学校编号： 10384　　　分类号：________密级：________
学　　号： 200423058　　　UDC：________

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

相对于 SBPC- 相关幂零子群的特征标的稳定限制
Character stabilizer limits of a SBPC-related nilpotent subgroup

林 静

指导教师姓名： 曾 吉 文　教授

申请学位级别： 硕　士　学　位

专 业 名 称： 基　础　数　学

论文提交日期： 2007　年　5　月

论文答辩日期： 2007　年　　月

学位授予日期： 2007　年　　月

答辩委员会主席：________

评　　阅　　人：________

2007 年 5 月

Character stabilizer limits of a SBPC-related nilpotent subgroup

By

Jing Lin

Supervisor: Professor Jiwen Zeng

Speciality: Foundation Mathematics

Institution: College of Mathematics Science

Xiamen University

Xiamen,P.R.China

May, 2007

学 位 论 文

相对于 SBPC- 相关幂零子群的特征标的稳定限制

林　　静

厦 门 大 学

二 0 0 七 年 五 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目　　录

Contents

摘 要

群表示论是近代数学的一个重要分支，而特征标的理论是研究有限群常表示的最主要工具之一. Isaacs 在创立特征标理论时提出了特征标稳定限制的概念, 引入了特征标三元组的诱导子, 拟本原特征标三元组以及相对正规子群的特征标稳定限制的概念。本学位论文由这几个概念出发, 讨论了相对于一个特殊的正规子群的特征标的稳定限制之间的关系, 证明了对于一个有限群 G, $N \lhd G$, N 是相对 SBPC- 相关幂零群 (定义 3.2), 则相对于这样的正规子群 N 的 G 的不可约特征标的稳定限制有相同的次数.

本学位论文共分为三章.

第一章，我们对与论文有关的背景、研究方向以及发展动态进行介绍，并概述了本学位论文的主要工作.

第二章, 我们给出一些与论文有关的基本概念与重要结论, 为后一章奠定必要的基础.

第三章，我们首先定义了一个新的群，即 SBPC- 相关幂零子群，并举例说明这类群是存在的，从而表示本文的讨论是有意义的；其次，利用特征标三元组探讨了特征标的稳定限制与特征标三元组的拟本原诱导子之间的关系；最后通过对特征标的拟本原诱导子的讨论，说明了相对于一个特殊的正规子群的特征标的稳定限制之间的关系.

关键词： 稳定限制； Clifford 对应；特征标； SBPC- 相关幂零群

ABSTRACT

The representation of finite groups is an important branch of mordern mathematics. Character theory is one of the main tools of the representation of finite groups over the complex field. Isaacs put forward character stabilizer limits conception when he studied character theory of finite goups. Using the concepts of inductor of a character triple,stabilizer limits,and quasi-primitive character triple, Isaacs proved in his article[2],that all $N-$relative stabilizer limits of irrecducible characters of G have equal degrees, if N is a normal nilpotent subgroup of G.

After giving these concepts,we discuss another special kind of goup,that is SPBC-related nilpotent subgroup, and prove that the stabilizer limits of irrecducible characters of G relative to a SPBC-related nilpotent subgroup also have equal degree.

This academic dissertation is divided into three chapters altogether.

In chapter one, we introduce the groundwork of this text, also the research direction and the trends of the development.

In chapter two,we give some fundamental conceptions and important results related to the thesis.This can provide necessary preparation for the next chapter.

In chapter three,first we difine a new kind group,that is SBPC-related nilpotent subgroup,and give an example to show this kind of group is existential.Thus the discussion of this paper is sensible;second,using concept of primitive character triple, we discuss the relationship between the character stabilizer limits of a normal SBPC-related nilpotent subgroup and quasi-primitive character triple;third,by discussing the quasi-primitive character triple,we show the relationship between the stabilizer limits of a normal SBPC-related nilpotent subgroup.

Keywords: Stabilizer limit, Clifford correspondence, Characters, SBPC-related nilpotent group

第一章 引 言

设 G 为有限群， N 为 G 的一个正规子群，并且 $\theta \in Irr(N)$ 为 N 的一个复不可约特征标. 如果 θ 为 G- 不变的，即对任意 $g \in G$ 和 $n \in N$，均有 $\theta(gng^{-1}) = \theta(n)$，则称 (G, N, θ) 为一个特征标三元组. 再设 (H, M, φ) 也是一个特征标三元组，满足条件 $G = NH$ 且 $M = N \cap H$. 如果 $\theta = \varphi^N$，则称 (H, M, φ) 为 (G, N, θ) 的一个诱导子. 如下图所示：

$$\begin{array}{ccc} (N,\theta) & \to & G \\ \uparrow & & \uparrow \\ (M,\varphi) & \to & H \end{array}$$

特征标三元组是特征标理论中最为基本的研究对象之一，目前已经取得了大量深刻的成果. 其中值得注意的是， Dade [4] 和 Isaacs [2] 创立了特征标的稳定限制理论，其核心技术正是上述特征标三元组及其诱导子和稳定限制等概念. 为了叙述本文所研究的问题和内容，我们先介绍 Isaacs 所引入的拟本原的特征标三元组和特征标的稳定限制的定义.

