学校编码：**10384** 分类号_______密级_______

学号：**19020110153999** **UDC**_______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

可压等熵 Navier-Stokes 和 MHD 方程边值问题整体古典解

Global Classical Solutions to Initial Boundary Value Problems on the Isentropic Compressible Navier-Stokes and MHD Equations

于海波

指导教师姓名： 赵 俊 宁 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2014 年 月

论文答辩时间： 2014 年 月

学位授予日期： 2014 年 月

答辩委员会主席：_____________

评 阅 人：_____________

2014 年 月

Doctoral Dissertation

Global Classical Solutions to Initial Boundary Value Problems on the Isentropic Compressible Navier-Stokes and MHD Equations

Haibo Yu

Supervisor: **Junning Zhao**

Speciality: **Fundamental mathematics**

Institution: **School of Mathematical Sciences**

Xiamen University

Xiamen, P.R. China

2014

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

可压等熵 Navier-Stokes 和 MHD 方程边值问题整体古典解

摘　要

Navier-Stokes 方程作为描述流体运动的模型, 已被学界广泛接受并获得了深入的研究. 但对其在高维有界域上整体古典解的研究却没有大的进展. 基于此, 本文主要研究可压 Navier-Stokes 方程和相关磁流体方程边值问题古典解的整体存在性, 另外还给出了一个磁流体的爆破准则.

本文第一个结果是讨论高维 (2D 和 3D) 可压等熵 Navier-Stokes 方程边值问题古典解的整体存在性．我们对具有旋度型边值条件的 Navier-Stokes 方程, 证明了初始密度包含真空的小能量古典解的整体存在性. 在处理边值问题的过程中, 一些新的困难被克服. 首先, 由于不知道 ”有效粘性通量” F 的边值 (F 在 [1] 处理 Cauchy 问题时起了至关重要的作用), 这里我们利用对速度场的分解成功地克服了因回避 F 所带来的困难; 其次, 我们利用新的技巧证明了速度场的梯度 L^2 有界, 并得到一类依赖于时间 t 的先验估计; 最后, 在能量小的条件下, 利用 Zlotnik 不等式成功得到密度的一致上界, 从而证明了整体古典解的存在性. 利用上面结果的研究思想和技巧, 我们还研究了具有一般初值的古典解存在性, 得到了边值问题解整体存在的一个充分条件.

本文还研究了高维磁流体 (MHD) 方程古典解的整体存在性, 其中我们要求速度场满足旋度型边值条件, 而磁场满足 Dirichlet 边值或者旋度型边值条件. 在处理 Navier-Stokes 方程的框架下, 我们得到了可压 MHD 方程包含真空的整体古典解. 与 Navier-Stokes 方程相比, MHD 方程的研究主要困难是由速度场和磁场相互耦合引起的, 因此在证明中需要对两者同时估计. 另外, 磁力项和对流项的强非线性也带来很大困难, 在估计的过程中需要复杂而精细的计算.

需要说明的是, 本文只对 3D Navier-Stokes 方程和 MHD 方程整体古典解的存在性做了证明. 当 $N = 2$ 时, 除 Sobolev 嵌入不等式有所区别外, 其它并无本质差别, 因此我们略去了证明过程.

本文最后一章讨论了等熵 MHD 方程 Cauchy 问题的爆破准则. 基于速度场

和磁场相互影响, 我们讨论了 MHD 方程依赖于磁场的爆破机制. 结果显示, 在对粘性系数做某些限制的情况下, 如果流体的密度和磁场的 L^r ($\frac{24}{5} \le r \le \infty$) 具有不依赖于时间 t 的一致上界, 那么可压等熵 MHD 方程具有整体强解.

关键词：可压 Navier-Stokes 方程; 可压 MHD 方程; 旋度型边值; Dirichlet 边值; 整体古典解; 爆破准则; 真空

Global Classical Solutions to Initial Boundary Value Problems on the Isentropic Compressible Navier-Stokes and MHD Equations

ABSTRACT

As the model of describing the motion of fluids, the Navier - Stokes equations have been extensively studied by many physicists and mathematicians. However, there are few results about global classical solutions in bounded domains. For this reason, we mainly consider the global existence of classical solutions to initial boundary value problems of compressible Navier-Stokes and MHD equations. A blow-up criterion of MHD equations is also studied in this article.

