学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　　分类号______ 密级______

学号：19020101152509　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

关于一类非可加测度

On a Class of Non-additive Measure

陈 波

指导教师姓名：程 立 新 教授

专 业 名 称：基 础 数 学

论文提交日期：2013 年 5 月

论文答辩日期：2013 年 月

学位授予日期：

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2013 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密 （ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目 录

Contents

中文摘要

对于非可加测度理论的系统研究始于1954年法国数学家 Choquet[1] 提出容度的概念. 随后 Sugeno[2] 于1974年结合模糊集理论, 独立地提出了单调集函数和模糊测度的概念, 定义了模糊测度上的Sugeno积分. 1994年 Dieter Denneberg[3] 在其专著 << Non-additive Measure and Integral >> 系统地介绍了单调集函数的Choquet积分性质, 并全面地研究非可加测度相关理论, 给出了Choquet积分的次可加定理等漂亮结果. 1998年, 哈明虎, 吴从炘[10]的专著 << 模糊测度与模糊积分 >>, 则重点体现了模糊测度理论的发展成果.

在本文中, 我们首先简要回顾了非可加测度的发展, 着重介绍了单调集函数及其两个常用积分的定义; 其次, 我们探讨了非可加测度具有可加性的充分条件; 最后, 我们从程立新和施惠华 [4] 的文章中得到灵感, 给出了可加测度上包络的泛函刻画, 即:

μ 是个测度空间 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上的单调集函数, 满足 $\mu(\emptyset) = 0$, 则

1. μ 是一族有限可加测度的上包络 $\Longleftrightarrow$ $\exists\, l_\infty(\mathfrak{F})$ 上的一个次线性泛函 p, 满足 $p(\chi_A) = \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathfrak{F}$;
2. 若 $\mu(\Omega) < \infty$, 则 μ 是一族有限可加测度的上包络 $\Longleftrightarrow \exists\, l_\infty(\mathfrak{F})$ 上的下半连续次线性泛函 p, 满足 $p(\chi_A) = \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathfrak{F}$;
3. 若 $\mu(\Omega) < \infty$, 则 μ 是一族可列可加测度的上包络 $\Longleftrightarrow \exists\, l_\infty(\mathfrak{F})$ 上的一族弱*序列连续线性泛函 $\{\phi_\alpha\}$, 定义 $p(f) = \sup_\alpha \phi_\alpha(f)$, $\forall\, f \in l_\infty(\mathfrak{F})$, 则有 $p(\chi_A) = \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathfrak{F}$. $\Longrightarrow$ 这样定义的 p 是 $l_\infty(\mathfrak{F})$ 上的弱*序列下半连续次线性泛函.

关键词： 非可加测度；单调集函数；次线性泛函

Abstract

The systematic research of non-additive measure began from the year 1954 when French mathematician Choquet[1] proposed the concept of capacity. After that Sugeno[2] brought forward the notion of monotonic set function and fuzzy measure independently, in connection with the fuzzy set theory and proposed the so-called Sugeno integral for the fuzzy measure. In 1994, Dieter Denneberg[3] presented a systematic introduction of monotonic set function and its Choquet integral in his book << Non-Additive Measure and Integral >> , where he overlooked the theory of non-additive measure comprehensively, and showed us many excellent results such as the Subadditivity Theorem for Choquet integral. In 1998, Minghu Ha and Congxin Wu[10] published their book called << 模糊测度与模糊积分 >>, focusing on presenting the significant achievements on fuzzy measure theory.

