Doctoral Dissertation

Researches of Interconnection Networks Based on Cayley Graphs

By

Chen Baoxing

Supervisor: Prof. Xiao Wenjun

Speciality: Algebra and Its Applications

Institution: Department of Math.
Xiamen University
Xiamen, P. R. China

March, 2004

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）:

年　月　日

摘　要

众所周知，凯莱图在计算机局域网及大规模并行处理系统的设计与分析中起着重要的作用. 超立方体网络 (hypercube), 双环网络 (double loop network), 星图 (star graph) 等都是凯莱图. 全文共分为五章，围绕凯莱网络中以下两部分的重要课题进行讨论： 1. 双环网络的寻径策略与最优设计； 2. 交错群网络与洗牌交换置换网络的路由算法. 下面是本文的一些主要结果：

1. 本文给出了一个方法用于构造 k- 紧优无限族 ($k \geq 1$), 并用此方法构造出了 4 族 3- 紧优无限族， 3 族新的 4- 紧优无限族， 3 族 5- 紧优无限族及 2 族 6- 紧优无限族. 另外我们利用计算机搜索还找到了 27 族新的 0- 紧优无限族， 26 族新的 1- 紧优无限族， 8 族新的 2- 紧优无限族， 2 族 3- 紧优无限族.

2. 本文给出了一个方法用于构造奇异 1- 紧优无限族. 我们用此方法构造出 3 族奇异 1- 紧优无限族及 1 族奇异 2- 紧优无限族.

3. 利用预先计算出来的 L- 形瓦的四个参数及同余方程 $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod{n}$ 的一个解，我们给出了有向双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ 的时间复杂性为常数的最优路由算法. 也就是经过常数时间的计算便可得到任意两点间的一条最短路径.

4. 对于一个给定的正整数 n, 本文给出了一个算法用于求出一个 k- 紧优的双环网络 $G(n; 1, s)$, 该算法的时间复杂性为 $O(k^{2.5}n^{0.25}\log\ n)$.

5. 利用预先计算出来的 L- 形瓦的四个参数及同余方程 $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod{n}$ 的一个解，我们给出了无向双环网络 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ 的时间复杂性为常数的最优路由算法. 也就是经过常数时间的计算便可得到任意两点间的一条最短路径.

6. 我们给出了无向双环网络 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ 的直径公式，此公式用 L- 形瓦的四个参数表示.

7. 我们给出了交错群网络 AN_n 的一个最优路由算法.

8. 我们给出了洗牌交换置换网络 SEP_n 的一个新的路由算法并给出了 SEP_n 直径下界的一个估计.

关键词：凯莱图；双环网络；交错群网络；洗牌交换置换网络 SEP; 直径； L- 形瓦； k- 紧优；路由；算法

Abstract

It is now well known that Cayley graphs play a very important role in the design and analysis of interconnection networks for parallel processing and of local area communication networks. The graphs such as hypercubes, double loop networks, star graphs are examples of Cayley graphs. The paper contains five chapters. It centres on the following two important parts of Cayley networks:

1. The design and optimal routing algorithm for double loop networks;

2. The routing algorithm for alternating group networks and shuffle-exchange permutation networks.

Here are some of main results in this paper:

1. We give a method to construct k-tight optimal infinite families. By using this method, we obtain four 3-tight optimal infinite families, three 4-tight optimal infinite families, three 5-tight optimal infinite families, and two 6-tight optimal infinite families. By the aid of computer, we also find 27 new 0-tight optimal infinite families, 26 new 1-tight optimal infinite families, 8 new 2-tight optimal infinite families, and 2 3-tight optimal infinite families.

2. We give a method to construct singular 1-tight optimal infinite families. By using this method, we obtain three singular 1-tight optimal infinite families and one singular 2-tight optimal infinite families.

3. For a given directed double loop network $G(n; s_1, s_2)$, by computing four parameters of the L-shape tile and a solution of $s_1 x + s_2 y \equiv 1 \pmod n$ in advance, we give an optimal routing algorithm for $G(n; s_1, s_2)$ which requires constant processing time to find a shortest path between any two nodes.

4. For a given positive integer n, we give an $O(k^{2.5} n^{0.25} \log\ n)$ algrithm to find a k-tight optimal double loop network $G(n; 1, s)$.

