学校编码：10384　　　　　　　　分类号______ 密级______

学号：19020101152503　　　　　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

S-λ曲线的调整方法及带两个形状参数的Bézier曲线

Adjustment Method of S-λ Curves and Bézier Curves with 2 Shape Parameters

王友智

指导教师姓名：曾 晓 明 教授

专 业 名 称：概率论与数理统计

论文提交日期：2013 年 月

论文答辩日期：2013 年 月

学位授予日期：

答辩委员会主席：________

评 阅 人：________

2013 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

中文摘要

Fan和Zeng在[1]中提出了S-λ基函数和S-λ曲线的概念，并指出可以通过扰动生成函数系数来对S-λ曲线形状进行调整。本文在此基础上进一步给出了当对生成函数单一系数进行扰动时，扰动后的曲线与原曲线之间的相应关系以及两者到控制顶点的距离之间的关系。对两类特殊控制多边形结构的三次Bézier曲线受到扰动后曲线变化情况做了相应的分析，并给出了曲线变化的趋势。

另一方面，针对经典的Bézier曲线在控制顶点给定，曲线就唯一固定，缺乏进一步调整曲线形状能力的这一状况，本文给出了一种带两个形状参数的Bézier曲线。这种带形状参数的Bézier 曲线保留了经典Bézier曲线的优良性质，并且可以通过改变形状参数的取值来调整曲线的形状。另外这两个形状参数还具有明显的几何意义。最后通过例子说明了与[23]中带一个形状参数的Bézier 曲线相比，在形状调整中具有更高的自由度。

关键词： S-λ曲线；生成函数；形状调整；Bézier曲线；形状参数

Abstract

In [1], Fan and Zeng introduced S-λ bases and S-λ curves, they also pointed out that we can adjust the shape of S-λ curves through disturbing the coefficients of generating function. In this paper, we do a further research on this method and give some conclusions about the relationships between the after-disturbing curve and the normal curve and the function of distance between the two curve and a corresponding control point when disturbing a single coefficients of the generating function. At the end, 2 kinds of 3 times Bézier curves with specific control polygon is given.

Besides, when the control points are given, the shape of the classical Bézier curve is uniquely decided. For remedying this, a kind of Bézier curve with 2 shape parameters are given, which not only hold the excellent properties of the classical Bézier curve, but also do the shape of the curve can be changed through adjusting the shape parameters. Finally, we illustrate that the curve in this paper has higher degree of freedom in the shape adjustment compared to the Bézier Curve with a shape parameter in [23] through an example.

Key words: S-λ Curves; Generating Function; Shape Change; Bézier Curves; Shape Parameters

目 录

Contents

第一章　绪论

1.1　背景介绍

计算机辅助几何设计，简称CAGD，是一门伴随着CAD而发展的数学与计算机科学交叉融合产生的学科，其中曲线曲面造型是计算机辅助几何设计和计算机图形学等领域的重要研究内容，主要研究在计算机环境下曲线曲面的表示、设计、显示和分析等，涉及到计算机动画、科学计算的可视化、图像处理、计算机视觉等众多学科，具有广泛的应用背景。

1962年贝齐尔（Pierre Bézier）提出了CAGD中最重要的基函数之一Bézier基函数，而在1959年，德卡斯特罗（Paul de Casteljau）则更早的给出了计算Bézier曲线的de Casteljau's算法。另一个在CAGD中应用十分广泛的基函数是B样条基函数，1947年舍恩伯格（I.J.Schoenberg）提出了B样条的一般理论。1972年，德布尔（de Boor）给出了B样条的标准计算方法，1974年，美国通用汽车公司的戈登（Gorden）和里森费尔德（Riesenfeld）将B样条用于形状描述，提出了B样条曲线曲面， 1975年，福斯普利尔（Versprill）提出了有理B样条方法。80年代后期皮格尔（Piegl）和蒂勒（Tiller）将有理B样条发展成非均匀有理B样条方法，并成为当前自由型曲线曲面描述最广为流行的数学方法。

此后由于有理多项式形式的限制及实用上存在的缺点，研究者们开始为寻找新的基函数而进行着不断的努力。

一方面由于Bézier曲线具有良好的性质，但在给定控制顶点的条件下，曲线形状即唯一确定。许多研究者在Bézier基函数的基础上进行了各种推广，得到了一些带形状参数的类Bézier基函数和曲线[10-24]，使得可以在保持控制顶点不变的条件下，通过调节形状参数来调整曲线形状。