In this paper, we will at first give a brief introduction of non-additive measure; then we will discuss some sufficient condition for a non-additive measure to be additive; finally inspired by the paper by Lixin Cheng and Huihua Shi[4], we present some characterizations for a non-additive measure to be the upper envelop of additive measures, i.e.:

1. μ could be the upper envelop of some finitely additive measures $\Longleftrightarrow$ $\exists$ a sub-linear functional p in $l_\infty(\mathfrak{F})$, such that $p(\chi_A) = \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathfrak{F}$;
2. μ could be the upper envelop of some bounded finitely additive measures $\Longleftrightarrow$ $\exists$ a lower semi-continuous sub-linear functional p in $l_\infty(\mathfrak{F})$, such that $p(\chi_A) = \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathfrak{F}$;
3. If $\mu(\Omega) < \infty$, then μ could be the upper envelop of some countably additive measure $\Longleftrightarrow$ $\exists$ some weakly * continuous linear functionals $\{\phi_\alpha\}$ on $l_\infty(\mathfrak{F})$, if define $p(f) = \sup_\alpha \phi_\alpha(f), \forall f \in l_\infty(\mathfrak{F})$, then $p(\chi_A) = \mu(A), \forall A \in \mathfrak{F}$. $\Longrightarrow$ If p is defined as above, then p is definitely a weakly * sequently lower semi-continuous functional on $l_\infty(\mathfrak{F})$.

Key words: Non-additive measure; Monotonic set function; Sub-linear functional

第一章 引言

测度是数学中的一个基本概念, 是线段的长度, 平面图形的面积, 容器的体积等的推广. 经典测度具有可加性. 例如, 用测度表示区域的面积, 那么两个不相交的区域之和的面积等于这两个区域的面积之和. 然而, 可加性在很多现实情况下无法得到满足, 如两个人合作的工作效率并不是简单地等于两人工作效率的和. 于是非可加测度理论便应运而生, 并且在现实生活中扮演着越来越重要的角色.

1.1 非可加测度简介

早在17世纪, Bernoulli便在概率论中提出了非可加概率的概念. 但可加概率和测度论的蓬勃发展, 直接导致之后两百年里对非可加测度的研究寥寥无几. 直到1954年法国数学家 Choquet[1] 提出容度概念后, 非可加理论才再次得到数学界的关注. Choquet容度是一个特殊的单调集函数, 它使得所设空间上的每一个子集均与一实数(不要求非负)对应, 它是连续且关于集合包含是单调的.

根据不同情况的需要, 在1967年, Dempster[5] 提出, 后经 Shafer[6] 深化了两种类型的非可加测度, 分别成为现在的信任测度和似然测度. 同时对于这两种类型的非可加测度进行深入研究便形成了 Dempster-Shafer 理论或显著性理论. 信任函数又称下限函数, 它表示给定一个命题是真的总的可信任程度, 而似然函数又称上限函数, 它表示给定命题非假的总的可信任程度.

1974年, 日本学者 Sugeno[2] 在其博士论文中结合模糊集理论, 独立提出了单调集函数, 且首次提出了用比较弱的单调性和连续性来替代可加性的另一类集函数, 也称作模糊测度, 并给出了模糊测度的 Sugeno 积分.

在本章中, 我们总假定 Ω 是个非空集合, $\mathfrak{F}$ 是由 Ω 的子集生成的 σ 代数, μ 是 $\mathfrak{F}$ 上的非负广义实值集函数.

定义 1.1 (**单调集函数**): 集函数 μ 称为单调集函数, 如果满足

1. $\mu(\emptyset) = 0$(正则性);
2. $\mu(A) \le \mu(B)$, $\forall\, A \subset B$ 且 $A, B \in \mathfrak{F}$(单调性).