5. For a given undirected double loop network $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$, by computing four parameters of the L-shape tile and a solution of $s_1 x + s_2 y \equiv 1 \pmod n$ in

advance, we give an optimal routing algorithm for $G(n;\pm s_1,\pm s_2)$ which requires constant processing time to find a shortest path between any two nodes.

6. We give a diameter formula for an undirected double loop network $G(n;\pm s_1,\pm s_2)$, which can be represented by four parameters of the L-shape tile.

7. An optimal routing algorithm is presented for the new alternating group network AN_n.

8. A new routing algorithm is proposed for the shuffle-exchange permutation network SEP_n and a lower bound diameter estimation is given for this network.

Key Words: Cayley graph; Double loop network; Alternating group network; Shuffle-exchange permutation network; Diameter; L-shape tile; k-tight optimal; Routing; Algorithm

目　录

Contents

序　言

自从英国数学家凯莱 (A. Cayley)[33] 在 1895 年首先提出用群来构造图以后，对凯莱图的研究就持续不断，特别是 S. B. Akers 与 B. Krishnamurthy [69] 提出把凯莱图作为对称互连网络模型之后，人们对凯莱图的研究更是有增无减，许多新的互连网络模型被提出来研究，比如：星图 (star graph)[1,47,60,62,66,69,72−74,93]，交错群图 (alternating group graph)[20,42−44,92,97,108]，薄煎饼图 (pancake graph)[69,81]，洗牌交换置换网络 (shuffle-exchange permutation network)[75,103]，墙式网托 (wall torus)[4,8]，超圆环面 (super-torus)[31,104]，蜂窝网络 (honeycomb networks)[70] 等. 一些网络随着网络的结点数的增加，其每个结点的度也随着增加，比如：超立方体网络 [16,47,62,64]，星图网络，交错群网络，薄煎饼图等. 然而有不少网络是固定度的互连网络，比如：双环网络 [2,3,6,9−15,17,21−30,32,38−41,45,48−57,59,68,71,82−86,96,109−112]，三环 (或者多环) 网络 [28,45,98,99]，洗牌交换网络 [4]，墙式网托，超圆环面，旋转交换网络 [7,107]，蜂窝网络， de Bruijn 网络 [34,46,76]，M$\ddot{o}$ebius 图 [79] 等. 因为顶点的度对应于组件的可供使用的输入与输出端口 (I/O) 的数目，每个组件的物理连接受限于该组件的端口数目，小顶点度意味着小的物理连接，从而减少网络的建造成本，所以固定度的互连网络倍受青睐.

本文研究的重点是双环网络的寻径策略及最优设计. 双环网络是循环图中的一种，它广泛应用于计算机局域网及大规模并行处理系统.

自从 1974 年 C. K. Wong 与 D. Coppersmith[6] 利用 L- 形瓦证明了有向双环网络 $G(n;1,s)$ 的直径大于或等于 $\lceil\sqrt{3n}\rceil-2$ 以后，有向双环网络与 L- 形瓦便形影不离，利用 L- 形瓦来构造 k- 紧优无限族，利用 L- 形瓦来计算双环网络的直径，利用 L- 形瓦来研究双环网络的路由等.

C. Ying, F. K. Hwang [11] 给出了一个时间为 $O(\log\ n)$ 的算法用于计算有向双环网络 $G(n;s_1,s_2)$ 的直径，本文也给出了一个新的算法. 虽然我们算法的时间复杂性与文献 [11] 一样为 $O(\log\ n)$，但我们的算法易于分析，原因在于我们利用平行四边形为工具来计算双环网络的直径.

对于 $\min\{d(n;1,s) \mid 2 \leq s < n\}$, 这里 $d(n;1,s)$ 表示有向双环网络 $G(n;1,s)$ 的直径， F. K. Hwang 与 Y. H. Xu [30] 证明了当 $n \geq 6348$ 时，其上界为：$\sqrt{3n} + 2\sqrt[4]{3n} + 5$. 1996 年 Rödseth [61] 证明了当 $n \geq 1200$ 时，其上界为：$\sqrt{3n} + \sqrt[4]{3n} + 2.5$.

