打”✓”）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

# 目　　录

# Contents

# 摘 要

熟知，$\mathbf{C}^n$ 空间中 $(0,q)$ 型微分形式的积分表示及其应用已经有许多研究 [1−−8], 但复流形上的积分表示的研究则始于二十世纪八十年代，目前的成果多数是关于 Stein 流形的 [4,5,9,10,14]. 上个世纪 90 年代初 B.Berndtsson[11] 对一般复流形上的积分表示理论进行了研究，在适当的假设下得到了复流形上相当一般的积分核，并给出复流形上的 Koppelman 公式.

钟同德 [12] 在此基础上得到了复流形上具有逐块 $C^1$ 光滑边界的有界域 $D$ 上 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下给出 $D$ 上 $\bar{\partial}$– 方程的连续解. 本文利用 Hermitian 度量和陈联络，构造新核，对复流形上具有非光滑边界的强拟凸域 $D$ 进行探究，得到 $D$ 上 $(p,q)$ 型微分形式相应的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下也得到 $D$ 上 $\bar{\partial}$– 方程的连续解，其特点是不含边界积分，从而避免了边界积分的复杂估计，并且积分密度不必定义在边界上而仅仅定义在区域内. 作为应用，我们探讨 Stein 流形上一般强拟凸多面体 (不一定非退化) 上 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下给出 $\bar{\partial}$– 方程的连续解. 全文分三章：

第一章介绍了复流形上的一些定义和记号, 包括 Berndtsson 核，逐块光滑边界，以及重要的基本引理等等.

第二章构造新核，得到相应的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并给出两个特例.

第三章作为应用，我们探讨 Stein 流形上一般强拟凸多面体 (不一定非退化) 上 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下给出 $\bar{\partial}$– 方程的连续解.

**关键词**： 复流形；强拟凸域；非光滑边界； Koppelman–Leray–Norguet 公式； $\bar{\partial}$– 方程.

# ABSTRACT

It is well known that the integral representations and their applications for $(0, q)$ differential form in $\mathbf{C}^n$ have been deeply studied[1−−8]. But the research for integral representations on complex manifolds began in 1980s.Most of the results,so far,are concerned with Stein manifolds[4,5,9,10,14]. In the early 1990s,B. Berndtsson[11] studied the theory of integral representations on general complex manifolds,under a suitable condition gained in a quite general integral kernel.Using this kernel,obtained the Koppelman formula on complex manifolds.

Based on it,Tongde Zhong[12] got the Koppelman-Leray-Norguet formula of type $(p, q)$ on a bounded domain $D$ with piecewise $C^1$ smooth boundaries in a complex manifold,and gave the continuous solutions of $\bar{\partial}$–equations on $D$ under a suitable condition.In this paper, by using the Hermitian metric and Chern connection,we study the case of a strictly pseudoconvex domain $D$ with non-smooth boundaries in a complex manifold.By constructing a new integral kernel,we obtain a new Koppelman-Leray-Norguet formula of type $(p, q)$ on $D$,and get the continuous solutions of $\bar{\partial}$–equations on $D$ under a suitable condition.The new formula doesn't involve integrals on the boundary,thus one can avoid complex estimations of the boundary integrals,and the density of integral may be not defined on the boundary but only in the domain. As some applications,we discuss the Koppelman-Leray-Norguet formula of type $(p, q)$ for general strictly pseudoconvex polyhedrons (unnecessarily non-degenerate) on Stein manifolds,also get the continuous solutions of $\bar{\partial}$–equations under a suitable condition.The whole dissertation contains three chapters：

In the first chapter, the author introducs some definitions and notations on complex manifolds, including the Berndtsson kernel, piecewise $C^1$ smooth boundaries. Furthermore there are some important basic lemmas and so on.

In the second chapter, By means of constructing new kernel,the author gives a new Koppelman-Leray-Norguet formula on a strictly pseudoconvex domain with non-smooth boundaries.We also gives two examples.