We first prove the global existence of classical solutions to high dimension (2D and 3D) compressible isentropic Navier-Stokes in a bounded domain. We study the Navier-Stokes equations with vorticity-type boundary condition and establish the global existence of classical solutions to Navier-Stokes equations with small energy and vacuum. Compared to Cauchy problem, there are some new difficulties on the study of the boundary value problem. First of all, since we do not know the boundary value of the effective viscous flux F which has been extensively used in [1], we have to use the decomposition technic to velocity. Secondly, some new skills are used to obtain L^2 estimate of the gradient of velocity. At last, we get some new estimates depending on time. Hence, the upper bound of density is obtained after utilizing the Zlotntik inequality, and the existence of global solutions are obtained. Based on the ideas of the above result and some technics, we also get a sufficient condition about the global existence of classical solutions with general initial data to Navier-Stokes equations.

We also study the global existence of classical solutions to MHD equations with vorticity boundary condition on velocity and Dirichlet or vorticity-type boundary condition on magnetic field. In the frame of previous work on Navier-Stokes equations, we establish global classical solutions with vacuum provided initial energy is small. Compared to Navier-Stokes equations, the difficulties are mainly caused by the interaction between velocity and magnetic field. In addition, the strongly nonlinearity about magnetic force and convection term causes some complex computations.

It should be mentioned that we only prove the results in three dimension. The two dimensional case can be dealt similarly.

In the last chapter, we give a blow-up criterion to MHD fluids. Based on the coupling effect between velocity and magnetic field, we are interested in the blow-up mechanism on magnetic. It is showed that the strong solutions exist globally if the density and L^r ($\frac{24}{5} \leq r \leq \infty$) norm of magnetic field have time-independent upper bound.

Key Words: Compressible Navier-Stokes equations; MHD equations; global classical solutions; vorticity-type boundary condition; Dirichlet boundary; strong solution; blow-up criterion; vacuum

目　录

CONTENTS

第一章　绪　论

§ 1.1　论文简介

本文研究的是可压等熵 Navier-Stokes 方程和 MHD 方程旋度型边值问题的整体适定性以及 MHD 方程 Cauchy 问题的爆破准则.

Navier-Stokes 方程作为描述流体运动的模型, 已被学界广泛接受. 流体力学家, 气象学家和数学家已经对该模型进行了广泛而深入的研究. 关于不可压 N-S 方程整体解理论自从 1934 年 Leray [2] 的开创性工作以来已有十分丰富的成果, 但整体强解的存在性问题仍然没有完全解决. 对于可压 N-S 方程, 一维情形的研究基本得到系统地解决, 具体可以参考 [3–6] 等相关文章. 对高维情况, Nash 和 Tani 等在[7–10] 中研究了初始密度不含真空的局部解存在性, Kim 和 Salvi 等人在 [11–14] 中证明了初始密度含真空局部古典解或强解的存在唯一性. 最近几十年, 对高维 N-S 方程整体解的研究也取得了一些重要进展. Matsumura 和 Nishida 在 1980 年首次得到了三维可压 N-S 方程整体强解的存在性, 在 [15] 中证明了初值在某个平衡态附近小扰动整体强解的存在唯一性, 并得到了解的长时间性态. 后来, Danchin [16] 在 Besov 空间做了类似研究, Hoff [17–19] 得到了小能量整体弱解的存在性.

由于强非线性及双曲-抛物的耦合性, N-S 方程大初值研究十分困难. 第一个重要的结果是由 Lions [20] 得到的. 当绝热指数 γ 适当大时 (当维数 $N=2$ 时要求 $\gamma \geq \frac{3}{2}$, 当维数 $N=3$ 时要求 $\gamma \geq \frac{9}{5}$), Lions 利用补偿紧致的方法得到了弱解的整体存在性. 接着, Feireisl、Novotny 和 Petzeltová [21] 把 Lions 的结果推广到 $\gamma \geq \frac{N}{2}$ 的情形. 江松和张平 [22] 证明了球对称弱解的整体存在性 ($\gamma > 1$). 对于高维 N-S 方程整体强解的研究, 我们注意到的结果有: 当粘性系数 $\lambda = \rho^{\beta}$ 时, Kazhikov 和 Vaigant [23] 证明了 $\beta > 3$ 时 N-S 方程在二维周期域或方形域上有初值不含真空的大初值古典解; 近年来, 黄祥娣、李竞和辛周平 [1] 证明初始密度含真空的等熵 N-S 方程 Cauchy 问题小能量整体古典解得存在性, 本质的改进

了三维 N-S 方程整体解存在的已有结果.