对于 L- 形瓦 $L(n;l,h,x,y)$ 的两个参数 x 与 y 差的绝对值 $|x-y|$ 的估计，P. Esque, F. Aguilo, M. A. Fiol [63] 证明了：当 L- 形瓦 $L(n;l,h,x,y)$ 是 0- 紧瓦时， $|x-y| \leq 3$. F. Aguilo, M. A. Fiol [23] 证明了：当 L- 形瓦 $L(n;l,h,x,y)$ 是 k- 紧瓦时， $|x-y|$ 的上界为 $O(k)$. 我们证明了：对于 k- 紧优的正整数 n, 若 L- 形瓦 $L(n;l,h,x,y)$ 是 k- 紧的，则 $|x-y| \leq 2k+6$. 利用这个结论我们给出了一个时间复杂性为 $O(k^{2.5}n^{0.25}\log\ n)$ 算法用于寻找 k- 紧优的双环网络 $G(n;1,s)$. 我们的算法优于刘焕平，杨义先，胡铭曾 [51] 在 2001 年给出了一个时间复杂性为 $O(n\log\ n)$ 的算法.

F. K. Hwang 与 Y. H. Xu [30] 构造了紧优有向双环网络无限族，紧接着 P. Erdos, D. F. Hsu[65], 李乔，徐俊明，张忠良 [54], P. Esque, F. Aguilo, M. A. Fiol [63] 等也构造了许多紧优与几乎紧优的双环网络无限族，文献 [54] 给出了 69 族紧优双环网络无限族与 33 族几乎紧优双环网络无限族. 徐俊明 [82] 在 1999 年给出了两族不含紧优与几乎紧优的无限族，随后构造出了 9 族 2- 紧优的双环网络无限族 [83,86], 紧接着在 2003 年构造出了 1 族 4- 紧优的双环网络无限族 [85]. 从文献 [83, 86, 85] 可看出当 $k \geq 2$ 时，欲构造 k- 紧优的双环网络无限族并非易事. 本文给出了一个方法用于构造 k- 紧优双环网络无限族 $(k \geq 1)$, 利用此方法可以比较容易地构造出 k- 紧优无限族. 利用这个方法我们构造了 4 族 3- 紧优无限族， 3 族新的 4- 紧优无限族， 3 族 5- 紧优无限族及 2 族 6- 紧优无限族. 另外利用计算机搜索我们还找到了 27 族新的 0- 紧优无限族， 26 族新的 1- 紧优无限族， 8 族新的 2- 紧优无限族， 2 族 3- 紧优无限族.

徐俊明 [84], F. Aguilo, E. Simo, M. Zaragoza[22] 给出了构造奇异 0- 紧优双环网络无限族的方法，并给出了若干族奇异 0- 紧优双环网络无限族. 然而构

造奇异 1- 紧优双环网络无限族比构造奇异 0- 紧优双环网络无限族要难得多，本文给出了一种行之有效的方法用于构造奇异 1- 紧优无限族．我们用此方法构造出 3 族奇异 1- 紧优无限族．根据此方法我们也构造出了 1 族奇异 2- 紧优无限族.

信息路由是通信网络的基本功能．若每个信息总是沿着从信源到信宿的最短路传送，则称为最优信息路由．对于有向双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ 的路由及容错路由算法的研究，有许多学者对此进行了研究，比如：李晓明，方滨兴 (1990)[55], 冯斐玲，金林钢 (1994)[24], 刘焕平，朱延功，杨义先 (1999)[52], 陈忠学，靳蕃 (2001)[12], C.-y. Chou, D. J. Guan, K.-l. Wang(1998, 1999)[10,14], 陈协彬 (2003)[9]. 在文献 [14] 中的最优路由算法动态地确定信息应传送的下一个结点，其时间复杂性为 $O(d)$, 这里 d 是信源到信宿的距离．文献 [52] 的最优路由算法的时间复杂性为 $O(D)$, 这里 D 是 $G(n; 1, s)$ 的直径．文献 [12] 给出的算法类似于文献 [52], 不过要在每个结点预先存储所有非正常结点的编号及结点 0 到这些结点的距离，以便提高寻径效率．最近陈协彬 [9] 对于步长有限制的双环网络给出了时间复杂性为常数的最优路由算法，此算法适用于许多双环网络，但并不能对所有的双环网络都适用. 我们的一个工作是利用预先计算出来的 L- 形瓦的四个参数及同余方程 $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod n$ 的一个解 $(\overline{x}, \overline{y})$, 给出了双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ 的时间复杂性为常数的最优路由算法，也就是通过常数时间的计算便可得到从源结点到任意其它结点的最短路径.