In the third chapter,As some applications,we discuss the Koppelman-Leray-Norguet formula of type $(p, q)$ for general strictly pseudoconvex polyhedrons (unnecessary non-degenerate) on Stein manifolds,also get the continuous solutions of $\bar{\partial}$–equations under a suitable condition.

**Keywords:** Complex manifold; strictly pseudoconvex domain;non-smooth boundary;Koppelman–Leray–Norguet formula; $\bar{\partial}$–equation.

# 复流形上具有非光滑边界强拟凸域的 Koppelman-Leray-Norguet 公式及其应用 *

## 引 言

现代数学的特点之一是高维、交叉．而多元复分析正是反映这些特点的方向之一，它是现代数学中最为活跃的学科之一。国际著名数学家陈省身先生曾预言：“将来数学研究的对象，必然是流形．”多元复分析研究的主要内容是复流形的分析与复几何，而多复变与复几何是一门交叉性极强的学科，反映了数学的统一性，是现代数学的核心与前沿之一．由于内容十分广泛和深刻，所以几乎用到现代数学的所有方法.

早在 1831 年， Cauchy 发现了以其名字命名的著名的 Cauchy 积分公式，数学家就认识到积分表示在复分析中的重要性．自从上个世纪 70 年代 Henkin[1,2] 和 Grauert & Lieb[3] 分别得到了 $\mathbf{C}^n$ 空间中强拟凸域的 $\bar{\partial}-$ 方程的解的积分公式后，多复变数的积分表示方法迅速发展起来，成为多元复分析的主要方法之一，它的主要优点是象单变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计.

熟知， $\mathbf{C}^n$ 空间中全纯函数和光滑函数的积分表示及其应用已经有许多研究 [1,2,4−−6]，自从 Koppelman[7] 于 1967 年得到了 $\mathbf{C}^n$ 空间中 $(0,q)$ 型微分形式的 Koppelman 公式，有关 $\mathbf{C}^n$ 空间中 $(0,q)$ 型微分形式的积分表示理论也已经有许多研究 [1−−8]，但复流形上的积分表示的研究则始于上个世纪 80 年代．首先， Henkin 和 Leiterer[4] 研究了 Stein 流形上 $(0,q)$ 型微分形式的积分表示理论，得到了 $(0,q)$ 型的 Koppelman 公式， Koppelman–Leray 公式和 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并给出了 $\bar{\partial}-$ 方程的解．接着 Demailly 和 Laurent–Thiebaut[9] 研究了 Stein 流形上 $(p,q)$ 型微分形式的积分表示理

* 国家自然科学基金资助项目 (项目批准号： 10571144,10771144) 和厦门大学新世纪优秀人才支持计划.

论，得到了 $(p,q)$ 型的 Koppelman 和 Koppelman–Leray 公式以及 $\bar{\partial}-$ 方程的解，它和 $(0,q)$ 型微分形式的情形有本质的区别，这时不能象 $\mathbf{C}^n$ 空间一样采用 Euclid 度量，因为在 Stein 流形上 Euclid 度量不是全纯变换下的不变量. 为了克服这个困难， Demailly 和 Laurent–Thiebaut 利用 Hermitian 度量和陈联络，给出了不变积分核，这是一个十分重要的思想. 利用 Hermitian 度量和陈联络，邱春晖 [10] 得到了 Stein 流形上具有逐块 $C^1$ 光滑边界强拟凸域上的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下给出了 $\bar{\partial}-$ 方程的解. 20 世纪 90 年代初 B.Berndtsson[11] 对一般复流形上的积分表示理论进行了研究，他在适当的假设下首先得到了复流形上相当一般的积分核，由此他得到了复流形上的 Koppelman 公式. 钟同德 [12] 在此基础上得到了复流形上具有逐块光滑边界的有界域 $D$ 上 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下给出 $D$ 上 $\bar{\partial}-$ 方程的连续解.