定义 1.2 (**模糊测度**): 称 μ 是个模糊测度, 如果它满足

1. $\mu(\emptyset) = 0$(正则性);

2. $\mu(A) \le \mu(B)$, $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$ 且 $A \subset B$(单调性);
3. 若 $\forall\, A_n \in \mathfrak{F}, A_n \subset A_{n+1}$, 且 $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$(上连续性);
4. 若 $\forall\, A_n \in \mathfrak{F}, A_{n+1} \subset A_n$, 且 $\exists\, n_0$, $s.t.\ \mu(A_{n_0}) < \infty$, 有

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)\ (\text{下连续性}).$$

定义 1.3 (Sugeno**积分**): μ 是 $\mathfrak{F}$ 上的模糊测度, f 是 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ 上的可测函数, 定义 $N_a(f) = \{x \in \Omega : f(x) > a\}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$, 则 f 关于模糊测度 μ 在 $A\ (A \in \mathfrak{F})$ 上的 Sugeno 积分定义为

$$(S)\int_A f d\mu = \sup_{a>0} \min(a, \mu(N_a(f) \cap A)).$$

关于非可加测度及其积分的研究涉及诸多方面, 包括信任函数, 模糊测度, 合作博弈论, 人工智能等. 但在纯数学方面的研究主要来自于Greco1977, 1981[13], 1982年和Bassanezi和Greco1984年的文章. 在文献 [13] 中, Greco推广了通常意义下我们认识的可测性概念.

1994年, Dieter Denneberg[3] 在其专著 << Non-Additive Measure and Ingeral >> 中系统地介绍了单调集函数的 Choquet 积分, 并全面研究非可加测度及其 Choquet 积分的性质.

定义 1.4 (Choquet**积分**): μ 是 $\mathfrak{F}$ 上的单调集函数, f 是 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ 上的可测函数, 定义 $N_a(f) = \{x \in \Omega : f(x) > a\}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$, 则 f 关于单调集函数 μ 在 $A\ (A \in \mathfrak{F})$ 上的 Choquet 积分定义为:

$$(C)\int_A f d\mu = (R)\int_0^{\mu(\Omega)} \mu(N_t(f) \cap A) dt.$$

1998年, 哈明虎, 吴从炘[10]的专著 << 模糊测度与模糊积分 >>, 则重点体现了模糊测度理论的发展成果.

此后, 最近十几年从事这方面研究的学者也不少, 并都取得了很多有意义的结果:

比如, 2003年中国学者李军 [7][8] 研究了单调集函数的上连续下连续性和 Order 连续性, 给出了模糊测度上的 Egoroff 定理和一般单调集函数上的 Lebegue 定理.

再如, Shin Ashina, Kenta Uchino 和 Toshiaki Murofushi[15] 于2006年发表的文章中, 详细研究并给出了关于非可加测度的六种连续条件与两种零可加条件之间的关系.

1.2 本文的主要内容

正如上面所述, 非可加集函数在近半个世纪得到了广泛的讨论和研究, 但相比测度论的完备体系, 非可加测度理论仍有许多内容有待研究.

关于非可加测度与可加测度的关系是本文写作的切入点, 首先我们考虑了满足一定条件的次可加测度具有可加性的充分性条件; 随后结合泛函分析中一些经典结果, 给出了可以表示成可加测度上包络的一类次可加测度对应着某一泛函空间中的次线性泛函.

本文就是基于这些想法, 以泛函分析为工具, 得到了一些新的结论.

本文的结构安排如下:

第一章 引言 分为两节. 第一节回顾非可加测度的概念及其发展历史; 第二节给出本文的研究方向和叙述本文的主要内容.

第二章 非可加测度理论 分为两节. 第一节给出了本节要使用的基本符号和预备知识; 第二节充分讨论了次可加测度成为可加测度需要满足的充分条件.

第三章 可加测度上包络的泛函刻画 分为两节. 第一节给出经典泛函分析中对于有限测度的泛函刻画, 以及程立新, 施惠华在文献 [4] 中对可列可加测度的泛函刻画, 并做简要说明; 第二节则在前面的基础下, 先证明一些泛函分析中的命题, 进而用它来证明本文的主要结论, 即对可表示成一族可加测度的上包络的单调集函数的泛函刻画.

第 二 章　非可加测度理论

2.1　基本定义和相关性质

在本文中我们总假设 Ω 是个非空集合, $\mathfrak{F}$ 是由 Ω 的子集生成的代数, μ 是 $\mathfrak{F}$ 上的非负广义实值单调集函数.