Y. Cheng, F. K. Hwang[89] 给出了 $G(n; \pm s_1, \pm s_2)$ 的一个最优路由算法，利用预先计算好的 12 个参数，常数处理时间就可动态地确定信息应传送的下一个结点． K. Mukhopadhyaya, B. P. Sinha [48] 给出了 $G(n; \pm 1, \pm s)$ 的最优路由算法，其时间复杂性为 $O(\sqrt{n})$, 此算法给出了任意两点间的一条最短路径. N. Chalamaiah 与 B. Ramamurty[59] 给出了 $G(n; \pm 1, \pm s)$ 的一个时间复杂性为 $O(s/g + \log\ s)$ 的最优路由算法，这里 $g = \gcd(n, s)$. 我们利用预先计算好的 L-形瓦 4 个参数及同余方程 $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod n$ 的一个解 $(\overline{x}, \overline{y})$, 常数处理时

间就可计算出任意两点间的一条最短路径．我们的另一个主要工作是给出了无向双环网络 $G(n;\pm s_1,\pm s_2)$ 的直径公式，它可用 L- 形瓦 4 个参数表示，此结果未见报道过．另外我们还给出了一类无向双环网络 $G(n;\pm 1,\pm s)$ 的直径公式，此公式可用 n 与 s 的表达式表示．

人们对超立方体网络与星图网络进行了许多研究．而交错群网络作为星图网络可能的替代网络，也在 1993 年由 J. S. Jwo, S. Lakshmivarahan 和 S. K. Dhall[42] 首先提出来，他们定义了交错群网络 AG_n, 相继地有一些学者 [92,20] 对交错群网络 AG_n 进行了研究．

冀有虎 [44] 提出了一种新的交错群网络 AN_n, 此网络与 AG_n 比较，每个结点的度大约是旧网络的一半且直径与旧网络大致相同，因此新交错群网络的优越性显见．冀有虎 [44] 给出了此交错群网络的一个路由方案，然而此方案不完善．因为对于 AN_7 中的两个结点 $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&5&4&7&6\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&7\end{smallmatrix}\right)$, 此路由方案并不能给出这两个结点间的一条路径．本文给出了交错群网络 AN_n 的一个最优路由算法．

S. Latifi 等 [75] 在 1998 年提出了一种新的互连网络 - 洗牌交换置换网络 SEP_n, 它是基于对称群 S_n 的 Cayley 网络，是一种固定度 (度为 3) 的互连网络．该图的点连通度为 3, 即它是极大容错的 (maximally fault tolerance). 在 VLSI 实现方面，就正则性与容错性而言，该图比 de Bruijn 图或 Möebius 图 [79] 更加具有吸引力． S. Latifi 和 P. K. Srimani[75] 提出了一种简单的路由算法，得到了 SEP_n 直径 D 的估计， $D \leq (9n^2-22n+24)/8$. 我们给出了一种新的 SEP_n 路由算法，算法得到的此网络直径的上界估计为 $(7n^2-10n)/8$. 另外还给出了此网络直径下界的一个估计，并证明了： $D \geq 0.5n^2-n$.

第一章　基本概念

§ 1.1　网络的拓扑结构与图

计算机在人类社会的各个方面发挥着越来越大的作用，在计算机科学的迅猛发展中，不断地提出了许多重要的问题尚待解决．在并行处理领域，研究并行机中处理器连接的方式 (互连网络) 与路由问题是一个很重要而且基本的课题．

我们这里所说的互连网络是有更广泛的含义，泛指组件 (计算机子网络，计算机，计算机内部的处理器，存储器，通信设备，其它元件或设备) 集合与通信信道 (有线或无线的) 集合按一定的点对点方式相互连接所形成的系统．组件之间的连接方式是决定网络性能和价格比的一个重要因素，因此研究网络之间的连接方式显得尤为重要．网络中组件和组件之间的连接方式称为网络的拓扑结构．网络的拓扑结构是设计计算机互连网络或制造超大规模并行计算机系统的第一步，也是实现各种协议的基础，它对网络的性能、系统可靠性和费用都有重大影响．