另一方面Goldman等人提出了一系列离散型的概率造型基函数，包括负Bernstein基函数、 Poisson基函数等。在[1]中，Fan和Zeng提出了S-λ基函数和S-λ曲线的概念，将之前这些基于离散型概率分布而得到的各种基函数和曲线曲面统一在S-λ框架下来集中进行研究。

1.2 本文主要内容

本文共有四个章节的内容。

第一章介绍了计算机辅助几何设计这门学科的发展以及本文的研究背景，并介绍了本文的主要内容。

第二章首先介绍了S-λ基函数和S-λ曲线的概念，然后对Fan和Zeng在[1]中提出的通过扰动生成函数系数来调整S-λ曲线形状这一想法进行了进一步研究，并得到了一些结论。证明了当对生成函数$S_n(t)$的j次项系数进行扰动时，扰动后的曲线与原曲线之间的具体关系以及两者到控制顶点V_j的距离之间的关系，最后给出了具体的例子，对两类特殊结构的三次Bézier曲线，对其生成函数系数进行扰动时曲线的整体的变化趋势做了相应的分析。

第三章首先构造了一种带有两个形状参数的Bézier基函数，在此基础上定义了一种带有两个形状参数的 Bézier曲线$C(t)$，并给出了此基函数和曲线的一些基本性质。最后对形状参数的几何意义进行了相应的分析。

第四章对本文进行了总结，并展望了进一步的研究方向。

第二章　S-λ曲线的调整方法

2.1　S-λ基函数和S-λ曲线简介

本节内容主要节选自[1]。

对任意给定的非负整数l，设$A=\{A_j\}_{j=0}^{l}$为非负整数序列，令$A^{(n)}=\{A_j^{(n)}\}_{j=0}^{nl}$为$A$的$n$次卷积序列，显然$A^{(n)}$也是非负整数序列。

定义 2.1：　对任意给定的非负整数l和正整数n，定义$A^{(n)}$的生成函数如下：

$$S_n(t)=[S(t)]^n=\sum_{j=0}^{nl}A_j^{(n)}t^j \tag{2-1}$$

并且我们设$S_n(t)$的收敛半径为R，$S_n(0)=1$。

显然由$S_n(0)=1$可知，$A_0^{(n)}$恒等于1。

定义 2.2：　对任意给定的非负实数R_1，R，设$\lambda(t)$是$[0,R_1)$上的连续严格单调递增函数，值域为$[0,R)$，则称$\lambda(t)$为变换因子。

由上述生成函数和变换因子的定义可得

定义 2.3：　令

$$P_{n,j}(t)=\frac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n[\lambda(t)]}\quad t\in[0,R_1)\quad j=0,1,\ldots,nl \tag{2-2}$$

显然我们有$P_{n,j}(t)\geq 0$，$\sum_{j=0}^{nl}P_{n,j}(t)=1$。我们称$P_{n,j}(t)$为S-$\lambda$基函数。

根据S-λ基函数的定义，选择不同的生成函数和变换因子，我们可以得到不同的具体的S-λ基函数。 S-λ基函数具有一些和Bézier基函数类似的性质，例如：

- 非负性
- 单位分解性

- 边界插值性
- 单峰性

定义 2.4：　对任意给定的S-λ基函数$\{P_{n,j}(t)\}_{j=0}^{nl}$，我们定义如下的S-λ曲线

$$C(t)=\sum_{j=0}^{nl}P_{n,j}(t)V_j \tag{2-3}$$

其中$V=\{V_j\}_{j=0}^{nl}$为控制定点序列。

S-λ曲线也具有以下类似于Bézier曲线的重要性质：

- 仿射不变性
- 凸包性质
- 非退化性
- 插值于第一个控制顶点
- 变差缩减性

2.2　扰动生成函数系数后S-λ曲线变化趋势

曲线曲面的形状调整技术一般包括控制顶点调整、节点向量调整或是对基函数加入形状参数调节因子。而对于上述提出的S-λ曲线曲面需要用到生成函数这一概念，[1]中提出了一种通过扰动生成函数系数来对S-λ 曲线进行形状调整的思想。

