学校编码：10384　　　　分类号______ 密级______

学号：19020111152544　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

两类无限维李代数结构的研究

On structures of two classes of infinite dimensional Lie algebras

赵 庆 斌

指导教师姓名： 谭 绍 滨 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2014 年 4 月

论文答辩日期： 2014 年 5 月

学位授予日期： 2014 年 6 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2014 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于

年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　√　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

中文摘要

本文主要考虑两类无限维李代数的结构理论. 首先我们确定了复数域上的秩为 2 的广义无中心 Virasoro 代数 $\mathcal{V}(\alpha)$ （$\alpha \in \mathbb{C}^{\times}$）的导子代数. 具体地, 作为向量空间 $\mathcal{V}(\alpha) = \bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L(i,j)$, 其李关系为

$$[L(i,j), L(k,l)] = \big(k-i+(l-j)\alpha\big)L(i+k, j+l), \quad (i,j),(k,l) \in \mathbb{Z}^2. \tag{0.1}$$

我们在定理 2.1 中证明了它的导子代数 $\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big) = \bigoplus\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}$, 其中, 对 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} \mathbb{C}\,\mathrm{ad}\,L(\boldsymbol{x}), & \text{当 } x_1+\alpha x_2 \neq 0 \text{ 时}, \\ \mathbb{C}D^1_{\boldsymbol{x}} \bigoplus \mathbb{C}D^2_{\boldsymbol{x}}, & \text{当 } x_1+\alpha x_2 = 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{0.2}$$

上式中 $D^i_{\boldsymbol{x}}$ $(i=1,2)$ 的定义如下

$$D^i_{\boldsymbol{x}}\big(L(\boldsymbol{m})\big) = m_i L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}), \quad \boldsymbol{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2. \tag{0.3}$$

其次我们完全刻画了一个包含 Witt 代数作为其子代数的李代数 $\mathcal{L}$ 的自同构群. 具体地, 作为向量空间 $\mathcal{L} = \bigoplus\limits_{m\in\mathbb{Z}} (\mathbb{C}L_m \bigoplus \mathbb{C}E_m)$, 其李积为

$$\begin{cases} [L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}, \\ [E_m, E_n] = \frac{m-n}{2}L_{m+n}, \\ [L_m, E_n] = (m-n)E_{m+n}. \end{cases} \tag{0.4}$$

我们的主要结论是李代数 $\mathcal{L}$ 的自同构群

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{L}) \cong K_4 \ltimes G, \tag{0.5}$$

其中 K_4 是 Klein 四元群, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{i}{\sqrt{2}}b \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}b & a \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, i=\sqrt{-1},\ a,\ b \in \mathbb{C} \right\}$.

关键词： 导子；自同构群；无限维李代数.

Abstract

In this paper we mainly consider the structures of two classes of infinite dimensional Lie algebras. Firstly we determine the derivation algebra of the generalized centerless Virasoro algebra $\mathcal{V}(\alpha)$ of rank 2 over the field of complex number. In detail, as a vector space $\mathcal{V}(\alpha)=\bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L(i,j)$, with bracket

$$[L(i,j),L(k,l)]=\big(k-i+(l-j)\alpha\big)L(i+k,j+l),\ \text{ for }\ (i,j),\ (k,l)\in\mathbb{Z}^2. \tag{0.6}$$

In theorem 2.1 we prove that the derivation algebra of $\mathcal{V}(\alpha)$ is $\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)=\bigoplus\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2}\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}$, where for $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}=\begin{cases}\mathbb{C}\ \mathrm{ad}\ L(\boldsymbol{x}), & \text{if } x_1+\alpha x_2\neq 0,\\ \mathbb{C}D^1_{\boldsymbol{x}}\bigoplus\mathbb{C}D^2_{\boldsymbol{x}}, & \text{if } x_1+\alpha x_2=0,\end{cases} \tag{0.7}$$

and $D^i_{\boldsymbol{x}}$ $(i=1,2)$ is defined as

$$D^i_{\boldsymbol{x}}\big(L(\boldsymbol{m})\big)=m_iL(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}),\quad \boldsymbol{m}=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2. \tag{0.8}$$

Secondly we characterize completely the automorphism group of $\mathcal{L}$ which contains the Witt algebra as its subalgebra. In detail, as a vector $\mathcal{L}=\bigoplus\limits_{m\in\mathbb{Z}}\big(\mathbb{C}L_m\bigoplus\mathbb{C}E_m\big)$, with bracket

$$\begin{cases}[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n},\\ [E_m,E_n]=\frac{m-n}{2}L_{m+n},\\ [L_m,E_n]=(m-n)E_{m+n}.\end{cases} \tag{0.9}$$

Our main result is that the automorphism group of $\mathcal{L}$

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{L})\cong K_4\ltimes G, \tag{0.10}$$

where K_4 is the Klein four group and $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{i}{\sqrt{2}}b \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}b & a \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, i = \sqrt{-1},\ a,\ b \in \mathbb{C} \right\}$.