定义 1.1[2] 设 (G, N, θ) 为一个特征标三元组，如果对每个 $K \lhd G$ 且 $K \leq N$，均有 θ_K 为齐次特征标，则称该特征标三元组为拟本原的.

定义 1.2[2] 如果 (H, M, φ) 为 (G, N, θ) 的一个诱导子，并且 (H, M, φ) 为拟本原的特征标三元组，则称 (H, M, φ) 为 (G, N, θ) 的一个拟本原的诱导子.

定义 1.3[2] 设 G 为有限群， $M \lhd G$,$\theta \in Irr(M)$,$\chi \in Irr(G)$，θ 是 χ_M 的不可约成分，记 $T = I_G(\theta)$，则有 $\eta \in Irr(T|\theta)$，使得 $\eta^G = \chi$，则称

η 为 χ 关于 θ 的 Clifford 对应.

本文所研究的复合 Clifford 对应是对 Clifford 对应的另一种推广，可以把它看成是多阶的 Clifford 对应. 下面就给出复合 Clifford 对应的定义.

可继续定义 1.3 的步骤，对于 $\eta \in Irr(T)$, 选取 $M_1 \lhd T$, 存在 $\theta_1 \in Irr(M_1)$ 且 θ_1 是 η_{M_1} 的不可约成分, 记 $T_1 = I_T(\theta_1)$, 则有 $\eta_1 \in Irr(T_1|\theta_1)$, 使得 $\eta_1^T = \eta$, 不断重复地进行此步骤，可得以下定义：

定义 1.4[2] 不断重复的进行定义 1.3 中的步骤，从每个稳定子群 T_i 得到的 $\eta_i \in Irr(T_i)$ 叫做 χ 的复合 Clifford 对应，记为 $CCC(\chi)$.

定义 1.5[2] 记 $(N,\theta) \leq (G,\chi)$, 表示 $N \leq G, \theta \in Irr(\chi_N)$, 按偏序关系把 $CCC(\chi)$ 中的极小元，称为 χ 的稳定限制.

由定义 1.5 可以看出， $CCC(\chi)$ 中的极小元即为 $CCC(\chi)$ 中的拟本原特征标，即此特征标限制到正规子群上是齐次的.

定义 1.6[2] 设 G 为有限群，若给定 G 的正规子群 N, 使得定义 1.4 的迭代过程中 M 的选择满足 $M \leq N$, 从而得到的复合 Clifford 对应就称为 χ 相对于 N 的复合 Clifford 对应，记为 $CCC_N(\chi)$. 而 $CCC_N(\chi)$ 中的极小元就称为 χ 相对于 N 的稳定限制.

在文献 [2] 中 Isaacs 通过证明当 N 是 G 的幂零正规子群， χ 相对于 N 的稳定限制与 (G,N,θ) 的拟本原的诱导子是一一对应的，从而证明了 G 的不可约特征标相对于 N 的稳定限制有相同的次数. 本文考虑另一类正规子群，即为正规 SBPC- 相关幂零子群 N, 这类群是可解群，但不一定是幂零群 (例子见后). 另一方面，对任意一个幂零群 N, 以及任意的

$\theta \in Irr(N)$,N 都是 θ- 相关幂零群 (定义 3.1), 但 N 不一定是 SBP 群 (定义 2.1). 所以本文研究的是不同于幂零群的另外一类正规子群，同样利用归纳法思想，证明对于这类正规子群 N, 仍然有同样的结论成立.

需要说明的是，本文所讨论的群均为有限群，特征标均为复特征标，所使用的符号和术语都是标准的，可参考文献 [1].

第二章 预备知识

在这一章里，为了读者阅读方便，我们先列出要用到的一些概念和已知结果，这些结果对于本论文以后主要定理的证明是重要的.

对任一有限群 G 和整除 $| G |$ 的素数 p 的某个方幂 p^a,G 至少有一个 p^a 阶的子群。从而可给出如下定义.

定义 2.1[5] 如果有限群 G 的真子群只有素数幂阶群，则称这种群为 SBP 群 (Sylow Best Possible).

引理 2.2[6] (Frattini 论断) 设群 G 作用在集合 Ω 上，并且 G 包含一个子群 N, 它在 Ω 上的作用是传递的，则 $G = G_\alpha N, \forall \alpha \in \Omega$, 其中 G_α 表示 α 在 G 中的稳定子群.

引理 2.3[2] 如果 $(H_1, M, \varphi), (H_2, M, \varphi)$ 均是 (G, N, θ) 的诱导子，则有 $H_1 = H_2$.

引理 2.4[3] 令 (H, M, φ) 是 (G, N, θ) 的诱导子，则 $Irr(H|\varphi)$ 与 $Irr(G|\theta)$ 之间存在一一对应.