首先我们引入如下定义：

定义 2.5：　空间中一条曲线$C(t)$与一个定点V_j之间的距离是指曲线上的点与V_j距离的最小值。即

$$d(C(t),V_j)=\min\{d(C(t_0),V_j)\quad,t_0\in D\}$$

其中D为$C(t)$的定义域。

而由于S-λ基函数的单峰性质，若$P_{n,j}(t)$的极值点对应的参数为t_j,则说明曲线$C(t)$上受控制顶点V_j影响最大的点是$C(t_j)$，因此对$C(t)$来说，$C(t_j)$距离控制顶点V_j的距离最短。我们定义该距离为S-λ曲线$C(t)$与控制顶点V_j之间的距离。

给定一条S-λ曲线

$$C(t) = \sum_{j=0}^{nl} P_{n,j}(t)V_j \tag{2-4}$$

其生成函数为$S_n(t) = \sum_{j=0}^{nl} A_j^{(n)} t^j$，变换因子为$\lambda(t)$，$t \in R_0$，$\{V_j\}_{j=0}^{nl}$为控制顶点序列。

现在我们来考虑在控制顶点序列不发生变化的条件下，对生成函数$S_n(t)$的第j_0个系数进行扰动时，曲线$C(t)$的变化趋势。

设扰动参数为ε，其中$\varepsilon > 0$。记扰动后的曲线为$\hat{C}(t)$。

记$\hat{C}(t)$的生成函数为$\hat{S}_n(t) = \sum_{j=0}^{nl} \hat{A}_j^{(n)} t^j$，则有

$$\hat{A}_j^{(n)} = \begin{cases} A_j^{(n)} & \text{if } j \neq j_0 \\ A_{j_0}^{(n)} + \varepsilon & \text{if } j = j_0 \end{cases} \tag{2-5}$$

因此可得

$$\begin{aligned} \hat{S}_n(t) &= A_0^{(n)} + A_1^{(n)} t + \cdots + (A_{j_0}^{(n)} + \varepsilon) t^{j_0} + \cdots + A_{nl}^{(n)} t^{nl} \\ &= S_n(t) + \varepsilon t^{j_0} \end{aligned} \tag{2-6}$$

记$\hat{C}(t)$的基函数为$\hat{P}_{n,j}(t)$，则有

$$\hat{P}_{n,j}(t) = \begin{cases} \dfrac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n(t) + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} & \text{if } j \neq j_0 \\[2ex] \dfrac{(A_{j_0}^{(n)} + \varepsilon)[\lambda(t)]^{j_0}}{S_n(t) + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} & \text{if } j = j_0 \end{cases} \tag{2-7}$$

$\hat{C}(t)$可表示为

$$\hat{C}(t) = \sum_{j=0}^{nl} \hat{P}_{n,j}(t)V_j \tag{2-8}$$

易证$\hat{C}(t)$仍为S-λ曲线。

以下我们将通过曲线到控制顶点的距离来度量扰动前后S-λ曲线的变化趋势，首先我们引入下述引理：

引理 2.1： $C(t)$和$\hat{C}(t)$是由式(2-4)和(2-8)定义的两条S-λ曲线，则对任意参数$t_0 \in R_0$，$\hat{C}(t_0)$可表示为$C(t_0)$和V_{j_0}的线性组合

$$\hat{C}(t_0) = \frac{S_n[\lambda(t_0)]}{S_n[\lambda(t_0)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}} \cdot C(t_0) + \frac{\varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}}{S_n[\lambda(t_0)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}} \cdot V_{j_0} \tag{2-9}$$

其中$S_n(t) = \sum_{j=0}^{nl} A_j^{(n)} t^j$。

证明： 对任意一点$t_0 \in R_0$，我们有

$$\begin{aligned}
\hat{C}(t_0) &= \sum_{j=0}^{nl} \hat{P}_{n,j}(t) \cdot V_j \\
&= \sum_{j \neq j_0} \hat{P}_{n,j}(t) \cdot V_j + \hat{P}_{n,j_0}(t) \cdot V_{j_0} \\
&= \sum_{j \neq j_0} \frac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n[\lambda(t)] + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} \cdot V_j + \frac{(A_{j_0}^{(n)} + \varepsilon)[\lambda(t)]^{j_0}}{S_n[\lambda(t)] + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} \cdot V_{j_0} \\
&= \sum_{j=0}^{nl} \frac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n[\lambda(t)] + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} \cdot V_j + \frac{\varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}}{S_n[\lambda(t)] + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} \cdot V_{j_0} \\
&= \frac{S_n[\lambda(t)]}{S_n[\lambda(t)] + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} \cdot \sum_{j=0}^{nl} \frac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n[\lambda(t)]} \cdot V_j + \frac{\varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}}{S_n[\lambda(t)] + \varepsilon[\lambda(t)]^{j_0}} \cdot V_{j_0} \\
&= \frac{S_n[\lambda(t_0)]}{S_n[\lambda(t_0)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}} \cdot C(t_0) + \frac{\varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}}{S_n[\lambda(t_0)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}} \cdot V_{j_0}
\end{aligned}$$

