学校编码：10384　　　　分类号______密级______
学号：19020100153960　　　　UDC______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

大规模 Lyapunov 和 Riccati 矩阵方程的数值解法

On the numerical solution of large scale Lyapunov and Riccati matrix equations

林 一 丁

指导教师姓名：卢 琳 璋 教授，Valeria Simoncini 教授

专 业 名 称：计 算 数 学

论文提交日期：2014 年 4 月

论文答辩时间：2014 年 5 月

学位授予日期：　　年　　月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2014 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。 本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果， 获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在 （　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

本论文将主要讨论如下两类矩阵方程的求解：

Lyapunov 方程 (**LE**)：　$AX + XA^* + BB^* = 0$

连续时间代数 Riccati 方程(**CARE**)：　$A^*X + XA + C^*C - XBB^*X = 0$

其中 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times q}, C \in \mathbb{C}^{p\times n}$. 本论文中讨论的是这两类方程在大规模情况下的求解，即意味着 A 是大型稀疏矩阵并且满足 $p, q \ll n$。

这两类方程在数学理论和实际应用中都十分重要。 Lyapunov 方程在线性系统理论中占有非常重要的地位，线性系统理论的很多基本概念和基本性质都与之相关。CARE 主要应用于控制论中的线性二次最优控问题 (LQ 问题) 以及 Hamiltonian 矩阵的特征问题中。 本论文主要讨论它们的求解方法，全文共十一章，大体分三个部分。

第一部分，第一章到第三章，主要介绍了这两类方程的相关基本概念，实际应用背景以及常用的求解方法。

第二部分，第四章到第五章，主要介绍了求解 Lyapunov 方程的极小残量法（MR）。 MR 是模仿线性方程中的 GMRES 得到的，也是属于投影法的一种。主要的困难是：如何找到一个 $O(k^3)$ 的稳定算法来求解 MR 得到的降阶问题。我们在这方面做出了一些尝试，提出了一些新的算法，有直接法也有迭代法，并且对迭代法进行了收敛分析。数值实验表明了新方法的有效性。

第三部分，后面的其它章节，主要介绍 CARE 的一种新的求解算法：子空间迭代 (SI) 算法。它的特殊情况恰好就是求解 Lyapunov 方程的 ADI 算法。于是，我们就对照着 ADI 算法的发展历程 (ADI $\rightarrow$ LRADI $\rightarrow$ CFADI)进行研究，得到了求解大规模 CARE 的增量式低秩子空间迭代 (ILRSI) 算法。 我们还分析了 ILRSI 与使用有理 Krylov 子空间的 Galerkin 投影算法之间的关系，得到了很多有意义的结论。在这部分最后一章，我们进行了总结，并且提出了一些有待于进一步研究的问题。

关键词：Lyapunov 方程; 连续时间数值 Riccati 方程; 极小残量法; 子空间迭代法

Abstract

In this thesis, we explore solvers on these two kinds of matrix equations:

Lyapunov Equation (**LE**): $AX + XA^* + BB^* = 0,$

and Continuous-time Algebraic Riccati Equation (**CARE**) :

$$A^*X + XA + C^*C - XBB^*X = 0,$$

where $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$. We focus our research on large-scale problems. This means n is quite large, A is sparse, and $p, q \ll n$.

The content consists of three parts. In the first part, we introduce the basic notations, relevant theories and some applications of these two kinds of equations.

In the second part, we consider transplanting GMRES idea from linear equation to matrix Lyapunov equation. Then, a projection method, minimal residual method, is naturally obtained. Our contribution is the derivation of several methods for solving its projected reduced problem, which is a least square problem. To compete with Galerkin projection method, we devise a new direct method, and an iterative method, which is based on PCGLS. Numerical experiments with benchmark problems show the effectiveness of the MR approaches over the Galerkin procedure using the same approximation space.

In the third part, we discuss a new algorithm for solving CARE. Its initial version is a variant of orthogonal iteration on a Symplectic matrix, which is transformed from CARE's associated Hamiltonian matrix. It is found this new method coincides with ADI method in Lyapunov equation case. Therefore, we begin our research, according to the development of ADI methods (ADI$\rightarrow$ LRADI $\rightarrow$ CFADI). At the end, we obtain a low rank updating version algorithm which coincides with CFADI in Lyapunov equation case. Moreover, we establish the relations between the new methods and Galerkin projection methods. Most of properties is actually inherited form linear Lyapunov equation case. And these theories also provide a new approach on exploring the Galerkin projection methods.

Key Words: Lyapunov Equation; CARE; Minimal Residual Methods; Subspace Iteration

目　录

摘要 I

Abstract III

算法目录 XI

符号对照表 XIII

第一部分　绪论 1

第一章　绪论 2

1.1 矩阵方程的研究背景与发展现状 2

1.2 Lyapunov 方程和连续时间代数 Riccati 矩阵方程（CARE）的介绍 3

1.3 内容结构与主要成果 4

第二章　Lyapunov 方程的解法 7

2.1 投影类算法 8

2.2 交替方向隐式迭代 (ADI) 10

第三章　CARE 的解法 13

3.1 投影类算法 15

3.2 牛顿迭代法 16

第二部分　求解 **Lyapunov** 方程的极小残量法 **17**

第四章　极小残量法的降阶问题 18

4.1 模型化残量极小问题 18

4.2 极小残量的降阶问题的求解 22

4.2.1 计算残量范数 23

4.2.2 最后一个极小化问题的解 26

4.2.3 Hu-Reichel 的直接法求解降阶极小化问题 27

4.2.4 迭代法求解极小化问题 30

4.2.5 完整的迭代算法以及它的性质 33

第五章　MR 算法与数值实验 36
5.1 求解 Lyapunov 方程的极小残量法 36
5.2 数值实验 37
5.2.1 极小残量法与 Galerkin 方法 37
5.2.2 大规模情况的数值实验 37
5.3 MR 方法的总结 42
5.4 MATLAB 程序 44

