学校编码：10384　　　　分类号 ______ 密级 ______
学　　号：19020060153152　　　　UDC ______________

厦门大学

博 士 学 位 论 文

p-Laplacian 发展方程的局部化性质和一维可压 Navier-Stokes 方程整体解存在性

Localization for the p-Laplacian Equation and Global Solution to the Compressible N-S System in 1D Case

梁 之 磊

指导教师：赵 俊 宁 教 授
专业名称：基 础 数 学

论文提交日期：2009 年 5 月
论文答辩日期：2009 年　月
学位授予日期：2009 年　月

答辩委员会主席：__________
评　　阅　　人：__________

2009 年 6 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目 录

Contents

摘 要

本论文的内容分为两部分.

第一部分主要讨论拟线性抛物方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + u^q, & (x,t) \in R^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in R^N, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

解的性质，得到的主要结果如下：

1. 对 Cauchy 问题 (0.0.1) 证明了解具有局部化性质，即：如果 $q \geq p-1$, 并且给定的初始函数 u_0 的支集是有界的，那么问题 (0.0.1) 的解 $u(x,t)$ 在存在时间 $[0,T)$ 内有一致有界的紧支集，并且对支集域上界大小给出估计. 这是一个有实际指导意义的结果，同时在数学上也是很有意思的一个问题. 该问题的困难主要来自于非线性源的存在，它可能使解产生 Blow-up 现象. 对另一类非常重要的数学模型 $u_t = \Delta u^m + u^q$, 高维情况下的局部化问题曾一度在 [1] 作为公开问题提出来，直到 2004 年才被 C. Gui and X. Kang[2] 给出了详细的证明. 我们的结果是在此基础上给出了 p-Laplacian 发展方程解局部化性质的证明. 此外，如果在对初始 u_0 做一些额外的限制，我们还证明了解 u 在无穷远处 ($|x| \to \infty$) 的一致衰减性.

2. 讨论 (0.0.1) 解的 Blow-up 问题, 给出了 Blow-up 集合的分类: 当 $1 < q < p-1$ 时， Blow-up 集合是整个空间；当 $q = p-1$ 时， Blow-up 集合测度是正有界的.

3. 在一定条件限制下，讨论解的 Blow-up 速率.

本文第二部分考虑一维可压 Navier-Stokes 方程 (理想气体) 的 Cauchy 问题，讨论了整体解的存在性. 该问题在 Lagrangian 坐标下表示为

$$\begin{cases} v_t = u_x, \\ u_t + R(\frac{\theta}{v})_x = (\mu\frac{u_x}{v})_x, \\ C_v\theta_t + R(\frac{\theta}{v})u_x = (\kappa\frac{\theta_x}{v})_x + (\mu\frac{uu_x}{v})_x, \\ (v,u,\theta)(x,0) = (v_0,u_0,\theta_0) \to (v_\pm,u_\pm,\theta_\pm), \qquad x \to \pm\infty, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

且初始的 v_0, θ_0 满足正的上下界条件：

$$0 < m \leq v_0,\ \theta_0 \leq M < \infty.$$

该 Cauchy 问题整体解的存在性结果目前是不清楚的, 除非额外添加限定条件: $u_- \leq u_+$, $\theta_- = \theta_+$. 遗憾的是，如果完全去掉这个限制， (0.0.2) 整体解存在性的证

明似乎非常困难，我们希望减弱这个限制条件，这里我们来寻找差值 $|\theta_- - \theta_+|$ 如何的依赖于最大存在时间 T (目前我们仍在对此结果进行修改).

关键词: p-Laplacian 方程；强非线性源；局部化； Blow-up; Navier-Stokes 方程.

Abstract

This thesis is divided into two parts.

