封 面 ：

分类号________________　　　　密级________________

U D C________________　　　　编号________________

厦　门　大　学

博 士 后 研 究 工 作 报 告

谓 词 抽 象 研 究

魏 燕 侠

工作完成日期　2014-1-19

报告提交日期　2014-2-20

厦门大学
2014　年 1 月

题名页

谓 词 抽 象 研 究

Study on Predicate Abstraction

博　士　后　姓　名：魏燕侠
流动站（一级学科）名称：哲学博士后流动站
专　业（二级学科）名称：逻辑学

研究工作起始时间　　2010 年　3 月

研究工作期满时间　　2014 年　1 月

厦 门 大 学

2014 年 1 月

厦门大学博士后研究工作报告
著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用博士后研究工作报告的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交该报告的纸质版和电子版，有权将该报告用于非赢利目的的少量复制并允许该报告进入学校图书馆被查阅，有权将该报告的内容编入有关数据库进行检索，有权将博士后研究工作报告的标题和摘要汇编出版。保密的博士后研究工作报告在解密后适用本规定。

本研究报告属于：　　1、保密（　），　2、不保密（　）

纸本在　　　　年解密后适用本授权书；

电子版在　　　年解密后适用本授权书。

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名:　　　　　　　　日期：　　年　　月　　日

导师签名:　　　　　　　　日期：　　年　　月　　日

摘　要

谓词抽象（Predicate abstraction）是一种由公式经过抽象得到的谓词，其思想来源于高阶逻辑中的抽象演算思想。美国逻辑学家斯塔尔内克（R. Stalnaker）和托马森（R. Thomason）在1968年将其引入模态逻辑的研究中来，他们发现尽管谓词抽象思想的引入，不会给经典逻辑带来什么变化，但是却会引起模态逻辑中模态算子辖域的变化，从而对模态逻辑产生深刻的影响。

斯塔尔内克和托马森发现，将抽象思想引入模态逻辑，可以更好地分析模态语境下指示词的指称问题，从而将哲学家争论不休的哲学问题加以澄清。为此他们在通常的模态逻辑的基础上发展了考虑谓词抽象公式的语法和语义系统，不仅从逻辑上，而且从哲学上，为包括模态词、量词和摹状词的复杂情况提供了充足的理论基础。

在上世纪九十年代，美国另外一位逻辑学家 Melvin Fitting 对谓词抽象思想作了进一步的研究和应用。Fitting 将谓词抽象应用于逻辑学的研究，取得了一系列成果，其中最有影响的是将谓词抽象公式引入通常的模态谓词逻辑的语言，增强了模态谓词逻辑语言的表达力，证明了没有 Barcan 公式的模态系统 **K** 的 Herbrand 定理。这是迄今为止与经典 Herbrand 定理最为相似的模态 Herbrand 定理单例。推进了模态逻辑元定理的研究工作，也为模态定理的机器证明开辟了一条路径，同时为人工智能的进一步升级提供了理论基础。

Fitting 还对谓词抽象在哲学领域的广泛应用进行了探索，从谓词抽象的角度对若干经典哲学问题进行了分析和解答，这些问题包括模态语境下的同一替换原则、弗雷格之谜、信念之谜、存在问题等。这不仅为上述经典哲学问题的解答提供了新的思路，而且扩大了谓词抽象的应用范围。

本研究报告的工作包括以下几个方面：

第一，详细介绍斯塔尔内科尔和托马森引入谓词抽象思想的背景以及谓词抽象早期的发展，为谓词抽象的哲学应用提供理论基础。

第二，详细考察谓词抽象的逻辑应用。一方面介绍美国逻辑学家 Melvin Fitting 的工作，另一方面在 Melvin Fitting 工作的基础上继续展开研究，证明了不含 Barcan 公式的模态系统 **T** 的 Herbrand 定理，扩大了谓词抽象在模态逻辑证明方面的范围。

第三，详细考察谓词抽象的哲学应用。结合模态语境下摹状词指称的特殊性——它是非严格指示词，以及谓词抽象是一种语言辖域装置的本质，从谓词抽象的角度对包括奎因（Willard Van Orman Quine）指出的指称晦暗问题（the problem of Referentially Opaque Context）、弗雷格之谜（Frege’s Puzzle）、信念之谜（Belief Puzzle）以及存在问题（the problem of Existence）等进行考察，为这些经典哲学问题的解答提供新的思路。

