学校编码：10384　　　　分类号_______密级_______

学号：19020100153958　　　　UDC_______

厦门大学

博　士　学　位　论　文

若干q-算子的逼近性质

Approximation properties of some q-operators

蔡　清　波

指导教师姓名：　曾　晓　明　教授

专　业　名　称：　计　算　数　学

论文提交日期：　2013 年　　月

论文答辩时间：　2013 年　　月

学位授予日期：　2013 年　　月

答辩委员会主席：_______________

评　　阅　　人：_______________

2013 年　　月

Doctoral Dissertation

Approximation properties of some q-operators

By

Qingbo Cai

Supervisor: **Professor Xiaoming Zeng**

Speciality: **Computation Geometry and Approximation Theory**

Institution: **School of Mathematical Sciences**

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

April, 2013

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于：

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“ √ ”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

若干q-算子的逼近性质

摘 要

本文主要研究若干q-算子的逼近性质, 内容包含三个方面, 一是Kantorovich型q-BBH算子、修正的Durrmeyer型q-Baskakov算子、修正的Kantorovich型q-Szász算子、修正的q-Gamma算子等q-算子的逼近性质; 二是Durrmeyer型q-BBH算子及修正的Kantorovich型q-Szász算子的统计逼近性质; 三是复Gamma算子在紧圆盘上的逼近性质.

全文共分为五章. 第一章, 首先引入本文所涉及到的基本定义和句号, 然后综述了本文所研究内容的相关背景及研究进展, 最后是本文的主要工作概述.

第二章, 定义了两类q-型算子, 分别为Durrmeyer型q-BBH算子及Kantorovich型q-BBH算子. 在§2.2节中, 通过计算算子$D_{n,q}(f;x)$的各阶矩量$D_{n,q}\left(1;x\right)$、$D_{n,q}\left(\frac{t}{1+t};x\right)$、$D_{n,q}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)$及中心矩$D_{n,q}\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x\right)$, 由Korovkin型统计逼近定理, 得到Durrmeyer型q-BBH算子的统计逼近性质. 同时, 由光滑模及Lipschitz型极大函数的定义和性质, 得出$D_{n,q}(f;x)$的统计收敛阶; 在§2.3节中, 计算并估计出Kantorovich型q-BBH算子的各阶矩量, 结合光滑模的性质得到算子的收敛阶, 并给出算子$K_{n,q}(f;x)$对Lipschitz连续函数的一个收敛定理. 由于Durrmeyer型及Kantorovich型q-BBH算子的形式较复杂, 给计算带来很大麻烦, 因而鲜有关于这两类q-算子的研究, 本章的结论推广了经典的Durrmeyer型及Kantorovich型BBH算子的逼近性质.

第三章, 由于Aral和Gupta在文[9]所定义的Durrmeyer型q-Baskakov算子仅仅是常数保持的正线性算子, 我们通过对算子的形式进行微调, 定义了一类既是常数保持又是线性保持的修正的Durrmeyer型q-Baskakov算子$D_{n,q}(f;x)$, 通过计算

得到$D_{n,q}(f;x)$的各阶矩量及中心矩量, 结合二阶光滑模及K-泛函的性质, 得到算子的局部逼近定理, 所得到的结果比文[9]中的相应结果有更好的估计, 因此, 对算子$D_{n,q}(f;x)$的定义是很有必要的. 此外, 我们还得到算子的收敛阶的估计及加权逼近定理.

第四章, 由于Mahmudov和Gupta在文[57]中所定义算子的积分形式为通常的Riemann积分, 我们把Riemann积分替换为q-Jackson积分, 定义了一类形式上更为和谐的修正的Kantorovich型q-Szász算子, 不同于文[57]的研究内容, 我们主要研究了算子的加权统计逼近性质、局部逼近性质、对Lipschitz函数类的收敛阶以及利用q-导数与q-积分的性质得到q-Szász算子的导数与$K_{n,q}(f;x)$的关系式.

第五章, 基于Karsli在文[47]中所定义的新的Gamma算子, 我们定义了两类修正的q-Gamma算子, 分别为§5.2节的线性保持的q-Gamma算子及§5.3节的平方保持的q-Gamma算子. 通过计算这两种算子的各阶矩量及中心矩, 得到这两种算子的局部逼近定理、收敛阶的估计以及加权逼近定理. 在§5.4节中, 通过紧圆盘上复Gamma算子的定义, 并给出函数f的指数增长条件, 得到复Gamma算子在紧圆盘上对解析函数收敛性的定量估计、Voronovskaya型结论以及同时逼近的收敛阶的估计, 得到的结果将曾在[63]中所研究的实Gamma算子在实数域的逼近性质推广到复数域.