The former part concerns the following quasi-linear equation

$$\begin{cases} u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + u^q, & (x,t) \in R^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in R^N, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

and we obtained the following results:

1. For the Cauchy problem (0.0.1), we proved the Localization for the solution u. i.e. under the assumption $q \geq p-1$, the solution $u(x,t)$ to the (0.0.1) is strictly localized for all exist time $t \in [0,T)$, provided the initial u_0 is compactly supported. This problem is very interesting in mathematics and has important implications in physics. The main difficulties rise from the nonlinear reaction term, which may cause Blow-up. As far as the porous medium type equation, $u_t = \Delta u^m + u^q$, is concerned, such a result is obtained in [1] for the one dimensional case, but left as open for high diemnsional cases, untill C. Gui and X. Kang presented the detailed proof in [2] in 2004. In light of some ideas in [2], we obtained the similar result for the evolution p-Laplacian equation. Additionally, we prove the uniform decay estimate at spacial infinite.

2. We classify the Blow-up set: in case of $1 < q < p-1$, the Blow-up set should be the whole space, while for $q = p-1$, the Blow-up set is positive and bounded.

3. Finally, we discuss the Blow-up rate, and obtain some results.

The latter one is about the existence of global solution to the compressible full flow system, which can be governed in the Lagrangian coordinates by the following

equations (restricted to the ideal gas)

$$\begin{cases} v_t = u_x, \\ u_t + P_x = (\mu \frac{u_x}{v})_x, \\ (e + \frac{1}{2}u^2)_t + (Pu)_x = (\kappa \frac{\theta_x}{v})_x + (\mu \frac{uu_x}{v})_x, \\ (v, u, \theta)(x, 0) = (v_0, u_0, \theta_0) \to (v_\pm, u_\pm, \theta_\pm), \qquad x \to \pm\infty, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

and the initial data v_0, θ_0 are bounded from up and below, i.e.

$$0 < m \leq v_0,\ \theta_0 \leq M < \infty.$$

The global existance of solution to (0.0.2) is unclear up to the present, unless the assumption $u_- \leq u_+$ and $\theta_- = \theta_+$ are made. Here we want to find that how the difference $|\theta_- - \theta_+|$ relies on the most time T.

Keywords: p-Laplacian Equation; Localization; Nonlinear Source; Blow-up; Navier-Stokes Equation.

第一章 具强非线性源的 p-Laplace 方程

§1.1 引言和主要结果

本章主要讨论如下的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + u^q, & (x,t) \in R^N \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in R^N, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $N \geq 1$, $p > 2$, $q > 0$, 最大存在时间 $0 < T \leq \infty$, 初始非负函数 $u_0(x)$ 是局部可积分的.

问题 (1.1.1) 描述的是非 Newton 流体 (例如拟塑性流体) 在均匀、各项同性的刚体多孔介质中单向流动的数学模型，有时也简单称为非 Newton 渗流方程. 当 $p > 2$ 时，方程对应为慢速扩散，此时解 u 可能出现退化现象 (当 $1 < p < 2$ 时，对应为快速扩散). 因此 (1.1.1) 一般不存在古典解，我们通常只定义它在积分意义下的弱解：

定义 1.1.1. *属于空间 $C_{\mathrm{loc}}(R^N \times (0,T)) \cap L^p(0,T; W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(R^N))$ 的非负函数 $u := u(x,t)$ 被称为问题 (1.1.1) 的解，如果下面的积分等式*

$$\int_0^T \int_{R^N} \left(u\phi_t - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi + u^q \phi\right) dxdt + \int_{R^N} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0,$$

对所有的 $\phi \in C_0^\infty(R^N \times [0,T))$ 都成立.

如果没有后面的非线性项 u^q, 问题 (1.1.1) 被称为标准的 p-Laplacian 发展方程. 此时退化方程 (1.1.1) 的一个重要性质是解的有限传播性. 即，如果初始函数 u_0 的支集有界，那么解的支集 $\operatorname{supp} u(\cdot,t)$ 随着时间 t 是单调不减的，并且对任意给定的 $t \in (0,\infty)$, $\operatorname{supp} u(\cdot,t)$ 是有界的.