定义 2.1:　[9] 称 μ 为有限可加测度, 如果满足

1. $\mu(\emptyset) = 0$(正则性);
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$且$A \subset B$(单调性);
3. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$且$A \cap B = \emptyset$(有限可加性).

注释 2.1:　在有些关于测度论的书中, 测度的定义并不要求满足单调性, 但由于本文关注的是单调的集函数, 故对于测度也只考虑满足单调性的测度.

若$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$, $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称μ是有限次可加的; 若$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$, $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称μ是有限超可加的. 次可加测度和超可加测度都称为非可加测度.

定义 2.2:　[9] 若 $\mathfrak{F}$ 还是个 σ 代数, 则称 μ 为可列可加测度, 如果满足

1. $\mu(\emptyset) = 0$;(正则性)
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall\, A, B \in \mathfrak{F}$ 且 $A \subset B$ (单调性);
3. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $\forall\, \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$且$\{A_n\}$ 两两不交 (可列可加性).

若 $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $\forall\, \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ 且 $\{A_n\}$ 两两不交, 则称 μ 是可列次可加的; 若 $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, $\forall\, \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ 且 $\{A_n\}$ 两两不交, 则称 μ 是可列超可加的.

定义 2.3:　[9][14] 对于 $\mathfrak{F}$ 上的单调集函数 μ,

1. 称 μ 是有限的, 若 $\mu(\Omega) < \infty$;
2. 称 μ 是子模, 若

$$\mu(A) + \mu(B) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B),\ \forall\, A, B \in \mathfrak{F};$$

3. 称 μ 是超模, 若

$$\mu(A)+\mu(B)\leq\mu(A\cap B)+\mu(A\cup B),\ \forall\, A,B\in\mathfrak{F};$$

4. 当 $\mathfrak{F}$ 是个 σ 代数, 则称 μ 是上连续的, 若

$$\forall\,\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{F}, A_n\subset A_{n+1},\ \text{且}\ A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n,\ \text{有}\ \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A);$$

5. 当 $\mathfrak{F}$ 是个 σ 代数, 称 μ 是下连续的, 若

$$\forall\,\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{F}, A_{n+1}\subset A_n,\ \text{且}\ \exists\, n_0,\ s.t.\ \mu(A_{n_0})<\infty,\ \text{有}\ \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A).$$

注释 2.2: 若 μ 是个可列可加测度, 则 μ 是上连续和下连续的.

注释 2.3: $\mathfrak{F}$ 是 Ω 的子集生成的 σ 代数, μ 是 $\mathfrak{F}$ 上的单调集函数.
用 $l_\infty(\Omega)=\{f: f\text{定义在}\Omega\text{ 上, 且 }\sup_{x\in\Omega}|f(x)|<\infty\}$ 表示 Ω 上有界函数全体, 在其上定义 $\|f\|_{\sup}=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$, 则 $\|\cdot\|_{\sup}$ 是个范数;
用 $l_\infty(\mathfrak{F})=\overline{span}\{\chi_A: A\in\mathfrak{F}\}\subset l_\infty(\Omega)$, 表示 Ω 上有界的 $\mathfrak{F}$ 可测函数全体.

容易验证这里 $(l_\infty(\Omega),\|\cdot\|_{\sup})$ 是个Banach 空间, 而 $l_\infty(\mathfrak{F})$ 作为其闭子空间, 自然也是个Banach空间. 注意, 这里的 $l_\infty(\mathfrak{F})$ 并不涉及到测度 μ , 而是依赖于 σ 代数 $\mathfrak{F}$.

