学校编码：10384　　　　分类号＿＿＿ 密级＿＿＿

学号：19020110154002　　　　UDC＿＿＿

厦门大学

博 士 学 位 论 文

耦合分数阶微分方程组的理论分析和数值计算

Theoretical Analysis and Numerical Computation for Coupled Systems of Fractional Ordinary Differential Equations

周 晓 军

指导教师姓名：许 传 炬 教授

专 业 名 称：计 算 数 学

论文提交日期：2014 年 4 月

论文答辩日期：2014 年 5 月

学位授予日期：2014 年 月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿

评 阅 人：＿＿＿＿＿

2014 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　　）1、经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　　　　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　　）2、不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

中文摘要

随着试验和理论分析的不断发展，分数阶微分方程的应用领域不断扩大。目前已知的应用范围涵盖粘弹性力学、湍流、自动控制理论、信号处理、混沌、凝聚态物理分形和多孔介质中溶质的对流与弥散、生物数学及统计力学、生物化学、分子生物学、水文学、经济等。特别是，许多复杂问题是通过耦合的分数阶微分方程组来描述的，它们的特征是耦合、非线性。一方面，方程组中所含的分数阶导数具有非局部性质，能有效地刻画具有记忆和遗传特性的问题；另一方面，非局部性质也给理论分析和数值计算带来困难。因此研究这类方程组的性质和数值算法有现实的理论和应用意义。

本文讨论耦合分数阶微分方程组的理论和数值算法, 主要内容包括以下几个方面：

第一章，给出了本论文的研究现状、背景和意义，总结了前人所做的工作，介绍了一些预备知识，详列了本论文的研究内容和结构。

第二章，回顾了Riemann－Liouville和Caputo分数阶微分方程初值问题解的存在唯一性，它是基本而重要的，其中的证明方法对我们接下来的分析具有重要的参考价值。

第三章，讨论了一类耦合非线性分数阶微分方程组解的存在性和唯一性。这类问题来自于分数阶最优控制问题的Euler-Lagrange方程，它是一个分数阶微分方程组的边值问题，我们证明了解的存在唯一性。这个问题中的导数是 Riemann-Liouville 分数阶导数，非线性项关于方程组的解是耦合的，我们的分析办法是将原问题化为等价的积分方程组，然后采用Leray-Schauder择一定理和Banach压缩原理证明了解的存在唯一性。最后，我们通过具体例子说明了理论结果的适用性。

第四章，讨论了一类自治分数阶微分方程组解的适定性。此类问题的背景源于两区域的捕食模型。我们运用上下解方法得到了解的存在唯一性，同时利用带奇性的Gronwall 不等式得到了解关于初值的连续依赖性。另外，随着分数阶α趋于1时，数值模拟发现我们提出的两区域分数阶捕食模型与整数阶是一致的。我们还分析和计算了平衡点的存在性以及稳定性。

第五章，考虑阶数为α的分数阶常微分方程组的数值解。对非线性分数阶常微分方程组构造和分析了一个高阶数值格式。此方法是基于block-by-block格式的思想，我们推广了文 [J. Cao and C. Xu., *J. Comput. Phys.*, 238(2013), pp.154-168]的结果到方程组情形，并给出了此方法的稳定性和收敛性分析。证明了：当$0 < \alpha \leq 1$时，格式的收敛阶为$3+\alpha$；当$\alpha > 1$时，收敛阶是4。最后的数值算例得到了与理论分析一致的结果。

关键词： 耦合分数阶微分方程组；Leray-Schauder择一定理；存在唯一性；两区域捕食模型；上下解方法；高阶算法

Abstract

Fractional calculus is a generalization of the traditional integer order calculus. With the progress of experimental and theoretical development, fractional differential equations have been found application in extensive fields covering, e.g., viscoelastic mechanics, turbulence, control theory, signal processing, chaos, fractal in condensed matter physics and advection and dispersion of solutes in natural porous or fractured media, biomathematics and statistical mechanics, biochemistry, molecular biology, hydrology, economics, etc. In the real world, many complex problems are described by coupled and nonlinear systems of fractional differential equations. On one side, the main feature of fractional differential equations is the so-called non locality, stemming from the use of non-integer order derivatives. It can effectively describe the memory and transmissibility of many kinds of materials; On the other side this feature causes great difficulties in designing and analyzing efficient numerical methods for fractional differential equations.