高维 N-S 方程边值问题整体强解或古典解的结果很少. 除 [23] 之外, Salvi 和 Straškraba [14] 证明当 $\|\mathbf{u}_0\|_{H^2}+\|\nabla\rho_0\|_{L^q}(q\in(3,6])$ 充分小时, N-S 方程 Dirichlet 边值问题有唯一强解. 对半空间的情形, Matsumura 和 Nishida [24] 得到初值在 H^3 附近小扰动整体解; Hoff [25] 证明了小能量整体弱解. 目前, [25] 的结果被段琴 [26] 推广至初值含真空的古典解情形. 另外, 江松、樊继山和倪国玺 [27], 丁时进、温焕尧、姚磊和朱长江 [28] 在环型域上分别得到径向对称整体强解和古典解的存在唯一性. 不过需要指出的是, 环型域上径向对称解本质上属于一维的范畴.

另外, 除了上述我们涉及到的文章外, 还有很多关于可压 N-S 方程的重要结果, 比如讨论粘性系数依赖于密度、解的爆破、粘性消失等文章, 见 [30–55].

如何将黄-李-辛 [1] 对 Cauchy 问题的重要结果推广到边值问题是本文的主要目标. 本文第二章研究了具有旋度型边值的高维 N-S 方程, 在矩形域上证明了初始密度含真空时古典解的整体存在性. 与 Cauchy 问题相比, 高维 N-S 方程边值问题主要困难如下: 第一, 在处理 Cauchy 问题的过程中, "有效粘性通量" F ($F\triangleq(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{u}-P$ 且 $F\to 0$ 当 $|x|\to\infty$) 起了至关重要的作用 (见 [1, 17–19, 25, 26]). 对于具有一般边值的 N-S 方程, F 的边值是未知的, 因而无法利用"有效粘性通量"的方法来处理. 为了克服这个问题带来的困难, 我们把速度场 $\mathbf{u}$ 作线性分解, 使 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, 其中 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 分别满足

$$\mu\Delta\mathbf{v}+(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\mathbf{v}=\nabla P$$

和

$$\mu\Delta\mathbf{w}+(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\mathbf{w}=(\rho\mathbf{u})_t+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}).$$

可以证明, 若 $\mathbf{v}$ 满足旋度型边值条件, 那么有 $(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{v}-P=C(t)$ 成立. 这样, 在作 $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^p}$ 的估计时, 可以利用 $\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^p}$ 和 $\|\nabla\mathbf{w}\|_{L^p}$ 进行估计, 使得一些困难被回避. 其次, 与 Cauchy 问题不同, 我们无法得到 $\|\nabla\dot{\mathbf{u}}\|_{L^2(0,T;L^2)}$ 关于时间 t 的一致估计. 但是, 我们发现如果 $\|\nabla\dot{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(t_1,t_2;L^2)}$ 能够被 $C(t_2-t_1)$ 控制, 我们的目的仍然可以达到. 其证明的过程富于技巧 (见引理 2.3.4 和 2.3.6). 最后, 我们应用 Zlotnik 不等式 (引理 2.2.3) 和 $\mathbf{v}$ 的性质来证明密度具有一致上界. 后面高

阶导数的估计与 Cauchy 问题类似, 我们略去了证明.

在第二章中, 我们得到的另一个结果是对一般初值的 N-S 方程, 给出了为使所讨论问题存在整体古典解初值应满足的充分条件.与前面的结果相比, 这个结果的证明过程要求更加精细, 先验估计也有明显区别, 并且为得到密度的上界, 要求 $(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\mathbf{v}-P=0$. 最终, 我们得到了为使古典解整体存在的一个相对简约的充分条件, 见定理 2.4.1. 由于本章的结果对 $N=2$ 时仍然成立, 因此可以把本章结果看作是对 Kazhikov 和 Vaigant [23] 结果的一个补充.