在分析网络拓扑结构时，人们通常把网络中组件抽象成一个点，把通信信道抽象成两点之间的连线，那么该网络的拓扑结构就被抽象成一个图．研究网络的拓扑结构问题就归结为研究图的结构问题，换言之，图是网络拓扑结构的数学模型，我们可以通过图论的方法来研究网络的拓扑结构．

通常衡量一个互连网络好坏的标准是：对称性，可扩展性，低度，直径短，简单方便的最优路由，递归结构，平行路的存在性等．

凯莱 (Cayley) 网络作为一种正则、点对称的互连网络倍受人们的青睐，它在计算机互连网络的设计与分析中起着重要的作用．本文所研究的双环网络，交错群网络，洗牌交换置换网络均是凯莱图．

论文中总是把组件 (nodes) 与图的顶点 (vertices)，通信信道 (channels or links) 与图的边 (edges) 或弧 (arcs) 等同．并且，网络的拓扑结构，网络，图这三者指的是同一对象，不加以区分．

§ 1.2　基本定义与符号

为了给出图的严格定义，我们先引进下面的

定义 1.2.1: 设 V 是集合，称 V 的所有无序元偶的集合

$$V\cdot V=\{(u,v)\mid u,v\in V\}$$

为 V 和 V 的无序积. (所谓 (u,v) 是无序元偶，指的是 (v,u)=(u,v).)

称 V 的所有有序元偶的集合

$$V\times V=\{(u,v)\mid u,v\in V\}$$

为 V 和 V 的笛卡儿积. 记 $V_0=\{(v,v)\mid v\in V\}$.

定义 1.2.2: 称一对集合 V 和 E 为一个无向图 G, 记作 $G=(V,E)$, 如果 V 是一个非空有限集 (V 的元素叫做图 G 的顶点), 而 E 是 $V\cdot V$ 的一个子集 (E 的元素叫做图 G 的边). 如果 $E\subseteq V\cdot V\setminus V_0$, 则称图 G 为简单无向图.

定义 1.2.3: 称一对集合 V 和 E 为一个有向图 G, 记作 $G=(V,E)$, 如果 V 是一个非空有限集 (V 的元素叫做图 G 的顶点), 而 E 是 $V\times V$ 的一个子集 (E 的元素叫做图 G 的有向边或弧). 如果 $E\subseteq V\times V\setminus V_0$, 则称图 G 为简单有向图.

本文所讨论的图皆为简单无向图或简单有向图.

设 G 是一个有向 (或无向) 简单图. 我们将采用以下符号：

- $\mathbb{Z},\mathbb{Z}^+,\mathbb{R}$ 分别表示整数集，非负整数集，实数集.
- $<n>$ 表示集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$, 其中 n 是一个自然数.
- $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数，这里 $x\in\mathbb{R}$.
- $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，这里 $x\in\mathbb{R}$.
- $[x]$ 表示对 x 四舍五入得到的整数，$x\in\mathbb{R}$. 例如：$[3.67]=4,[-3.46]=-3$
- $V(G)$: 图 G 的顶点集.
- $E(G)$: 图 G 的边集 (或弧集).
- $\kappa(G)$: 图 G 的连通度.
- $d_G(u,v)$: 图 G 中从点 u 到点 v 的最短路径的长度.
- $d(G)$: 图 G 的直径. 定义为：图 G 中所有点对的距离的最大者，即 $d(G)$=max $\{d_G(u,v)\mid u,v\in V(G)\}$.

定义 1.2.4: 设 G 为有限群 (e 为 G 的单位元), S 是 G 的生成子集且满足下列条件： $e \notin S$, 则群 G 关于子集 S 的 Cayley 有向图 $X = Cay(G, S)$ 定义为： $V(X) = G$, $E(X) = \{(x, xg) \mid x \in G, g \in S\}$. 有向环网络，有向双环网络等均可看作是 Cayley 有向图.

定义 1.2.5: 设 G 为有限群 (e 为 G 的单位元), S 是 G 的生成子集且满足下列条件： (1) $e \notin S$, (2)$g^{-1} \in S$ 当且仅当 $g \in S$. 则群 G 关于子集 S 的 Cayley 无向图 $X = Cay(G, S)$ 定义为： $V(X) = G$, $E(X) = \{(x, xg) \mid x \in G, g \in S\}$.

熟知的环网络，无向双环网络，圆环面网络，超立方体网络，立方体连接圈，星图 (star graph) 等均可看作是 Cayley 无向图.