如果带有非线性项 u^q, 通常被叫作“热源”项，此时方程 (1.1.1) 可能发生“爆破” (Blow-up) 现象.

定义 1.1.2. *我们说 (1.1.1) 的解发生 Blow-up: 如果存在时间 $T < \infty$, 使得对所有的 $t \in (0,T)$, 解 $u(\cdot,t)$ 是有界的，但*

$$\lim_{t \to T^-} \max u(\cdot,t) = \infty.$$

为我们熟知的结果是：当 $0 < q \le 1$, (1.1.1) 存在整体解；当 $1 < q \le p-1+\frac{p}{N}$ 时， (1.1.1) 的解发生 Blow-up 现象；当 $p-1+\frac{p}{N} < q$ 时， (1.1.1) 的解整体存在或者发生 Blow-up 现象，这取决于初始函数 u_0 的大小. 本章考虑带有非线性源的问题 (1.1.1), 研究 Blow-up 解 u 的传播局部性和一些其他的问题.

参照文献 [1], 给出下面的定义

定义 1.1.3. *称问题 (1.1.1) 中的 Blow-up 解 u 具有* **严格局部性质**, *如果集合*

$$S(u) = \{x \in R^N \mid \limsup_{t\to T^-} u(x,t) > 0\}$$

是有界的；而具有 **有效局部性质**, *如果集合*

$$B(u) = \{x \in R \mid \exists\, t_n \to T-,\ x_n \to x\ s.t.\ u(x_n,t_n) \to \infty (n\to\infty)\}$$

是有界的，这里 $B(u)$ 记做解 u 的 Blow-up 集合.

现在叙述我们这一章的主要结果如下：

首先是 Cauchy 问题 (1.1.1) 解的局部化性质.

定理 1.1.4. 严格局部性质. *设 $q \ge p-1$, 且初始函数 $u_0(x)$ 具有紧支集，$T < \infty$ 是 Cauchy 问题 (1.1.1) 的最大存在时间，那么解 u 在存在时间 $t \in [0,T)$ 具有一致的紧支集，即存在某个 $R^* > 0$, 使得*

$$\operatorname{supp} u(x,t) \subset B(0,R^*),$$

其中 R^* 仅依赖于 p,q,N,T 和 u_0.

对解的支集域上界进行估计，得到如下的

定理 1.1.5. 支集域上界估计. *设 $q > 2p-1$, 那么存在不依赖于 K,T 的常数 C_1, C_2, 使得定理 1.1.4 中的 R^* 满足不等式*

$$R^* \le C_1 K + C_2 T^m, \tag{1.1.2}$$

这里 $m = \frac{q-p+1}{p(q-1)}$, 常数 $K > 0$ 使得 $\operatorname{supp} u_0 \subset B(0,K)$, 最大存在时间 $T < \infty$.

定理 1.1.6. 一致衰减估计. 设 $q>p-1$, 且初始函数 $u(x,0)=u_0(|x|)$ 是径向不增的，并且在 $|x|\to\infty$ 时满足 $u_0(|x|)<C_s|x|^{-\frac{p}{q-p+1}}$, 那么存在一充分大的 $R_1^*>0$, 当 $|x|\geq 2R_1^*$ 时，下面不等式

$$u(x,t)\leq C_s|x|^{-\frac{p}{q-p+1}}, \tag{1.1.3}$$

对所有的 $t\in[0,T)$ 一致成立.