定义 2.4: 若 X 是一个实线性空间, $A\subset X$ 为一子集. X' 表示 X 上的线性泛函全体, 我们用 $cor(A)$ 表示 A 的代数内部, 即

$$x\in cor(A)\Longleftrightarrow\forall y\in X,\ \exists\,\lambda>0,\ s.t.\ x+t(y-x)\in A,\ \forall\, 0\leq t<\lambda.$$

定理 2.1 (**基本分离定理**): [11] X 是个线性空间, A,B 是 X 中的两个不交非空凸集. 若 X 是个有限维空间，或者 $cor(A)\cup cor(B)\neq\emptyset$, 则 A,B 可被一个超平面分离, 即

$$\exists\, c\in\mathbb{R},\phi\in X',\ \text{使得}\ \phi(a)\geq c\geq\phi(b),\ \forall\, a\in A, b\in B.$$

定义 2.5: 线性拓扑空间 X 称为局部凸拓扑空间, 如果它包含一个由 θ 点的凸邻域构成局部基.

定理 2.2 (**强分离定理**): [11] X 是个局部凸拓扑空间, τ 是其上的局部凸拓扑, A,B 是 X 中的两个不交非空闭凸集. 若 A 是紧集, 则 A,B 可被一个闭超平面强分离, 即

$$\exists\, c\in\mathbb{R},\phi\in(X,\tau)^*,\ \text{使得}\ \sup_{a\in A}\phi(a)<c<\inf_{b\in B}\phi(b).$$

2.2 可加性的充分条件

在本节中, 我们希望运用泛函知识去研究可列次可加测度与可加测度的关系. 由测度论知识我们知道一个可列可加测度必定是可列次可加, 上连续, 下连续, 而且单调非负正则的, 甚至对于所有 $E \in \mathfrak{F}$, 有 $\mu(A \cap E) + \mu(E \setminus A) = \mu(E), \forall A \in \mathfrak{F}$. 反过来也是成立的. 但如果把最后一个条件改成 $\mu(\Omega \setminus A) + \mu(A) = \mu(\Omega)$ (互余率), $\forall\ A \in \mathfrak{F}$, 结论似乎还是成立的, 但我们在着手证明它时碰到一些问题, 最后还发现了一个反例.

命题 2.1: μ 是定义在 $\mathfrak{F}$ 上的单调可列次可加集函数, 满足上连续性和下连续性, 且 $\mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega \setminus A) + \mu(A) = \mu(\Omega) < \infty, \forall A \in \mathfrak{F}$. 满足以上条件的可列次可加测度不一定是有限可加的.

证明: 设 P 是$[0,1]$上的开集生成的Borel集 β 上的通常概率测度, 即对于两两不相交的开区间族 $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ 有 $P(\cup_\alpha (a_\alpha, b_\alpha)) = \sum (b_\alpha - a_\alpha)$.

$f(x) := 4(x-0.5)^3 + 0.5$, 图像如下图

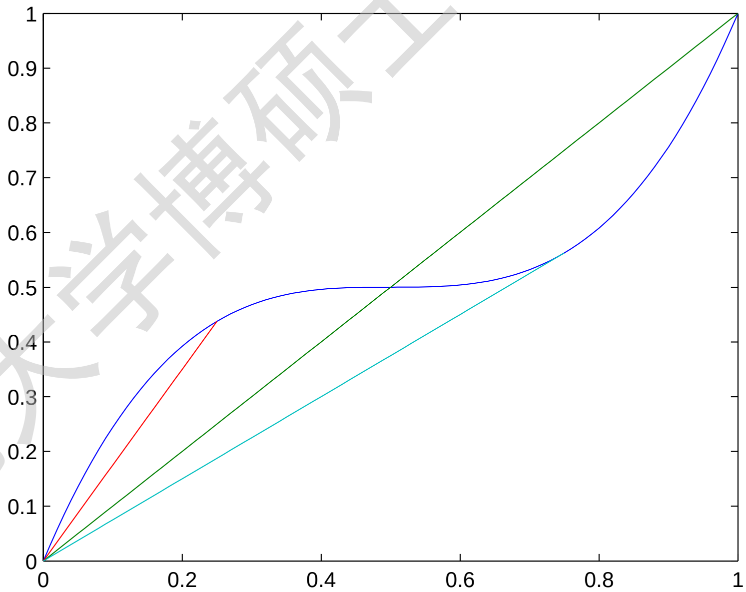

图 2.1

定义 $\mu = f \circ P$, 往证 μ是$([0,1], \beta)$ 上的次可加测度, 且满足以下性质:

1. $\mu(A) \geq 0,\ \forall\ A \in \beta;\ \mu(\emptyset) = 0,\ \mu([0,1]) = 1;$
2. 单调性, 由 P 和 f 的单调性可得;
3. $\mu(A) + \mu(A^C) = f(P(A)) + f(P(A^C)) = f(x) + f(1-x) = 1;$

4. 次可加性将在下面证明.

(有限次可加性) $\forall A, B \in \beta$ 且不交, 记 $P(A) = x, P(B) = y$, 则 $x, y \in (0,1), x+y \leq 1$.
若 $0 \leq x, y \leq 0.5$, $x+y \leq 0.5$, $a := \frac{f(x+y)}{x+y}$, 则由图像中直线的斜率可得

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay \leq f(x) + f(y),$$

若 $0 \leq x, y \leq 0.5$ 且 $x+y \geq 0.5$, 则

$$f(x) + f(y) \geq x + y \geq f(x+y).$$

若 $0.5 < x < 1, 0 < y < 0.5$, 由上面知

$$f(1-x-y) + f(y) \geq f(1-x),$$

再由图像的中心对称性知

$$1 - f(x+y) + f(y) \geq 1 - f(x) \Rightarrow f(x) + f(y) \geq f(x+y).$$

(可列次可加性) 设 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 两两不交, 令 $P(A_i) = x_i$,
若 $0 \leq x_i \leq 0.5, \sum x_i \leq 0.5$, 设 $x_0 = \sum x_i, a = \frac{f(x_0)}{x_0}$, 则

$$f(x_0) = ax_0 = a \sum x_i = \sum ax_i \leq \sum f(x_i);$$

若 $0 \leq x_i \leq 0.5, \sum x_i \geq 0.5$, 则

$$\sum f(x_i) \geq \sum x_i \geq f(\sum x_i);$$

若 $0.5 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_i \leq 0.5$, $\forall\, i \geq 2$, 则

$$f(x_1) + \sum_{i \geq 2} f(x_i) \geq f(x_1) + f(\sum_{i \geq 2} x_2) \geq f(\sum x_i),$$

证毕. □

命题中的例子在测度论里叫作扭曲测度, 而且我们容易从函数 f 的图像知, 这个函数不是个凸函数, 这也是它能成为上述命题中例子的关键.

定义 2.6: [3] P 是定义在 $\mathfrak{F}$ 上的一个概率测度, $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ 是单调函数, 满足

$$\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1,$$

则称 $\mu = \gamma \circ P$ 为扭曲测度.

注释 2.4: 这里 γ 并不需要是连续的, 甚至不必在0点连续. 同时这里 μ 显然是个单调集函数.

一个自然的想法就是, 从扭曲测度出发, 如果其扭曲函数 γ 是个凸函数, 是否这样的单调集函数就是可加的呢? 在下述命题中, 我们给出了肯定的回答:

命题 2.2: $\mu=\gamma\circ P$ 是 $\mathfrak{F}$ 上的扭曲测度, 若 γ 是个凸函数, 且满足

$$\mu(\Omega\setminus A)+\mu(A)=\mu(\Omega),\ \forall\ A\in\mathfrak{F},$$

则 μ 是可加的.