本文的目的是利用 Hermitian 度量和陈联络，构造新核，探究复流形上具有非光滑边界的强拟凸域 $D$ 的情形，得到 $D$ 上 $(p,q)$ 型微分形式相应的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，同时在适当假定下得到 $D$ 上 $\bar{\partial}-$ 方程的连续解，其特点是不含边界积分，从而避免了边界积分的复杂估计，并且积分密度不必定义在边界上而仅仅定义在区域内. 文章分三部分：

第一章介绍了复流形上的一些定义和记号，包括 Berndtsson 核，逐块光滑边界，以及重要的基本引理等等.

第二章构造新核，得到相应的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并给出两个特例.

第三章作为应用，我们探讨 Stein 流形上一般强拟凸多面体 (不一定非退化) 上 $(p,q)$ 型微分形式的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并在适当假定下给出 $\bar{\partial}-$ 方程的连续解.

# 第一章 复流形与基本引理

设 $M$ 为一个复流形， $X=M\times M$, $E$ 为 $X$ 上的 $n$ 阶全纯向量丛， $\eta$ 为 $E$ 的全纯截面使得

$$\{\eta=0\}=Y=\{(\zeta,z)\in X:\zeta=z\}. \tag{1.1}$$

若 $\xi$ 为 $E$ 的对偶丛 $E^*$ 的任意光滑截面，它对 $\eta$ 是允许的，即 $\forall$ 紧集 $B\subseteq X$ 有

$$|\xi|\le c_B|\eta| \ \text{ 且 } \ |\langle\xi,\eta\rangle|\ge C_B|\eta|^2, \tag{1.2}$$

其中 $c_B$ 与 $C_B$ 为仅与 $B$ 有关的常数，例如 $\xi$ 是 $\eta$ 关于某度量的对偶向量，则 $\xi$ 对 $\eta$ 是允许的. 考虑广义式方程

$$dK=[Y]-C_n[\Theta], \tag{1.3}$$

其中 $\Theta$ 为 $E$ 的某一联络的曲率形式，$C_n[\Theta]$ 为 $\Theta$ 的第 $n$ 个陈式. B.Berndtsson 求出 (1.3) 式的显式解为 (称之为 Berndtsson 核)

$$K[\xi,\eta](z,\zeta)\Lambda=\frac{\xi\wedge D\eta}{n!(2\pi i)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}(-1)^k\frac{(D^*\xi\wedge D\eta)^{n-k-1}}{\langle\xi,\eta\rangle^{n-k}}\wedge\widetilde{\Theta}^k, \tag{1.4}$$

其中 $\Lambda=e_1^*\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_n^*\wedge e_n, e_1,\cdots,e_n$ 为 $E$ 的一局部标架， $e_1^*,\cdots e_n^*$ 为 $E^*$ 的对偶标架,

$$(\frac{i}{2\pi})^k\frac{1}{n!}\widetilde{\Theta}^k=c_k[\Theta]e_1^*\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_k^*\wedge e_k. \tag{1.5}$$

记

$$P(N):=\{K=(k_1,\cdots,k_l)\in\mathbf{N}^l:1\le k_1,\cdots,k_l\le N\},$$

$$P'(N):=\{K=(k_1,\cdots,k_l)\in P(N):1\le k_1<\cdots<k_l\le N\}.$$

**定义** 1.1 设 $M$ 是一个 $n$ 维复流形，我们称开集 $D \subset\subset M$ 具有逐块 $C^1$ 光滑的边界，如果存在 $\partial D$ 的邻域 $U$ 的有限个开覆盖 $\{U_k\}_{k=1}^N$ 以及 $C^1$ 函数 $\rho_k : U_k \to \mathbf{R}, (1 \le k \le N)$ , 使得以下条件满足：

(i) $D \cap U = \{x \in U : \text{对 } 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N}, \text{或者 } \mathrm{x} \notin \mathrm{U_k}\text{，或者 } \rho_\mathrm{k}(\mathrm{x}) < 0\}$;

(ii) 对每一个 $K = (k_1, \cdots, k_l) \in P'(N)$ 有

$$d\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{k_l}(z) \neq 0, \forall z \in U_{k_1} \cap \cdots \cap U_{k_l}.$$

我们称 $\{U_k, \rho_k\}_{k=1}^N$ 为 $D$ 的标架.