接下来讨论 Blow-up 集合

定理 1.1.7. 全空间 *Blow-up*. 设 $1<q<p-1$, 那么 *Cauchy* 问题 *(1.1.1)* 的所有非平凡解 u 都发生 *Blow-up* 现象，并且 *Blow-up* 集合是整个空间，即

$$B(u)=R^N.$$

定理 1.1.8. 有界区域 *Blow-up*. 设 $q=p-1$, 如果具有紧支集的初始 $u_0(x)$ 取的适当大，那么 *Cauchy* 问题 *(1.1.1)* 的解 u 发生 *Blow-up*, 并且 *Blow-up* 集合测度是一正有界的，即

$$0<\mathrm{meas}B(u)<\infty.$$

最后我们关心解的 Blow-up 速率问题

定理 1.1.9. 设 $q>p-1$, $T<\infty$ 是问题 *(1.1.1)* 解 u 的 *Blow-up* 时间，假设 $u_0(x)=u_0(|x|)$ 径向单调不增，那么对所有的 $t\in[0,T)$ 和任意小的 $\delta>0$, 满足

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leq C(\delta)(T-t)^{-\frac{1}{q-1}},\quad x\in R^N\setminus B(0,\delta), \tag{1.1.4}$$

这里常数 $C(\delta)$ 是依赖于 δ 的常数，且 $B(x_0,\rho)=\{x\in R^N;\ |x-x_0|<\rho\}$.

注 1.1.9. 如果 $p-1<q<p-1+\frac{p}{N}$, 那么对所有的 $t\in(0,T)$,

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty\leq C(t^{-\frac{1}{q-1}}+(T-t)^{-\frac{1}{q-1}}).$$

详细的证明可以参考 *[3]*,*[4]* 和 *[5]*.

定理 1.1.10. 设 $q > p-1$, $T < \infty$ 是问题 *(1.1.1)* 解 u 的 *Blow-up* 时间，那么存在某常数 $C > 0$, 使得对所有的 $0 < t < T$, $x_0 \in R^N$, 有

$$\int_{B(x_0,1)} u(x,t)dx \le C((T-t)^{-\frac{1}{q-1}}; \tag{1.1.5}$$

$$\int_t^T \int_{B(x_0,1)} u^q dxdt \le C(T-t)^{-\frac{1}{q-1}}. \tag{1.1.6}$$

这一章是重点来研究退化方程 (1.1.1) 解的局部化性质，首先来介绍这类问题的研究背景和历史．我们指出另一个重要的退化扩散方程

$$u_t = \triangle u^m + u^q \tag{1.1.7}$$

在这一问题研究上的进展 (同样假定 u_0 支集有界)：对于一维的特殊情形， V.A. Galaktionov 等人在 1995 年 (见 [1]) 利用“交界面比较定理” (intersectoin comparison technique) 对方程 (1.1.7) 证明了解的严格局部化性质；并且把高维的情况在 [1] 中作为公开问题提出来，在 2004 年，桂长风和康小松在 [2] 中对高维情形给出了正面的详细回答.

采用 [2] 中的部分思想, 我们在本章证明了 (1.1.1) 的解同样具有局部性质. 即当 $q \ge p-1$ 时，如果 (1.1.1) 的初始值 u_0 的支集有界，那么 Blow-up 解 u 在存在时间 $t \in (0,T)$ 内的传播是一致有界的, 并且对支集的传播区域作出估计; 当 $1 < q < p-1$ 时，我们证明解的 Blow-up 集合是全空间 R^N. 此外还考虑 Blow-up 解的一致衰减估计、解的 Blow-up 集合以及 Blow-up 速率等问题，并得到了一些结果．我们在证明过程中遇到的主要困难是无法构造出 (1.1.1) 具紧支集的特解，对于多孔介质方程的情形，这种特解在证明中是非常重要的 (见 [2]), 为此我们利用了 De-Giorgi 迭代技巧，从而避开了无法构造特解所带来的困难，证明过程中还会遇到的另一个困难是特征函数的无法使用，由于方程 (1.1.1) 的特点，由 Laplace 算子得到的特征函数在这里不能发挥任何作用，为克服这些困难，我们不得不对方程解的性质做更细致的分析.