定义 1.2.6: 设 G 为有向图，若 G 的每一个顶点的出度与入度都等于 k, 则称 G 是 k- 正则的.

定义 1.2.7: 设 G 为无向图，若 G 的每一个顶点的度都等于 k, 则称 G 是 k- 正则的.

定义 1.2.8: 两个有向 (或无向) 图 G 和 H 称为同构的，如果存在一个双射 φ: $V(G) \to V(H)$ 使得 $(x, y) \in E(G)$ 当且仅当 $(\varphi(x), \varphi(y)) \in E(H)$. 双射 φ 称为 G 和 H 的一个同构映射. 如果 $G = H$, 则称 φ 为 G 的一个自同构映射.

定义 1.2.9: 有向 (或无向) 图 G 称为是点对称的，如果对于任意的 $x, y \in V(G)$, 均有 G 的一个自同构 φ, 使得 $\varphi(x) = y$. 有向 (或无向) 图 G 称为是弧 (或边) 对称的，如果对于任意的两条弧 (或边)$(x, y), (u, v) \in E(G)$, 均有 G 的一个自同构 φ, 使得 $\varphi(x) = u$, $\varphi(y) = v$.

定义 1.2.10: 一个有向 (或无向) 图 G 是 f- 容错的，如果对于任意的 $F \subseteq V(G)$, $|F| < f$, $G - F$ 仍是连通的. 图 G 的容错性 (fault tolerance) 定义为最大的 f, 使 G 是 f- 容错的.

定义 1.2.11: 设有向 (或无向) 图 G 是 k- 正则的，如果 $\kappa(G) = k$, 则称 G 是极大容错的 (maximally fault tolerant).

定义 1.2.12: 设 C 是有向 (或无向) 图 G 的一个圈，如果 $V(C) = V(G)$, 则称 C 为图 G 的一个 Hamilton 圈. 此时该图也称为 Hamilton 图.

本节中没有给出的符号和定义，我们将在适当的地方给出.

第二章　有向双环网络

§ 2.1　引　言

有向 (或无向) 双环网络具有如下优点：网络直径较小，易于扩展，具有对称性且有一定的容错能力. 因而这类网络广泛应用于计算机网，局域网及大规模并行处理系统. 对该问题的研究是当前局域网络和并行分布系统理论与应用中一个重要的课题. 许多学者对有向双环网络的研究感兴趣，他们的兴趣主要在最优双环网络，网络直径，与路由算法等.

设 $1 \leq s_1, s_2 < n$, $s_1 \neq s_2$. 有向双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ 是如下定义的有向图 (V, E): 其结点集是 $V = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, 弧集是 $E = \{i \to i + s_1 \pmod n, i \to i + s_2 \pmod n \mid i = 0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. 有向双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ 是强连通的充分必要条件是 $\gcd(n, s_1, s_2) = 1$. 事实上 $G(n; s_1, s_2)$ 是凯莱图 $Cay(\mathbb{Z}_n, \{s_1, s_2\})$. 本文所考虑的有向双环网络均是强连通的, 即 $\gcd(n, s_1, s_2) = 1$. 图 2.1.1 所示的是有向双环网络 $G(8; 2, 3)$.

欲研究 $G(n; s_1, s_2)$ 的直径 (或者路由) 只需考察从结点 0 到其它结点的距离 (或者路径). 为此在笛卡尔平面直角坐标系中，第一象限中的所有格点 (x, y) 按下列顺序排成序列： $(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), \cdots, (j,0), (j-1,1), (j-2,2), \cdots, (j-i,i), \cdots, (1, j-1), (0,j), \cdots$. 每个格点用它右上角的单位方格为代表，并且依次在每一方格 (x, y) 处放置数 $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, 其中 $k \equiv xs_1 + ys_2 \pmod n$. 如在此前数 k 已出现过，则空出此方格，考察下一个格点，直到数 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 都出现为止. 易知若数 k 位于方格 (x, y) 处，则 $G(n; s_1, s_2)$ 中从结点 0 到结点 k 的距离是 $x + y$. 已经证明 (参见 [6, 54]), 由 $G(n; s_1, s_2)$ 所确定的 n 个方格组成的构图呈图 2.1.2 所示的 L- 形区域 (矩形区域是特例).