Key words: derivation; automorphism group; infinite dimensional Lie algebra.

目 录

Contents

第 一 章 引言

李群和李代数的理论起始于 19 世纪末, 是近代数学中的一个重要分支. 李群概念是由挪威数学家 S. Lie 在关于微分方程的积分求解问题以及对连续变换群的研究中首先提出并逐步发展起来的.

李代数源于李群, 最初是作为研究李群的代数工具而引进的. 李群是可微分的群, 而微分的基本思想就是在无穷小层面上的线性化. S. Lie 认为, 作为一个具有抽象群、拓扑空间和流形三方面结构的有机结合体, 李群的大量信息已然被包含在"群的无穷小变换"的纯代数结构中, 而且这种代数作为线性对象在许多方面要比可微群更容易研究. 1934 年, H. Weyl 正式将这一代数结构称为"李代数", 并指出李代数具有独立研讨的价值. 此后, 李代数的研究在近代数学中得到了蓬勃发展, 现已发展成为一个独立的数学分支, 并且与近代数学的诸多领域发生着千丝万缕的联系.

19 世纪末, W. Killing 和 E. Cartan 对于可解李代数、单李代数以及半单李代数的研究取得了丰硕成果. 而后经过 E. Cartan 的工作和 H. Weyl 的完善, 特征为零的域上的有限维半单李代数已被完全刻画：任意一个有限维半单李代数均可分解为单李代数的直和. H. Weyl 进一步发展了 Killing-Cartan 理论, 并得到复半单李代数的有限维表示的完全可约性以及有限维不可约表示的特征标公式. 1966 年, J. P. Serre 统一实现了有限维复半单李代数.

1968 年, V. G. Kac 和 R. V. Moody 在前人工作的基础上, 各自独立地对有限维单李代数进行无限维推广而引入 Kac-Moody 代数. 至此, 李代数的结构理论和表示理论的研究进入到一个崭新阶段, 其研究成果也层出不穷. 由于被发现在组合数学、数论、可积系统、算子理论、随机过程等数学分支以及物理学的量子场论中有着广泛应用, Kac-Moody 代数成为众多数学家和物理学家关注和研究的焦点.

对于李代数的导子、自同构群的研究可以加深人们对李代数自身结构和它的表示的认识. 通过对导子和中心扩张的研究, 我们由一些特定的代数的导子李代数、中心扩张或全形（即代数与它的导子的半直积）出发可以构造许多有意义的李代数. 此

外, 通过对李代数的自同构映射和自同构群的研究同样也可以帮助人们构造出更多更有趣的李代数及其表示. 比如, 扭的仿射李代数就是通过无扭仿射李代数在某种特殊的自同构映射下的不动点李子代数来实现, 而且这种方法还被推广到顶点代数表示的构造中去.

众所周知, 一元 Laurant 多项式环上的全体导子构成的李代数称为 Witt 代数, 而 Witt 代数的一维泛中心扩张后形成的新的李代数称为 Virasoro 代数. 包含 Witt 代数或 Virasoro 代数作为其子代数的一些李代数 (如 [6] [7] [18] [19] [23] [25] [27] [37] 等), 或其它一些与 Virasoro 代数相关的李代数 (如 [9] [10] [22] [29] [39] 等), 它们的结构理论与表示理论自然引起我们的关注. 文献 [23] 研究了一类广义 Witt 型李代数 $\mathcal{W}(l_1, l_2, l_3, \Gamma)$, 并确定了它的同构类和结构空间. 这类广义 Witt 型李代数囊括了诸多重要的与 Witt 代数相关的一些李代数. 比如, $\mathcal{W}(l, 0, 0, \{0\})$ 是经典的多元多项式环 $\mathbb{F}[t_1, \cdots, t_l]$ 上的 Witt 代数, 而 $\mathcal{W}(0, 0, l, \mathbb{Z}^l)$ 是经典的多元 Laurant 多项式环 $\mathbb{F}[x_1^{\pm1}, \cdots, x_l^{\pm1}]$ 上的 Witt 代数. 更一般地, $\mathcal{W}(0, 0, l, \Gamma)$ 是文献 [37] 中所研究的广义 Witt 代数, 而 $\mathcal{W}(l_1, 0, l_3, \Gamma)$ 则是文献 [6] [7] 中所研究的广义 Witt 代数. 特别地, $\mathcal{W}(0, 0, 1, \mathbb{Z})$ 是经典的 Witt 代数, $\mathcal{W}(0, 0, 1, \Gamma)$ (当 $\Gamma \in \mathbb{F}$ 有限生成时) 是文献 [19] 所考虑的高秩 Witt 代数或是文献 [25] 中所称为的广义无中心 Virasoro 代数. 在本文中, 我们首先对复数域上的秩为 2 的广义无中心 Virasoro 代数的导子进行研究, 在第三章, 我们刻画了一个包含 Witt 代数作为其子代数的李代数 $\mathcal{L}$ 的自同构群.