§1.2 一些辅助性的引理

本小节给出后面证明所需要的一些技巧性变换和辅助引理

首先对方程 (1.1.1) 的解 u 做如下的自相似变换:

$$v(\xi,\tau)=(T-t)^{\frac{1}{q-1}}u(x,t), \tag{1.2.1}$$

其中

$$\xi=\frac{x}{(T-t)^m}\in R^N,\quad \tau=-\ln\frac{T-t}{T}\in[0,\infty),\quad m=\frac{q-p+1}{p(q-1)}>0,\quad q>p-1.$$

显然地,

$$\xi=T^{-m}e^{\tau m}x \qquad \text{and} \qquad T-t=Te^{-\tau}.$$

简单计算知函数 $v=v(\xi,\tau)$ 满足下面的

$$\begin{cases} v_\tau=\operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)-m\xi\cdot\nabla v-\frac{1}{q-1}v+v^q, & (\xi,\tau)\in R^N\times(0,\infty),\\ v(\xi,0)=T^{\frac{1}{q-1}}u_0(T^m\xi), & \xi\in R^N. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

此外, 注意到如果 $v(\xi,\tau)$ 与变量 τ 无关, 即 $v(\xi,\tau)=\theta(\xi)$, 那么 $\theta(\xi)$ 满足相应的椭圆方程

$$\operatorname{div}(|\nabla\theta(\xi)|^{p-2}\nabla\theta(\xi))-m\xi\cdot\nabla\theta(\xi)-\frac{1}{q-1}\theta(\xi)+\theta^q(\xi)=0. \tag{1.2.3}$$

对于一维情形下的方程 (1.2.3), 我们有下面的

引理 1.2.1. *(见文献 [6])* 设 $q>p-1$, 空间维数 $N=1$, 那么存在一正函数 $\theta_s=\theta_s(\xi)$ 使得

$$(|\theta_s'(\xi)|^{p-2}\theta_s'(\xi))'-m\xi\theta_s'(\xi)-\tfrac{1}{q-1}\theta_s(\xi)+\theta_s^q(\xi)=0,$$

$$\theta_s(0)=\theta_0>\theta_H:=\left(\tfrac{1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}},\quad \theta_s'(0)=0,\quad \lim_{\xi\to\infty}\theta_s(\xi)=0.$$

此外, 有 $C_s=C(p,q)>0$, 使得

$$\theta_s(\xi)=C_s|\xi|^{\frac{-p}{q-p+1}}(1+\rho(\xi)),$$

这里 $\rho(\xi)\to 0$ $(|\xi|\to\infty)$.

在初始函数 u_0 有紧支集的情况下，退化方程 (1.1.1) 有“径向不增”的性质

引理 1.2.2. 如果存在某个 $K>0$, 使得 $\text{supp}\ u_0 \subset B(0,K)$, 那么对所有的 $r>0$, 有

$$\sup_{x\in\partial B(0,\,r+2K)} u(x,t) \le \inf_{x\in B(0,\,r)} u(x,t), \qquad \forall\, t\in[0,T), \tag{1.2.4}$$

结合式 *(1.2.1)*, 上式等价于

$$\sup_{\xi\in\partial B(0,\,(r+2K)T^{-m}e^{\tau m})} v(\xi,\tau) \le \inf_{\xi\in B(0,\,rT^{-m}e^{\tau m})} v(\xi,\tau), \qquad \forall\,\tau\ge 0. \tag{1.2.5}$$

引理 1.2.2 **的证明**：思路来自于 [7].