设 $S_i = \{z \in \partial D \cap U_i : \rho_i = 0\}, i = 1, \cdots, N$, 对 $K = (k_1, \cdots, k_l) \in P(N)$ 定义

$$S_K = \begin{cases} S_{k_1} \cap \cdots \cap S_{k_l}, & \text{若整数} k_1, \cdots, k_l \text{两两不同;} \\ \\ \emptyset, & \text{否则.} \end{cases}$$

选择 $S_K$ 的定向使得

$$\partial D = \sum_{k=1}^N S_k, \quad \partial S_K = \sum_{j=1}^N S_{Kj},$$

其中 $Kj := (k_1, \cdots, k_l, j), \partial D$ 和 $\partial S_K$ 的定向分别是由 $D$ 和 $S_K$ 的定向诱导的， $S_K$ 的定向关于 $K$ 的分量是斜对称的，记

$$\triangle = \{\lambda = (\lambda_0, \cdots .\lambda_N) \in \mathbf{R}^{N+1} : \lambda_j \ge 0, \sum_{j=0}^N \lambda_j = 1\},$$

是 $\mathbf{R}^{N+1}$ 中的 $N$ 维单形. 对 $\{0, 1, \cdots, N\}$ 中的每一个有序子集 $J = \{j_1, \cdots, j_m\}$ 定义

$$\triangle_J = \{\lambda \in \triangle : \sum_{j \in J} \lambda_j = 1\},$$

并选择 $\triangle_J$ 的定向使得

$$\partial \triangle_J = \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} \triangle_{j_1, \cdots, \hat{j_r}, \cdots, j_m},$$

其中 $\widehat{j_r}$ 表示省略掉 $j_r$. 用这个定向，我们可以得到

$$\partial(S_K \times \triangle_J) = \partial S_K \times \triangle_J + (-1)^{|K|} S_K \times \partial \triangle_J,$$

其中 $|K|$ 是指标集 K 的长度.

记 $N(\rho_k) := \{z \in \overline{U}_k : \rho_k(z) = 0\ (k = 1, \cdots, N)\}$ 并且设 $N(\rho_k) \subset\subset U_k$,$(k = 1, \cdots, N)$, (这里我们不必假设当 $\zeta \in \partial D$ 有 $d\rho_k(\zeta) \neq 0$, $k = 1, \cdots, N$). 因此我们可以用 $\theta_k \subset\subset U_k$ 来记 $N(\rho_k)$ 的邻域.

类似于文 [4] 中的定理 4.8.3 和引理 4.8.2 , 假设经过适当放缩 $\theta_k$, 可以找到常数 $\varepsilon, \alpha > 0$, 以及 $C^1$ 函数 $\Phi_k(z,\zeta)$ 和 $\widetilde{\Phi}_k(z,\zeta)$, $z \in D \cup \theta_k, \zeta \in \theta_k$, 使得下列条件满足:

(i) $\Phi_k(z,\zeta)$ ， $\widetilde{\Phi}_k(z,\zeta)$ 关于 $z \in D \cup \theta_k$ 全纯，关于 $\zeta$ 是 $C^1$ 连续的.

(ii) 当 $z \in D \cup \theta_k$, $\zeta \in \theta_k$,$\mathrm{dist}(z,\zeta) \geq \varepsilon$ 时有

$$\Phi_k(z,\zeta) \neq 0\ ,\ \widetilde{\Phi}_k(z,\zeta) \neq 0. \tag{1.6}$$

当 $z \in D \cup \theta_k, \zeta \in \theta_k$ 且 dist $(z,\zeta) \leq \varepsilon$ 时有

$$|\Phi_k(z,\zeta)| \geq \alpha(\rho_k(\zeta) - \rho_k(z) + [\mathrm{dist}(z,\zeta)]^2), \tag{1.7}$$

$$|\widetilde{\Phi}_k(z,\zeta)| \geq \alpha(-\rho_k(\zeta) - \rho_k(z) + [\mathrm{dist}(z,\zeta)]^2). \tag{1.8}$$