在本文中, 记 $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{F}$, 分别为复数域, 非零复数集, 整数集, 正整数集, 任意一个域.

第 二 章　李代数 $\mathcal{V}(\alpha)$ 的导子

在本章中, 我们所考虑的李代数是复数域上的秩为 2 的广义无中心 Virasoro 代数 $\mathcal{V}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}^{\times}$. 具体地, 作为向量空间 $\mathcal{V}(\alpha) = \bigoplus\limits_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L(i,j)$, 其李关系为

$$[L(i,j), L(k,l)] = \big(k - i + (l-j)\alpha\big)L(i+k, j+l), \quad (i,j),(k,l) \in \mathbb{Z}^2. \tag{2.1}$$

对 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, 我们记 $L(\boldsymbol{m}) := L(m_1, m_2)$ 以及 $\mathcal{V}(\alpha)_{\boldsymbol{m}} := \mathbb{C}L(\boldsymbol{m})$. 显然, 李代数 $\mathcal{V}(\alpha)$ 有一个自然的 $\mathbb{Z}^2$ 阶化 $\mathcal{V}(\alpha) = \bigoplus\limits_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{V}(\alpha)_{\boldsymbol{m}}$.

接下来我们将给出 $\mathcal{V}(\alpha)$ 的导子的完全刻画, 为此我们先介绍一些预备知识.

定义 2.1: 设 L 为任一李代数, $D: L \to L$ 是一个线性映射. 如果映射 D 满足条件

$$D\big([u,w]\big) = [Du, w] + [u, Dw], \quad u, v \in L, \tag{2.2}$$

则称 D 为 L 的一个导子.

对 L 的一个导子 D, 如果存在 $v \in L$ 使得

$$D = \operatorname{ad} v : u \mapsto [v, u], \quad u \in L, \tag{2.3}$$

则我们称 D 为 L 的一个内导子.

设 G 为任一交换群, $L = \bigoplus\limits_{x\in G} L_x$ 是 G 阶化的, 以及 D 是 L 的一个导子. 如果对于任意的 $x \in G$, 存在 $m \in G$ 使得 $D(L_x) \subset L_{m+x}$, 则称 D 为 m 次齐次导子. 记 $\mathrm{Der}(L)$ 为 L 的导子代数, 以及记 $\mathrm{Der}(L)_x$ 为 L 的 x 次齐次导子构成的向量空间.

定理 2.1: 对于秩为 2 的广义无中心 Virasoro 李代数 $\mathcal{V}(\alpha)$, 我们有

$$\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big) = \bigoplus_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2} \mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}, \tag{2.4}$$

其中, 对 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} \mathbb{C}\operatorname{ad} L(\boldsymbol{x}), & \text{当 } x_1 + \alpha x_2 \neq 0 \text{ 时}, \\ \mathbb{C}D^1_{\boldsymbol{x}} \bigoplus \mathbb{C}D^2_{\boldsymbol{x}}, & \text{当 } x_1 + \alpha x_2 = 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{2.5}$$

上式中 $D^i_{\boldsymbol{x}}$ $(i=1,2)$ 的定义如下

$$D^i_{\boldsymbol{x}}\big(L(\boldsymbol{m})\big)=m_iL(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}),\quad \boldsymbol{m}=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2. \tag{2.6}$$

证明： 由文献 [24] 中的命题 3.2 和命题 3.3, 我们有

$$\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)=\bigoplus_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2}\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}.$$

因此我们只需证明式子 (2.5).