This thesis aims at developing theoretical and numerical analysis for a number of coupled systems of fractional order differential equations. The outline of this thesis is as follows.

In Chapter 1, a brief history of fractional calculus, the existing work, significance of the current research, and some related results about fractional differential equations are reviewed. We also recall some definitions and properties of the fractional derivatives, which will be used in the paper.

In Chapter 2, we review some useful existence and uniqueness results of initial value problems of Riemann-Liouville and Caputo fractional differential equations. It is an essential and important reference to us in the next analysis.

In Chapter 3, we discuss the existence and uniqueness of a class of nonlinear coupling systems of fractional differential equations. This system stems from the Euler-Lagrange equations of fractional optimal control problem, which is the boundary value problem of a coupled system of fractional differential equations. We proved the existence and uniqueness of solutions to the considered problem. The underlying differential system is featured by a fractional differential operator, which is defined in the Riemann-Liouville sense, and a nonlinear term in which different solution components are coupled. The analysis is based on the reduction of the given system to an equivalent system of integral equations. By means of the nonlinear alternative of Leray-Schauder, the existence of solutions of the factional differential system is obtained. The uniqueness is established by using the Banach contraction principle. Finally, we illustrate the adaptability of theoretical results through a specific example.

In Chapter 4, we discuss the well-posedness of a system of autonomous differential e-quations, which is a two patch predator-prey metapopulation model. Using the monotone iterative technique combined with the method of upper and lower solutions, we investigate the existence and uniqueness of solutions for the coupled system involving nonlinear fractional differential equations. Furthermore we obtain a dependence of the solution on the initial values using the Gronwall inequality with singularity. In addition, we provide an illustrative example that is a two-patch subdiffusive predator-prey metapopulation model, investigate the solvability, and present some numerical results. The numerical simulation indicates that the results from using the subdiffusive model is close to the traditional two-patch predator-prey metapopulation model when the order α tends to 1.

In Chapter 5, we introduce a general method to construct high order schemes for the numerical solution of an nonlinear system of fractional ordinary differential equations(FODEs). The proposed method is based on the so-called block-by-block approach, which has been a common method for the integral equations. This method can be regarded as an extension of the scheme proposed by Cao & Xu for the numerical solution of the FODEs [*J. Comput. Phys.*, 238(2013), pp.154-168]. The stability and convergence of the scheme is rigorously established. We prove that the convergence order of the schema is $3+\alpha$ for $0<\alpha\leq 1$, and order 4 for $\alpha>1$. Some numerical examples are provided to confirm the theoretical claims.

Key words: Coupled system of fractional differential equations; Nonlinear alternative of Leray-Schauder; Existence and Uniqueness; Two-patch predator-prey metapopulation model; Methods of upper and lower solutions; High order schemes

目 录

Contents

第 一 章　绪论

1.1　研究现状

在近三个世纪里，对分数阶微积分理论的研究主要在数学的纯理论领域里进行，似乎它只对数学家们有用。然而在近几十年来，分数阶微分方程 (FODEs) 越来越多的被用来描述粘弹性材料[6,7,46,56]、材料的电性质[19]、电磁波[80]、电化学过程[41]、动力系统中的控制理论[70,83]、信号处理[60]、信息理论[59]、输送管中的边界层效应[82]、反馈放大器[11]、生物系统中的电导[23]、分形动力学[48,57]、混沌[94]、神经细胞中离子的反常扩散[13,25,38,45]、分形和多孔介质中溶质的对流与弥散[9,10]、生化[93]、水文[78]、金融[37,62,73]及其他应用领域中的问题。Nutting[66]、Gemant[35,36]和 Scott-Blair[79]曾将分数阶微积分理论引入粘弹性材料的本构关系中。另外，Caputo[16]、Mainardi[17,18]等人将分数阶微积分理论很好地应用在有关地震、冶金等方面。 20世纪70年代末，美国耶鲁大学Mandelbrot[58]教授提出了分形学说，认为自然界和许多科学技术领域都存在大量分数维的现象，而且在整体和局部之间存在自相似现象，并且将Riemann-Liouville分数阶微积分用以分析和研究分形媒介中的布朗运动以后，分数阶算子尤其是分数阶微积分和分数阶微分方程理论及其应用研究在国际上才得到广泛关注和迅速发展。分数阶微积分理论也受到越来越多的国内外学者的广泛关注，特别是从实际问题抽象出来的分数阶微分方程成为很多数学工作者的研究热点。随着分数阶微分方程在越来越多的科学领域里出现，无论对分数阶微分方程的理论分析还是数值计算的研究都显得尤为必要。然而由于分数阶微分是拟微分算子，它的保记忆性（非局部性）对现实问题进行了精确刻画的同时，也给我们的分析和计算造成了很大困难。