不妨假定 $\text{supp}u_0(x) \subset B(0,K) \subset \{x\in R^N|\ x_n>0\}$. 令 $\tilde u(x',x_n;t) = u(x',-x_n;t)$, 那么

$$\tilde u(x',0;t) = u(x',0;t) \quad t\in(0,T),\ \ x'\in R^{N-1},$$

这里 u 表示 (1.1.1) 的解. 对 $x_n>0$ 而言，有

$$\tilde u(x',x_n;0) = u(x',-x_n;0) \equiv 0 \le u(x',x_n;0).$$

注意到函数 $\tilde u$ 也是 (1.1.1) 的解，所以在区域 $R^{N-1}\times R^+\times[0,T)$ 中利用比较原理，得到

$$u(x',-x_n;t) = \tilde u(x',x_n;t) \le u(x',x_n;t).$$

下面对固定的 $x_0\in B(0,r)$ 和 $x_1\in\partial B(0,r+2K)$, 定义

$$\Pi = \{x\in R^N; \langle x-\frac{1}{2}(x_0+x_1), x_0-x_1\rangle = 0\},$$

这里 $\langle,\rangle$ 表示 R^N 中的内积，那么 $dist\{\Pi,\ x_0\} = dist\{x_1,\ \Pi\}$. 这是因为

$$dist\{\Pi,\{0\}\} = \frac{1}{2}\frac{x_1^2-x_0^2}{|\ x_1-x_0\ |} \ge \frac{(r+2K)^2-r^2}{|\ 4(r+K)\ |} \ge K,$$

点 x_0 和 $suppu_0$ 都在平面 Π 的同一侧，以及点 x_0 和 x_1 是关于 Π 的对称的，不难得到 $u(x_0)\ge u(x_1)$. 变换空间坐标方向, 然后重复上面的证明, 即可得到 (1.2.4) . □

引理 1.2.3. 存在正常数 $L < \infty$ 使得下面的问题

$$\begin{cases} (|\vartheta'|^{p-2}\vartheta')' - \frac{1}{p-2}\vartheta + \vartheta^{p-1} = 0, & |x_1| \le L, \\ \vartheta(0) = (\frac{p}{2(p-2)})^{\frac{1}{p-2}}, \quad \vartheta'(0) = 0, \\ \vartheta(\pm L) = 0, \quad \vartheta'(\pm L) = 0, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

存在唯一的对称解 $\vartheta := \vartheta(x_1)$, $x_1 \in R$.

引理 1.2.3 **的证明:**

我们只在区间 $[0, L]$ 上构造正解 $\vartheta := \vartheta(s)$, 满足:

$$\vartheta(s) \ge 0; \quad \vartheta'(L) = 0,\ \vartheta'(s) \le 0 \ \text{if}, \ \ s \in (0, L). \tag{1.2.7}$$

在方程 $(1.2.6)_1$ 两端乘上函数 ϑ' , 然后积分得

$$\frac{p-1}{p}[(-\vartheta')^p](x) + H(\vartheta(x)) = H(\vartheta(0)), \tag{1.2.8}$$

其中 $x \in \{x|\ \ \vartheta(x) \ge 0,\ \vartheta'(x) \le 0\}$, $H(s) = -\frac{1}{2(p-2)}s^2 + \frac{1}{p}s^p$.

由于 $\vartheta(0) = (\frac{p}{2(p-2)})^{\frac{1}{p-2}}$, 方程 (1.2.8) 等价于

$$\frac{p-1}{p}[(-\vartheta')^p](x) + H(\vartheta(x)) = H(\vartheta(0)) = 0, \tag{1.2.9}$$

即

$$(-\vartheta')(x) = \left(-\frac{p}{p-1}H(\vartheta(x))\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.2.10}$$

由此可得

$$x = -\int_0^x \left(-\frac{p}{p-1}H(\vartheta(y))\right)^{-\frac{1}{p}} d\vartheta(y) = \int_{\vartheta(x)}^{\vartheta(0)} \left(-\frac{p}{p-1}H(s)\right)^{-\frac{1}{p}} ds. \tag{1.2.11}$$

故一定存在 $C^1(0, L)$ 的函数 $\vartheta(x)$ 和常数 L, 使得 $\vartheta(L) = 0$. 此外如果在 (1.2.10) 中令 $x = L$, 我们可以看到 $\vartheta'(L) = 0$. 显然地, $\vartheta(x)$ 也一定满足 (1.2.6) 和 (1.2.7) 中的要求. □