即引理得证。 □

引理 2.2： $C(t)$和$\hat{C}(t)$分别是由式(2-4)是由式(2-8)定义的两条S-λ曲线，则有：

- $C(t)$到控制顶点V_j距离最近的点的参数t满足：

$$j \cdot S_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \frac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)} = 0 \tag{2-10}$$

- $\hat{C}(t)$到控制顶点V_j的距离最近的点参数t满足：

$$j \cdot S_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \frac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)} + \varepsilon \cdot (j - j_0) \cdot \lambda(t)^{j_0} = 0 \tag{2-11}$$

并且解都具有唯一性。

证明： 由之前分析可知，曲线$C(t)$上到控制顶点V_j距离最近的点对应的参数即为当$P_{n,j}(t)$取最大值时的参数。并且由$P_{n,j}(t)$的单峰性可知；得到的关于参数t的方程解存在并且是唯一的。

对基函数$P_{n,j}(t) = \frac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n[\lambda(t)]}$求导，并令

$$\begin{aligned}
\frac{d[P_{n,j}(t)]}{dt} &= \frac{d\frac{A_j^{(n)}[\lambda(t)]^j}{S_n[\lambda(t)]}}{dt} \\
&= \frac{[A_j^{(n)} \cdot j \cdot [\lambda(t)]^{j-1} \cdot S_n([\lambda(t)]) - A_j^{(n)} \cdot [\lambda(t)]^j \cdot \frac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)}] \cdot \frac{d\lambda(t)}{dt}}{[S_n[\lambda(t)]]^2} \\
&= \frac{A_j^{(n)} \cdot [\lambda(t)]^{j-1} \cdot [j \cdot S_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \frac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)}] \cdot \frac{d\lambda(t)}{dt}}{[S_n[\lambda(t)]]^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

即得到

$$j \cdot S_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \frac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)} = 0$$

同理可得：曲线$\hat{C}(t)$上到控制顶点V_j距离最近的点对应的参数即为当$\hat{P}_{n,j}(t)$取最大值时的参数。并且关于参数t的方程解也是存在并且是唯一的。由式(2-7)可得$\hat{C}(t)$对应于控制顶点V_j的基函数为

$$\hat{P}_{n,j}(t) = \frac{(A_j^{(n)} + \varepsilon)[\lambda(t)]^j}{S_n(t) + \varepsilon[\lambda(t)]^j}$$

令

$$\frac{d[\hat{P}_{n,j_0}(t)]}{dt} = 0$$

即有

$$j \cdot \hat{S}_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \frac{d\hat{S}_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)} = 0$$

将式(2-7)带入上式有

$$j \cdot [S_n[\lambda(t)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t)]^j] - \lambda(t) \cdot \frac{d[S_n[\lambda(t)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t)]^j]}{d\lambda(t)} = 0$$

化简后得到

$$j \cdot S_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \frac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)} + \varepsilon \cdot (j - j_0) \cdot \lambda(t)^{j_0} = 0$$

□

首先我们来考虑当对生成函数$S_n(t)$的第j_0个系数进行扰动ε时，曲线到控制顶点V_{j_0}距离将如何变化。

由上述引理2.1及2.2，我们可以得到如下结论：

定理 2.1：　$C(t)$和$\hat{C}(t)$是由式(2-4)和(2-8)定义的两条S-λ曲线，则$C(t)$和$\hat{C}(t)$到控制顶点V_{j_0}的距离有如下关系

$$d(\hat{C}(t), V_{j_0}) = \frac{S_n[\lambda(t_0)]}{S_n[\lambda(t_0)] + \varepsilon \cdot [\lambda(t_0)]^{j_0}} d(C(t), V_{j_0}) \tag{2-12}$$

其中t_0是方程$j_0 \cdot S_n[\lambda(t)] - \lambda(t) \cdot \dfrac{dS_n[\lambda(t)]}{d\lambda(t)} = 0$的唯一解。