引理 2.5[2] 设 (H, M, φ) 是拟本原特征标三元组且 M 幂零,则 $M/Z(\varphi)$ 交换.

引理 2.6[6] 有限群 G 的极小正规子群 N 必为同构单群的直积.

引理 2.7[1] (Clifford 定理) 设 G 为群， $N \lhd G$,$\chi \in Irr(G)$,θ 是 χ_N 的一个不可约分量且 $\theta = \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_t$ 是 θ 的互不相同的 G 共轭，则 $\chi_N = e \sum_{i=1}^{t} \theta_i$, 其中 $e = [\chi_N, \theta]$.

引理 2.8[1] (Clifford 对应) 设 $H \lhd G, \theta \in Irr(H), T = I_G(\theta)$. 令 $\mathcal{A}$=$\{\psi \in Irr(T) \mid [\psi_H, \theta] \neq 0\}$, $\mathcal{B}$=$\{\chi \in Irr(G) \mid [\chi_H, \theta] \neq 0\}$, 则

(a) 若 $\psi \in \mathcal{A}$, 则 ψ^G 不可约;

(b) 映射 $\psi \to \psi^G$ 为 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的双射;

(c) 若 $\varphi^G = \chi$, 则 ψ 是 χ_T 在 $\mathcal{A}$ 中唯一的不可约分量;

(d) 若 $\psi^G = \chi$, 且 $\psi \in \mathcal{A}$, 则 $[\psi_H, \theta] = [\chi_H, \theta]$.

引理 2.9[1] (Frobenius Reciprocity) 设 G 为群, H 为 G 的一个子群，再设 θ 和 φ 分别为 G 和 H 上的类函数，则 $[\varphi, \theta_H] = [\varphi^G, \theta]$.

引理 2.10[1] (" Going Down " 定理) 令 K/L 是 G 的一个交换主因子. 假设 $\theta \in Irr(K)$ 且 θ 是 $G-$ 不变的，则下列结论必有一个成立：

(a) $\theta_L \in Irr(L)$;

(b) $\theta_L = e\varphi$, 其中 $\varphi \in Irr(L)$,$e^2 = |K : L|$.

(c) $\theta_L = \sum_{i=1}^{t} \varphi_i$, 其中 $\varphi_i \in Irr(L)$ 且互不相同， $t = |K : L|$.

引理 2.11[1] 设 $H \leq K \leq G$,$\varphi \in Cha(H)$, 则 $(\varphi^K)^G = \varphi^G$.

引理 2.12[1] 设 $H, K \leq G$, 且 $HK = G, \varphi \in Cha(H)$, 则 $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H\cap K})^K$.

第三章 主要结果及其证明

为了主要结果的证明，首先引入下述概念.

N 为有限群，对 $\theta \in Irr(N)$, 令 $\mathcal{H}_\theta(N)$=$\{L \leq N | \exists \xi \in Irr(L)$, 使得 $\xi^N = \theta\}$.

$N \in \mathcal{H}_\theta(N)$, 因此 $\mathcal{H}_\theta(N)$ 非空.

定义 3.1 设 N 为有限群， $\theta \in Irr(N)$, 如果对任意的 $L \in \mathcal{H}_\theta(N)$, 均有 $L \lhd \lhd N$, 则称 N 为 θ- 相关幂零群.

定义 3.2 设 $\theta \in Irr(N)$,N 为 θ- 相关幂零群且 N 为 SBP 群，则称 N 为 SBPθ- 相关幂零群，如果对任意的 $\theta \in Irr(N)$, N 均为 SBPθ- 相关幂零群, 则称 N 为 SBPC- 相关幂零群. (Sylow Best Possible Character)

SBPC- 相关幂零群均是可解群,但不一定是幂零群. 例如：$G = S_3$,则 G 是 M- 群,所以对任意的 $\chi \in Irr(G)$, 存在 $H \leq G, \lambda \in Irr(H), \lambda(1) = 1$, 使得 $\lambda^G = \chi$. 由特征标表知，cd(S_3)=$\{1, 2\}$, 所以下面只要考虑 $\chi(1) = 2$, 有 2=χ(1)=| $G : H$ |, 从而 H=$A_3 \lhd G$. 因此对任意的 $\chi \in Irr(G)$, G 均为 χ- 相关幂零群，又由 G 的阶易知 G 的任意真子群均为素数幂阶，即 G 为 SBPC- 相关幂零群，但 G 只是 2- 幂零群而不是幂零群.

命题 3.3 设 $\theta \in Irr(N)$,N 为 θ- 相关幂零群，则对任意的 $L \in \mathcal{H}_\theta(N)$, 且 $L < N$ 均有 $L^N < N$ 成立

证明. 由次正规性及正规闭包的定义，结论是显然的.

I.M.Isaacs 在文献 [2] 中阐明了相对于正规幂零子群的特征标稳定限