对每个 $z \in \theta_k$ 有

$$\Phi_k(z,z) = 0. \tag{1.9}$$

(iii) 当 $\zeta \in N(\rho_k), z \in D \cup \theta_k$ 时有

$$\widetilde{\Phi}_k(z,\zeta) = \Phi_k(z,\zeta). \tag{1.10}$$

类似于文 [4] 中推论 4.9.4, 适当放缩 $\theta_k$, 我们可以找到 $T^*(M)$- 值 $C^1$ 映射 $\xi_k(z,\zeta)$, 满足下列条件:

(iv) $\xi_k(z,\zeta) \in T^*_z(M)$,$z \in D \cup \theta_k$, $\zeta \in \theta_k$, $k = 1, \cdots, N$.

(v) $\xi_k(z,\zeta)$ 关于 $z\in D\cup\theta_k$ 全纯， $k=1,\cdots,N.$

(vi)

$$\Phi_k(z,\zeta)=\langle\xi_k(z,\zeta),\eta(z,\zeta)\rangle, z\in D\cup\theta_k,\zeta\in\theta_k,k=1,\cdots,N. \qquad (1.11)$$

设 $F$ 为 $E$ 上的 $C^\infty$ 度量，它诱导一反线性映射 $\mu:E\to E^*,\eta\mapsto\langle\cdot,\eta\rangle_F$，设 $D$ 为 $E$ 关于 $F$ 的联络， $D^*$ 为 $E^*$ 关于度量 $F^*$ 的联络，而 $F^*$ 是 $F$ 在 $E^*$ 上诱导的. 记 $\widehat{\eta}$ 为 $C^\infty$ 截面： $M\times M\to E^*(M\times M)$, 它为 $\widehat{\eta}=\mu\circ\eta$ 定义，使得下述条件满足： $\forall\eta\in E(M\times M)$, 有 $\langle\mu\eta,\eta\rangle_F\geq 0$, 并且映射 $\|\eta(z,\zeta)\|_\mu:=(\langle\mu\eta,\eta\rangle_F)^{\frac{1}{2}}$， $\eta\in E(M\times M)$, 在 $E(M\times M)$ 每一纤维上定义一范数，记 $\langle\mu\eta,\eta\rangle_F=|\eta(z,\zeta)|_F^2$.

在 $M\times M\times\triangle$, 记对偶丛 $E^*(M\times M)$ 关于映射 $(z,\zeta,\lambda)\mapsto(z,\zeta)$ 的拉回为 $\widetilde{E}^*(M\times M\times\triangle)$. 记向量丛 $E(M\times M)$ 的度量 $F$ 在 $\widetilde{E}^*(M\times M\times\triangle)$ 上诱导的度量为 $\widetilde{F}^*$, 设 $\Delta$ 为 $\widetilde{E}^*(M\times M\times\triangle)$ 上关于度量 $\widetilde{F}^*$ 的联络，它关于度量是全纯的.

记 $C_k^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*)$ 为 $M\times M\times\triangle$ 上取值于 $\widetilde{E}^*=\widetilde{E}^*(M\times M\times\triangle)$ 的 $k$ 阶微分形式的空间，它有如下分解

$$C_k^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*)=\bigoplus_{p+q+r=k}C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*),$$

其中 $C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*)$ 表示关于 $(z,\zeta)$ 是 $(p,q)$ 型的，关于 $\lambda$ 是 $r$ 次的微分形式的空间.

联络 $\Delta$ 分解为 $\Delta=\Delta'+\Delta''$, 其中

$$\begin{aligned}\Delta':C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*)&\longrightarrow C_{p+1,q,r}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*),\\ \Delta'':C_{p,q,r}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*)&\longrightarrow C_{p,q+1,r}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*)\\ &\qquad\bigoplus C_{p,q,r+1}^\infty(M\times M\times\triangle,\widetilde{E}^*).\end{aligned}$$