本文第三和第四章研究的是磁流体 (MHD) 方程. 磁流体是研究导电介质 (液体和气体) 在磁场作用下的运动规律的模型. 我们这里研究的 MHD 模型是由可压等熵 Navier-Stokes 方程结合 Maxwell 方程推导而来的. 特别的是, 若令磁场强度为 0, 那么 MHD 系统便完全退化成了 Navier-Stokes 方程. 由于在物理学中的重要地位及来自数学上的挑战, 磁流体方程得到很多物理学家和数学家的关注. 到目前为止, 已取得了丰富的成果, 见 [56–77]. 其中, 当 $N=2$ 时, Kawashima [56] 对初值在某个给定常状态下小扰动的条件下, 得到了光滑解的整体存在性, Umeda、Kawashima 和 Shizuta [57] 研究了光滑解的衰减估计. 对于三维可压 MHD 方程, 首个存在整体光滑解结果也是由 Kawashima 得到的, 他在 [58] 中对初值在某个非真空平衡态附近小扰动的情形, 证明了光滑解的整体存在性. 当初始密度为正时, Vol'pert 和 Khudiaev [59] 得到了局部强解的存在性. 樊继山和余王辉 [60] 证明了初始密度包含真空时非等熵磁流体方程局部强解的存在性. 在 Lions [20] 框架下, 胡湘朋和王德华 [61, 62], 樊继山和余王辉 [63] 证明了可压磁流体大初值重整化弱解的整体存在性. 与大初值结果相比, 在初值 L^2 小情况下, Seun 和 Hoff [64] 得到了具有更高的正则性的整体弱解. 目前 [64] 的结果由刘生全、于海波和张剑文 [65] 推广到初值含真空小能量的情形. 最近, 在黄-李-辛 [1] 的框架下, 李海梁、徐新英和张剑文 [66] 研究了可压 MHD 方程初值包含真空的小能量整体古典解, 并得到了一些速度场和磁场的大时间行为.

本文第三章研究的是 MHD 方程小能量整体古典解的存在性, 其中速度场具有旋度型边值条件, 而磁场满足 Dirichlet 边值条件或旋度型边值条件. 在证明过程中, 我们对磁流体速度场的处理与在 N-S 方程中类似. 我们分解速度场

$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, 使得 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 分别满足

$$\mu\Delta\mathbf{v}+(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\mathbf{v}=\nabla P$$

和

$$\mu\Delta\mathbf{w}+(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\mathbf{w}=(\rho\mathbf{u})_t+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})-(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B},$$

其中 $\mathbf{B}$ 表示磁场强度. 由前面处理 N-S 方程的经验知道, 上式中困难只剩下磁力项 $(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$. 并且, 磁扩散方程

$$\mathbf{B}_t-\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})=-\nabla\times(\nu\nabla\times\mathbf{B})$$

中的对流项 $\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})$ 与磁力项形式类似, 困难基本相同. 因此, 在处理磁场的过程中会遇到与速度场相同的困难. 可以看出, 速度场与磁场相互耦合在一起, 它们的估计是不可能独立得到的. 因此, 在处理过程中, 需要对速度场和磁场同时估计. 注意到磁扩散方程为标准的抛物型方程, 再结合第二章中方法, 可以得到密度的一致上界. 后面高阶导数的估计与 Cauchy 问题类似, 可以参考 [66].

我们在第四章讨论的是磁流体的爆破准则. 有很多文章都讨论过可压流体的爆破准则, 对可压 Navier-Stokes 方程和 MHD 方程强解爆破准则问题, 见 [48, 78–87]. 其中, 徐新英和张剑文 [78] 对等熵 MHD 方程证明了: 如果 T^* 为解的最大存在时间, 那么

$$\lim_{T\to T^*}(\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}+\|\mathbf{u}\|_{L^s(0,T;L^r_w)})=\infty,$$

这里, L^p_w 表示弱的 L^p 空间, $\frac{2}{s}+\frac{3}{r}\le 1$, $3<r\le\infty$. 最近, 黄祥娣和李竞 [79] 对非等熵 MHD 方程证明了

$$\lim_{T\to T^*}(\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}+\|\mathbf{u}\|_{L^s(0,T;L^r)})=\infty.$$

磁流体中速度场和磁场是相互影响的, 由此, 我们想知道磁场的爆破机制是什么样的. 受到孙勇东、王超和章志飞 [48] 启发, 我们在本章得到: 如果 T^* 为解的最大存在时间且 $3\mu>\lambda$, 那么

$$\lim_{T\to T^*}(\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}+\|\mathbf{B}\|_{L^\infty(0,T;L^r)})=\infty,$$

其中 $\frac{24}{5}\le r\le\infty$.