固定 $\mathbb{Z}^2$ 中的一个元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ 以及 $\mathrm{Der}\big(\mathcal{V}(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}$ 中的一个元素 $D_{\boldsymbol{x}}$. 显然, 存在映射 $\varphi_{\boldsymbol{x}}:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{C}$ 使得

$$D_{\boldsymbol{x}}\big(L(\boldsymbol{m})\big)=\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{m})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}),\quad \boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^2. \tag{2.7}$$

由导子的定义, 对于 $\boldsymbol{m}=(m_1,m_2)$, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$, 我们有

$$D_{\boldsymbol{x}}\big([L(\boldsymbol{m}),L(\boldsymbol{n})]\big)=\big[D_{\boldsymbol{x}}\big(L(\boldsymbol{m})\big),L(\boldsymbol{n})\big]+\big[L(\boldsymbol{m}),D_{\boldsymbol{x}}\big(L(\boldsymbol{n})\big)\big],$$

具体地,

$$\begin{aligned}&\big(n_1-m_1+\alpha(n_2-m_2)\big)\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\\=&\big(n_1-m_1+\alpha(n_2-m_2)-(x_1+\alpha x_2)\big)\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{m})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\\&+\big(n_1-m_1+\alpha(n_2-m_2)+(x_1+\alpha x_2)\big)\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}).\end{aligned} \tag{2.8}$$

下面我们分两种情形, 即 $x_1+\alpha x_2\neq 0$ 和 $x_1+\alpha x_2=0$, 来确定映射 $\varphi_{\boldsymbol{x}}$. 首先, 我们考虑 $x_1+\alpha x_2\neq 0$ 的情形. 在 (2.8) 式中取 $\boldsymbol{m}=(0,0)$, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$, 则

$$\begin{aligned}&\big(n_1+\alpha n_2\big)\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((n_1,n_2)\big)\\=&\big(n_1-x_1+\alpha(n_2-x_2)\big)\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,0)\big)+\big(n_1+x_1+\alpha(n_2+x_2)\big)\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((n_1,n_2)\big).\end{aligned} \tag{2.9}$$

由上面的式子, 我们有

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((n_1,n_2)\big)=\left(1-\frac{n_1+\alpha n_2}{x_1+\alpha x_2}\right)\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,0)\big). \tag{2.10}$$

这说明了 $D_{\boldsymbol{x}}$ 完全由常数 $\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,0)\big)$ 决定, 从而 $\dim\Big(\mathrm{Der}\big(V(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}\Big)\leq 1$. 因此, 当 $x_1+\alpha x_2\neq 0$ 时, 我们有 $\mathrm{Der}\big(V(\alpha)\big)_{\boldsymbol{x}}=\mathbb{C}\,\mathrm{ad}\,L(\boldsymbol{x})$.

其次, 我们考虑 $x_1+\alpha x_2=0$ 的情形. 此时 (2.8) 式可写为

$$\begin{aligned}&\big(n_1-m_1+\alpha(n_2-m_2)\big)\big(\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\big)\\=&\big(n_1-m_1+\alpha(n_2-m_2)\big)\big(\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{m})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})+\varphi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{n})L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})\big).\end{aligned}\tag{2.11}$$

在 (2.11) 式中取 $\boldsymbol{m}=(0,0)$, $\boldsymbol{n}=(n,0)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$, 可得 $\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,0)\big)=0$. 同时, 对 (2.11) 式取 $\boldsymbol{m}=(m,0)$, $\boldsymbol{n}=(1,0)\in\mathbb{Z}^2$, 我们得到

$$(m-1)\Big(\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m+1,0)\big)-\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((1,0)\big)-\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m,0)\big)\Big)=0.$$

当 $m\neq 1$ 时, 我们有

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m+1,0)\big)=\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((1,0)\big)+\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m,0)\big).\tag{2.12}$$

上式意味着

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m,0)\big)=\begin{cases}(m-2)\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((1,0)\big)+\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((2,0)\big), & \text{当 } m\geq 2 \text{ 时},\\ m\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((1,0)\big), & \text{当 } m\leq 1 \text{ 时}.\end{cases}\tag{2.13}$$

接下来, 我们在 (2.11) 式中选取 $\boldsymbol{m}=(m,0)$, $\boldsymbol{n}=(-m,0)\in\mathbb{Z}^2$, 可得

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m,0)\big)=-\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((-m,0)\big),\quad m\in\mathbb{Z}.\tag{2.14}$$

结合 (2.13) 与 (2.14) 这两式, 我们推出

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((m,0)\big)=m\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((1,0)\big),\quad m\in\mathbb{Z}.\tag{2.15}$$

类似地, 在 (2.11) 式中取 $\boldsymbol{m}=(0,1)$, $\boldsymbol{n}=(0,n)\in\mathbb{Z}^2$, 可得

$$(n-1)\Big(\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,n+1)\big)-\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,1)\big)-\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,n)\big)\Big)=0.$$

当 $n\neq 1$ 时, 我们有

$$\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,n+1)\big)=\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,1)\big)+\varphi_{\boldsymbol{x}}\big((0,n)\big).\tag{2.16}$$