证明: 先证 μ 是个超模, 即

$$\mu(A)+\mu(B)\leq\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B),\forall A,B\in\mathfrak{F}.$$

任意 $A,B\in\mathfrak{F}$ 取定, 设 $a=P(A)\leq P(B)=b$, 则

$$P(A\cap B):=m\leq a\leq b\leq n:=P(A\cup B).$$

由于 P 是个概率 $\Rightarrow m+n=a+b$, 设 $a=\lambda m+(1-\lambda)n$, 则

$$b=(1-\lambda)m+\lambda n,\ \lambda\in(0,1),$$

于是由 γ 的凸性得:

$$\begin{aligned}\gamma(a)+\gamma(b)&\leq\lambda\gamma(m)+(1-\lambda)\gamma(n)+(1-\lambda)\gamma(m)+\lambda\gamma(n)\\&=\gamma(m)+\gamma(n);\end{aligned}$$

故 μ 是个超模, 于是

$$\mu(A)+\mu(B)\leq\mu(A\cap B)+\mu(A\cup B),$$

对 $A^C,B^C\in\mathfrak{F}$, 同样也有

$$\begin{aligned}\mu(A^C)+\mu(B^C)&\leq\mu(A^C\cap B^C)+\mu(A^C\cup B^C)\\&=\mu((A\cup B)^C)+\mu((A\cap B)^C),\end{aligned}$$

由互余率结合上面不等式可得

$$2\mu(\Omega)-(\mu(A)+\mu(B))\ \leq\ 2\mu(\Omega)-(\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B))$$

$$\Longrightarrow \mu(A)+\mu(B) \quad \geq \quad \mu(A\cap B)+\mu(A\cup B).$$

从而得到

$$\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\cap B)+\mu(A\cup B).$$

即 μ 是有限可加测度. 证毕. □

从上一个命题的证明中, 我们同样也可以得到子模如果具有互余率, 则必定是个可加测度.

进一步的想法是, 如果没有满足互余率这个条件, 能不能得到这样的结论: 子模可以表示成一族可加测度的上包络?

答案是肯定, 甚至都不需要再去证明. Denneberg在文献中以单独一章的篇幅介绍并证明了这个想法. 当然其证明并不复杂, 但能将其作为一章中的重要定理, 可见这个命题的重要性.

定理 2.3: [3] μ是$\mathfrak{F}$ 上的单调集函数, 定义

$$M:=\{\alpha|\ \alpha在\mathfrak{F}\ 上可加,\ \alpha(\Omega)=\mu(\Omega),\alpha\leq\mu\},$$

$$\begin{aligned}则\ \mu\ 是个子模 \quad &\Longleftrightarrow \quad M\neq\emptyset,\ 且\ (C)\int Xd\mu=\sup_{\alpha\in M}(C)\int Xd\alpha,\forall X\in L_1(\mu).\\ &\Longrightarrow \quad \mu=\sup_{\alpha\in M}\alpha.\end{aligned}$$

$L_1(\mu):=\{f:f$ 是 Ω 上 $\mathfrak{F}$ 可测函数, 满足 $(C)\int fd\mu<\infty\}$.

Dennberg 的这个定理中有一点仍值得思考, 那就是其反命题: 可以表示成可加测度上包络的单调集函数是否就是子模呢? 结果我们又找到了个反例:

例 2.1: $\Omega:=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, $\mathfrak{F}:=2^{\Omega}$, μ 定义如下:

1. $\mu(\omega_i)=1,\ i=1,2,3,4$;
2. $\mu(\omega_2,\omega_3)=\mu(\omega_2,\omega_4)=\mu(\omega_3,\omega_4)=1$;
3. $\mu(\omega_1,\omega_2)=\mu(\omega_1,\omega_3)=\mu(\omega_1,\omega_4)=2$;
4. $\mu(\omega_2,\omega_3,\omega_4)=1.5$;
5. $\mu(\Omega\setminus\{\omega_i\})=2,\ i=2,3,4$;
6. $\mu(\emptyset)=0,\ \mu(\Omega)=2$.