在分数阶微积分理论研究方面，1974年Oldham和Spanier[69]出版了第一部分数阶导数专著，同年一些学者在美国召开了第一次国际学术会议。随后，相关专著不断涌现，如：Miller和Ross[63]，Samko[77]， Podlubny[71]， Kilbas[44]和Diethelm[27]。最近10年来每两年举办一次“分数阶微积分及其应用”系列国际会议，如2004年在法国，2006年在葡萄牙，2008年在土耳其，2010年在西班牙，2012年在中国。2014年计划在意大利召开。现阶段每年关于分数阶微积分的研究论文有几百篇，分数阶微积分的理论研究与应用研究已经渗入到了现有学科的各个领域。大量的研究成果的面世也极大地推动了分数阶微积分的研究进展，大批学者纷纷投入到这个新兴的研究领域。

近几十年里，研究者们发现分数阶微分方程非常适合用来描述现实生活中具有记

忆和遗传特性的问题, 而许多复杂问题又是通过耦合的分数阶微分方程组来刻画的。此类分数阶微分方程组的特征是耦合、非线性、非局部性。在理论研究方面，对分数阶微分方程组的定性分析尚无系统性的结果，大多只是给出了某一类非常特殊的方程的分析和求解，且常用的求解方法都是具有局限性的。

在数值求解方面，现有分数阶方程组数值算法还很不成熟，数值计算中一些挑战性难题仍未得到彻底解决，如长时间历程的计算和大空间域的计算等。现在研究较多的算法主要集中在有限差分方法，有关有限元法和谱方法的研究很少，也未形成成熟的数值计算软件。因此，发展新的数值算法，特别是在保证计算可靠性和精度的前提下，提高计算效率，解决分数阶微分方程计算量和存储量过大的难点问题成为迫切需要关注的课题。

1.2 研究动机

复杂物理、力学、生物和工程的建模问题是推动分数阶微积分理论和应用研究的主要力量。随着人类科技的进步和认识的不断提高，分数阶微分方程涉及到的应用学科越来越多，它的研究引起了学者广泛的关注，使之成为一个新的活跃的研究领域。在现实世界中，许多复杂问题的描述是通过耦合的分数阶微分方程组来描述的，因此，如何分析和求解分数阶微分方程组就成为一个有现实背景的研究课题。

不同于整数阶微分方程组，关于分数阶微分方程组理论研究的文献较少看到，目前主要是针对一些特殊的方程组（如线性、常系数）的适定性有一些讨论[12,68]。然而，对于耦合、非线性的分数阶微分方程组方面的研究进展较缓。当然，单个方程适定性的讨论文献较多，也相对成熟。如：Diethelm等人考虑了分数阶常微分方程(FODEs)初值问题解的适定性[29]，Kilbas等人利用广义的Mittag-Leffler函数研究了Volterra integro-differential方程的解的表达式[43]，Diethelm[26]考虑了 Caputo分数阶微分方程解的光滑性，Deng[24]研究了非线性分数阶微分方程解的可微性质以及解局部渐近稳定的充分条件。Diethelm在文[27]给出了FODEs理论方面的最新发展。

关于分数阶微分方程组的适定性讨论，目前用到的方法主要是不动点定理，采用一些整数阶情形的理论。推广整数阶微分方程组的结果到分数阶，这些是目前常用的办法，也是自然的想法。尽管对非线性分数阶微分方程组适定性的研究存在一定困难，但我们看到对它的研究兴趣却日益高涨。2004年Bai和Fang[8]利用Leray-Schauder择一公理和Krasnoselskii's不动点定理得到了一个奇异耦合非线性分数阶微分方程组正解的存在性。2007年，Bonilla，Rivero和Trujillo[12]给出了线性分数阶微分方程组带Mittag-Leffler函数的解的一般表达式，特别针对线性常系数情形得出了解的显