对在 $D\times S_K\times\triangle_{0K}$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\triangle_{0K}$ 的所有使得 $\langle\xi_k(z,\zeta),\eta(z,\zeta)\rangle\neq 0$的$(z,\zeta,\lambda)$ 定义

$$t^*(z,\zeta,\lambda):=\lambda_0\frac{\widehat{\eta}(z,\zeta)}{|\eta(z,\zeta)|_F^2}+\sum_{k\in K}\lambda_k\frac{\xi_k(z,\zeta)}{\langle\xi_k(z,\zeta),\eta(z,\zeta)\rangle}. \qquad (1.12)$$

由 $\eta$和$\xi_k,(k\in K)$ 的性质可知, 映射 $(z,\zeta,\lambda)\mapsto t^*(z,\zeta,\lambda)$ 在 $D\times\partial D\times\triangle$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\triangle$ 上定义 $\widetilde{E}^*(M\times M\times\triangle)$ 的一个 $C^1$ 截面. 由此微分式

$$\widetilde{\Omega}[t^*,\widehat{\eta},\eta](z,\zeta,\lambda)\Lambda=\frac{t^*\wedge D\eta}{n!(2\pi i)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)(-1)^k(\Delta''t^*\wedge D\eta)^{n-k-1}\wedge\widetilde{\Theta}^k \quad (1.13)$$

在 $D\times\partial D\times\triangle$ 的某一邻域 $\subseteq D\times M\times\triangle$ 上是连续的. 记

$$\widetilde{\Omega}[t^*,\widehat{\eta},\eta](z,\zeta,\lambda)\Lambda=\sum_{1\le p\le n,1\le q\le n-1}\Omega_{p,q}(z,\zeta,\lambda),$$

并令 $\Omega_{p,-1}=\Omega_{p,n}=0$, 其中 $\Omega_{p,q}(z,\zeta,\lambda)$ 是 $\widetilde{\Omega}[t^*,\hat{\eta},\eta](z,\zeta,\lambda)\Lambda$(简记为 $\widetilde{\Omega}(z,\zeta,\lambda)$) 中关于 $z$ 是 $(p,q)$ 型的分量. 对于复流形上具有逐块 $C^1$ 边界的有界域, 文 [12] 证明了下述

**引理** 1.1[12] 假设 $M$ 为一 $n$ 维复流形, $D$ 为 $M$ 中一有界域, 具有逐块 $C^1$ 边界, $f\in C_{(p,q)}(\overline{D}),\bar{\partial}f$ 也在 $\overline{D}$ 连续, $0\le p\le n,1\le q\le n$, 那么

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q}f(z)=&\bar{\partial}_z\Big[\sum_{|K|\le n-q}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q-1}(z,\zeta,\lambda)\\&+\int_{D\times\triangle_0}f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q-1}(z,\zeta,\lambda)\Big]\\&-\Big[\sum_{|K|\le n-q-1}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q}(z,\zeta,\lambda)\\&+\int_{D\times\triangle_0}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q}(z,\zeta,\lambda)\Big]\\&+(-1)^{p+q+1}\sum_{|K|\le n-q}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f(\zeta)\wedge Q_{p,q}(z,\zeta,\lambda)\\&+\int_{D\times\triangle_0}f(\zeta)\wedge C_n[\Theta]_{p,q}(z,\zeta),z\in D\end{aligned}$$

特别地, 如果加上条件 $\Theta e=D^2e=0,\bar{\partial}f=0$, 那么

$$g(z)=(-1)^{p+q}\Big[\sum_{|K|\le n-q}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\triangle_{0K}}f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q-1}(z,\zeta,\lambda)+\int_{D\times\triangle_0}f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q-1}(z,\zeta,\lambda)\Big],$$

是 $\bar{\partial} g = f$ 在 $D$ 中的连续解，其中 $Q_{p,q}(z,\zeta,\lambda)$ 和 $C_n[\Theta]_{p,q}(z,\zeta)$ 分别为 $Q[t^*,\widehat{\eta},\eta](z,\zeta,\lambda)\Lambda := d\widetilde{\Omega}[t^*,\hat{\eta},\eta](z,\zeta,\lambda)\Lambda$ 和 $C_n[\Theta](z,\zeta)$ 中关于 $z$ 是 $(p,q)$ 型的分量， $d = \bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda$.