定义 2.1.1: 如图 2.1.2 所示的 L- 形区域称为具有参数 (l, h, x, y) 的一个 L- 形瓦 (L-shape tile), 其中 l, h, x, y 都是整数，并规定 $l, h \geq 2$, $0 \leq x < l$, $0 \leq y < h$. 这个 L- 形瓦记为 $L(n; l, h, x, y)$. 用 $d(L(n; l, h, x, y))$(简记为 $d(L)$) 表示 $\max\{l + h - x - 2, l + h - y - 2\}$, 称为 $L(n; l, h, x, y)$ 的直径. 由 $G(n; s_1, s_2)$ 所确定的 L- 形瓦记为 $L(G(n; s_1, s_2))$.

用 $d(n; s_1, s_2)$ 表示双环网络 $G(n; s_1, s_2)$ 的直径.

如果 $L(n; l, h, x, y)$=$L(G(n; s_1, s_2))$, 则 $d(n; s_1, s_2) = \max\{l + h - x - 2, l + h -$

$y-2\}$.

C. Ying, F. K. Hwang[11] 给出了一个时间为 $O(\log\ n)$ 的算法用于计算有向双环网络 $G(n;s_1,s_2)$ 的直径.

令 $d(n)=\min\{d(n;s_1,s_2)\mid 1\le s_1,s_2<n\}$, $d_1(n)=\min\{d(n;1,s)\mid\ 1<s<n\}$, $lb(n)=\lceil\sqrt{3n}\rceil-2$. Wong 和 Coppersmith [6] 利用 L- 形瓦证明了 $d_1(n)\ge\lceil\sqrt{3n}\rceil-2$. 利用 L- 形瓦同样可证明 $d(n)\ge lb(n)$. 目前对 $d_1(n)$ 上界估计最好的结果是由 Rodseth[61] 给出的：当 $n\ge 1200$ 时， $d_1(n)\le\sqrt{3n}+\sqrt[4]{3n}+2.5$.

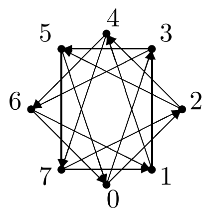

图 2.1.1 $G(8;2,3)$

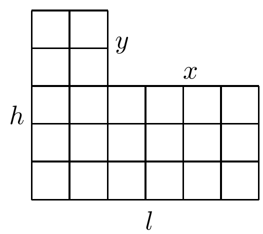

图 2.1.2 $L(n;l,h,x,y)$

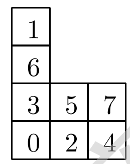

图 2.1.3 $G(8;2,3)$ 对应的 L- 形瓦

信息路由是通信网络的基本功能．若每个信息总是沿着从信源到信宿的最短路传送，则称为最优信息路由．对于双环网络 $G(n;s_1,s_2)$, 目前已有一些最优信息路由算法 [12,14,52]. 在文献 [14] 中最优路由算法动态地确定信息应传送的下一个结点，其时间复杂性为 $O(d)$, 这里 d 是信源到信宿的距离．文献 [52] 的最优路由算法的时间复杂性为 $O(D)$, 这里 D 是 $G(n;1,s_2)$ 的直径．文献 [12] 给出的算法类似于文献 [52], 不过要在每个结点预先存储所有非正常结点的编号及结点 0 到这些结点的距离，以便提高寻径效率．我们的一个工作是利用预先计算出来的 L- 形瓦的四个参数及同余方程 $s_1x+s_2y\equiv 1\pmod n$ 的一个解 $(\overline{x},\overline{y})$, 给出了双环网络 $G(n;s_1,s_2)$ 的时间复杂性为常数的最优路由算法，也就是通过常数时间的计算便可得到从源结点到任意其它结点的最短路径.

定义 2.1.2: 对于 $k\in\mathbb{Z}^+$, 若 $d(n;1,s)=d_1(n)=lb(n)+k$, 则称 $G(n;1,s)$ 为 k- 紧优的，也称 n 为 k- 紧优的．若 $d(n;s_1,s_2)=d(n)=lb(n)+k$, 则称 $G(n;s_1,s_2)$ 为 k- 紧最优的，也称 n 为 k- 紧最优的.

定义 2.1.3: 令 $k=d(n)-lb(n)$. 当 $d_1(n)=d(n)$ 时， n 称为非奇异 k- 紧