关键词： q-算子; 统计逼近; 收敛阶

Approximation properties of some q-operators

ABSTRACT

This paper focuses on a study about properties of some q-operators, it comprises three parts. Part one, approximation properties of Kantorovich type q-BBH operators, modified Durrmeyer type q-Baskakov operators, modified Kantorovich type q-Szász operators and modified Gamma operators; Part two, statistical approximation properties of Durrmeyer type q-BBH operators and modified Kantorovich type q-Szász operators; Part three, approximation properties by complex Gamma operators in compact disks.

This paper contains five chapters. In chapter 1, we introduce some basic definitions and notations and then summarize backgrounds and research developments related to this paper. Finally, we give main results of this paper.

In chapter 2, we introduce two kinds of q-operators: Durrmeyer type q-BBH operators and Kantorovich type q-BBH operators. In §2.2, we compute moments and central moment of $D_{n,q}(f;x)$, such as $D_{n,q}\left(1;x\right)$, $D_{n,q}\left(\frac{t}{1+t};x\right)$, $D_{n,q}\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2;x\right)$ and $D_{n,q}\left(\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^2;x\right)$. We obtain statistical approximation properties of Durrmeyer type q-BBH operators with the help of the Korovkin type statistical approximation theorem, we also compute rates of statistical convergence of $D_{n,q}(f;x)$ by means of the modulus of continuity and Lipschitz-type maximal function; In §2.3, we compute and estimate moments of the operators and give estimates for the rate of convergence by the modulus of continuity, we also give a rate of convergence theorem for the Lipschitz continuous functions. Since the forms of Durrmeyer type and Kantorovich type q-BBH operators are complicated, and inconvenient to compute, so it seems there are no papers mentioning about these two kinds of operators, the results of this chapter extend the approximation properties of the classic Durrmeyer type and Kantorovich type BBH operators.

In chapter 3, since the operators Aral and Gupta [9] introduced reproduce only constant functions, we make some tiny modification of the form of these operators defined in [9], and introduce a new modification of Durrmeyer type q-Baskakov operators, which reproduce not only constant functions but also linear functions. We compute moments and central moments of $D_{n,q}(f;x)$, establish local approximation theorem by the properties of modulus of continuity of second order and K-functional, which is better than the estimate of relevant result in [9], so it is important to consider the operators $D_{n,q}(f;x)$. We also obtain the estimates on the rate of convergence and weighted approximation of these operators.

In chapter 4, since the part of integral of the operators defined in [57] by Mahmudov and Gupta is Riemann integral, we use the q-Jackson integral instead of Riemann integral, define a more harmony form of modification of Kantorovich type q-Szász operators. Different from their work, we mainly study the weighted statistical approximation properties and establish a local approximation theorem, we also give a convergence theorem for the Lipschitz continuous functions. Furthermore, we give the relationship between the derivative of q-Szász operators and $K_{n,q}(f;x)$ by the properties of q-derivative and q-integral.

In chapter 5, based on the new Gamma operators defined in [47] by Karsli, we introduce two kinds of modification of q-Gamma operators: q-Gamma operators which preserve linear functions in §5.2 and q-Gamma operators which preserve x^2 in §5.3. We compute moments and central moments of these operators, establish local approximation theorems, obtain the estimates on the rate of convergence and weighted approximation theorems. In §5.4, the order of simultaneous approximation and Voronovskaya type theorems with quantitative estimate for complex Gamma operators attached to analytic functions on compact disks are obtained by the definition of complex Gamma operators in compact disks and a suitable exponential growth condition for $f(z)$, the results extend approximation properties in real number domain of real Gamma operators defined in [63] by Zeng to complex domain.

Key Words: q-operators; statistical approximation; rate of convergence

目　录

CONTENTS

第一章　绪论

本章首先介绍本文所需要的基本定义和记号, 然后综述本文所研究问题的相关背景及研究进展, 最后简单介绍一下本文所得到的主要结果.

§ 1.1　基本定义和记号

- 若无特别说明, 文中出现的参数q的取值范围均为: $0 < q \leq 1$.
- 文中q-BBH算子为q-Bleimann, Butzer and Hahn算子的简写, 文中若无特别说明, 均沿用此简写记号.

假设对任意固定的实数$q > 0$, 下面给出q整数及q积分等若干定义(参阅[13, 44, 46, 51]):

定义1.1.1　q-整数的有关定义:

对于非负整数k, 定义q-整数:

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{1-q^k}{1-q}, & q \neq 1, \\ k, & q = 1. \end{cases}$$

q-阶层定义为:

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q[k-1]_q...[1]_q, & k = 1, 2, ..., \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

对于$n \geq k \geq 0$, 定义q-二项系数:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

定义:

$$(1+x)_q^n = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n-1}(1+q^j x), & n=1,2,..., \\ 1, & n=0. \end{cases}$$

定义1.1.2 q-积分的有关定义及性质:

对于$a>0$, 定义q-Jackson积分:

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n,$$

假设右端级数绝对收敛.