第三部分　求解 CARE 的增量式低秩子空间迭代法 46

第六章　子空间迭代 (SI) 算法 48
6.1 算法的由来 48
6.2 CARE的子空间迭代算法 50
6.3 收敛性分析 52
6.4 固定点迭代 56

第七章　低秩子空间迭代 58
7.1 迭代一次的性质 58
7.1.1 M_k 的非奇异性 58
7.1.2 X_k 的 Hermitian 对称性 59
7.1.3 X_k 的显示低秩形式 60
7.2 低秩子空间迭代(LRSI) 62

第八章　增量式低秩子空间迭代 (ILRSI) 算法 64
8.1 框架以及有理 Krylov 子空间的各种基 64
8.2 采用像 CFADI 的基的 ILRSI 算法 70
8.2.1 使用 ILRSI 求解 GCARE 73
8.3 采用标准正交基的 ILRSI 算法 74

第九章　增量式低秩子空间迭代算法的特性 81
9.1 采用连乘基的 ILRSI 算法 81
9.2 ILRSI 算法产生的 T_k 满足一个 Lyapunov 方程 83
9.3 不同基之间的变换 90
9.4 CFADI 是 ILRSI 的特殊情况 93

第十章 ILRSI 与采用 RKS 的 Galerkin 投影法的关系 97

10.1预备知识 97

10.2ILRSI 近似解的另一种表达式 99

10.3ILRSI 与 Galerkin 投影法的关系 101

第十一章 数值实验与总结 105

11.1参数的选取策略 105

11.2残量范数的计算 106

11.3数值实验 107

11.4总结与展望 109

参考文献 111

攻读博士学位期间的研究成果 119

致谢 121

CONTENTS

Abstract (in Chinese) I
Abstract (in English) III
Algorithms XI
Notations XIII
Part 1 Introduction 1
Chapter 1 Preface 2
1.1 Backgrounds and developments of the matrix equations 2
1.2 Lyapunov equation and Continuous-time algebraic Riccati equation 3
1.3 Content and Structure 4
Chapter 2 Lyapunov equation Solvers 7
2.1 Projection-type methods 8
2.2 Alternating Direction Implicit (ADI) method 10
Chapter 3 Continuous-time algebraic Riccati equation solvers .. 13
2.1 Projection-type methods 15
2.2 Newton methods 16
Part 2 Minimal residual Methods on Lyapunov equation ... 17
Chapter 4 MR projected reduced problem 18
4.1 Residual minimization with subspace projection 18
4.2 The solution of the reduced minimization problem 22
4.2.1 Computation of the residual norm at each iteration 23
4.2.2 Computation of the final least squares solution 26
4.2.3 Hu-Reichel direct method for the solution of the reduced problem 27
4.2.4 Iterative method for the solution of the reduced problem 30
4.2.5 The overall iterative scheme and its properties 33
Chapter 5 Numerical experiments and conclusions 34
5.1 A minimal residual algorithm for the Lyapunov Equation 36
5.2 Numerical experiments 37
5.2.1 Minimal residual and Galerkin methods 37
5.2.2 Numerical evidence with large scale problems 37
5.3 Conclusions 42
5.4 MATLAB code 44
Part 3 Incremental low rank subspace iteration on CARE .. 46

Chapter 6 Subspace iteration (SI) 48
6.1 Inspiration of Subspace iteration 48
6.2 Subspace iteration on CARE 50
6.3 Convergence analysis of SI 52
6.4 Fixed point iteration version 56
Chapter 7 Low Rank subspace iteration (LRSI) 58
7.1 Properties at every iteration 58
7.1.1 Nonsingularity of M_k 58
7.1.2 Hermitian Symmetry of approximate solution X_k 59
7.1.3 Low rank expression of approximate solution X_k 60
7.2 Low rank subspace iteration method 62
Chapter 8 Incremental low rank subspace iteration (ILRSI) 64
8.1 Framework and different bases of rational Krylov subspace 64
8.2 ILRSI with CFADI like basis 70
8.2.1 ILRSI on generalized CARE 73
8.3 ILRSI with orthonormal basis 74
Chapter 9 Properties of ILRSI 81
9.1 ILRSI with product basis 81
9.2 T_k in ILRSI solution satisfies a Lyapunov equation 83
9.3 Transformation between different bases 90
9.4 CFADI is a special case of ILRSI 93
Chapter 10 Relations between ILRSI and Galerkin method 97
10.1 Preliminary knowledge and notations 97
10.2 Another expression of ILRSI solution 99
10.3 Relations between ILRSI and Galerkin projection method 101
Chapter 11 Numerical experiments and conclusions 105
11.1 Shifts selection 105
11.2 Computation of the residual norm 106
11.3 Numerical experiments 107
11.4 Conclusions and future work 109
References 111
Academic achievements 119
Acknowledgements 121