对于$A>0$, 定义q-improper积分:

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\frac{q^n}{A},$$

假设右端级数绝对收敛.

闭区间$[a,b]$上的q-Jackson积分定义为:

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx.$$

定义1.1.3 q-指数函数的有关定义及性质:

q-指数函数定义为:

$$E_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2}\frac{x^k}{[k]_q!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty} = \prod_{s=0}^{\infty}(1+q^s(1-q)x).$$

另一种形式:

$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]_q!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}},\ \ |x|<\frac{1}{1-q},$$

这里, $(1-x)_q^{\infty} = \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^jx)$. 易知, $e_q(x)E_q(-x) = e_q(-x)E_q(x) = 1$.

定义1.1.4 q-Gamma积分及q-Beta积分的有关定义及性质:

对于$t>0$, q-Gamma积分定义为:

$$\Gamma_q(t)=\int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}E_q(-qx)d_qx.$$

q-Gamma积分满足如下等式:

$$\Gamma_q(t+1)=[t]_q\Gamma_q(t), \qquad \Gamma_q(1)=1.$$

q-Beta积分定义为:

$$B_q(t;s)=K(A;t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)^{t+s}}d_qx, \tag{1.1.1}$$

这里$K(x;t)$=$\frac{1}{x+1}x^t\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$. 对于任意正整数$n$, 有如下等式成立:

$$K(x;n)=q^{\frac{n(n-1)}{2}},\ \ K(x;0)=1,\ \ B_q(t;s)=\frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}. \tag{1.1.2}$$

定义1.1.5　q-导数的有关定义及性质:

$f(x)$的q-导数定义为:

$$D_qf(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x},\ \ x\neq 0,\ \ D_qf(0)=\lim_{x\to 0}D_qf(x).$$

且$f(x)$的各阶导数满足:

$$D_q^0f=f,\ \ D_q^nf=D_q\left(D_q^{n-1}f\right),\ \ n=1,2,3,....$$

由q-导数的定义, 有如下等式:

$$D_qx^n=[n]_qx^{n-1},\ \ D_qe_q(ax)=ae_q(ax),\ \ D_qE_q(ax)=aE_q(qax).$$

函数$u(x)$、$v(x)$乘积的q-导数定义为:

$$D_q(u(x)v(x))=D_q(u(x))v(x)+u(qx)D_q(v(x)).$$

六十年前, Fast在文[23]中首先提出了统计收敛的概念, 后来统计收敛成为了一个热门的研究领域, 下面是统计收敛的有关概念:

定义1.1.6　令K为自然数集N的子集, K的密度定义为$\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_K(k)$, 假设右端的极限存在, 这里, χ_K为K的特征函

数. 如果对于任意的$\varepsilon > 0$, $\delta\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\} = 0$, 则称序列$x = \{x_n\}$统计收敛到数$L$, 记为$st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

定义1.1.7 令$A = (a_{jn})$, $j, n = 1, 2, ...$是一个无限可和矩阵, 对一个给定的序列$x = \{x_n\}$, 矩阵A对序列x的变换, 记为$Ax = ((Ax)_j)$, 定义$(Ax)_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{jn}x_n$, 假设右端的级数对任意$j$是收敛的. 如果当$\lim x = L$, 有$\lim\limits_{j\to\infty} (Ax)_j = L$, 则称$A$是规则的.

定义1.1.8 假设A是一个非负规则可和矩阵, 如果对于任意的$\varepsilon > 0$, 有$\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{n:|x_n - L| \geq \varepsilon} a_{jn} = 0$, 则称序列$x = \{x_n\}$是$A$-统计收敛到$L$的, 记为$st_A - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, 见[19].

令$A = C_1$为一阶Cesàro矩阵, 则A-统计收敛退化为一般收敛. 易知, 每个收敛序列是统计收敛的, 但反之不成立.

光滑模和K-泛函的有关定义及性质:

定义1.1.9 设$C_B[0, \infty)$为定义在$[0, \infty)$上的有界连续函数空间, 则$C_B[0, \infty)$是线性赋范空间, 且有范数$||f||_{C_B} = \sup\limits_{x\geq 0} |f(x)|$.

定义1.1.10 设$x, y \in [0, \infty)$, $f \in C_B[0, \infty)$, f的一阶光滑模定义为:

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|,$$

则ω具有以下性质:

(i) ω是$[0, \infty)$上的非负递增函数;

(ii) $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f; \delta) = 0$.

定义1.1.11 闭区间$[0, a]$, $(a > 0)$上的函数f的光滑模定义为:

$$\omega_a(f; \delta) = \sup_{|t-x|\leq\delta} \sup_{x,t\in[0,a]} |f(t) - f(x)|.$$

定义1.1.12 设$f \in C_B[0, \infty)$, 二阶光滑模定义为:

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{0<h\leq\delta} \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)|.$$