第四，从谓词抽象 QQ 的角度对知识论中的核心问题葛梯尔问题（the Gettier Problem）进行考察，提出若干葛梯尔型反例的谓词抽象式解答方案，从而为葛梯尔型反例的研究提供新的视角。

关键词：谓词抽象　模态 Herbrand 定理 辖域装置

Abstract

Predicate abstraction is the predicate abstracted from a formula. The basic idea of predicate abstraction came from the Lambda calculus of higher-order logic and was introduced into modal logic by R. Stalnaker and R. Tomason in 1968. They found when an abstraction operator was added to the classical predicate calculus with identity, no essential change was effected in the logic. In modal calculi, however, it was by no means clear that this was the case. Introducing predicate abstraction involved a change of scope of the necessity (possibility)-sign.

R. Stalnaker and R. Tomason found that the problem of reference in modal context can be analyzed clearly using predicate abstraction. They formulated a modal predicate calculi on the standard first-order modal logic. This provided a theory adequate to deal with modality, quantification and definite descriptions.

Further modal study and applications of predicate abstraction was finished by Melvin Fitting. Fitting applied predicate abstraction to study logic and accomplished a series of achievements. The most dramatical one was that he introduced the device of predicate abstraction into the usual first-order modal logic, expanding the expressive power of modal logic in a natural way and proved the modal version of Herbrand's theorem of modal logic **K** without the Barcan formula, which was a more natural analog of the classical version than had appeared before. Fitting also applied predicate abstraction to study of philosophical problems, including Frege's puzzle, identity of principle, existence and so on. Predicate abstraction provided a new point of view for solving these problems.

The works of this study mainly include are as follows:

Firstly, the author will introduce the background of the predicate abstraction and the early development, providing theoretical basis for philosophy application of predicate abstraction.

Secondly, the author will investigate the logic application of predicate abstraction.

On the one hand, the author will introduce the work of Fitting, on the other hand, the author will continue to work on the basis of Fitting's work, proving Herbrand's theorem of modal logic **T**.

Thirdly, the author will investigate the philosophical application of predicate abstraction. Predicate abstraction is the essence of a language scoping device, it can solve the problems of Referentially Opaque Context,Frege's puzzle,Belief Puzzle and existence.

Fourthly, the author will consider the Gettier Problem, which is the core of epistemology from the point of predicate abstraction and put forward a new solution scheme for a series of Gettier –type counterexamples.

Key words　predicate abstraction　Herbrand's theorem in modal logic　Mechanism of Scope

目　　录

0 引言：谓词抽象是什么

谓词抽象（Predicate abstraction）也叫抽象的谓词（abstracted predicate），是从公式经过抽象得到的谓词，其思想来源于高阶逻辑中的抽象演算（λ-演算）。抽象演算的基本思想是，由一个词项 $x + 1$，经过抽象得到的函数是 $\langle\lambda x.x +1\rangle$；类似地，由一个公式 $\Phi(x)$，经过抽象得到的函数是 $\langle\lambda x.\Phi(x)\rangle$，如果 t 表示一个词项，那么 $\langle\lambda x.\Phi(x)\rangle(t)$ 就代表一个公式，读作词项 t 所指称的对象具有 $\langle\lambda x.\Phi(x)\rangle$ 表达的性质。这样，$\langle\lambda x.\Phi(x)\rangle$ 实际起到谓词的作用，与 $\Phi(x)$ 相比，$\langle\lambda x.\Phi(x)\rangle$ 的性质发生了根本的变化。

为什么需要这种抽象的谓词，或者说抽象的谓词有什么作用呢？这要从经典逻辑与模态逻辑的差异说起。

不严格地讲，经典逻辑的公式可以视作体现了谓词的性质。例如对于 $P(x)$ 这样一个简单的公式，它表达的含义是：个体变元 x 具有谓词 P 表达的性质。对于复杂一点的公式，例如 $P(x)\wedge Q(x)$，它是两个简单公式的合取，其中一个简单公式的含义是：个体变元 x 具有谓词 P 表达的性质；另一个简单公式的含义是：个体变元 x 具有谓词 Q 表达的性质。整个公式的含义是：个体变元 x 具有谓词 P 表达的性质，并且个体变元 x 具有谓词 Q 表达的性质。而对于这一公式的含义，也可以说，个体变元 x 具有谓词 $(P\wedge Q)$ 表达的性质，这样说并不会引起歧义。例如令 $P(x)$ 表示 x 是胖的，令 $Q(x)$ 表示 x 是高的，那么说 x 是胖的，并且 x 是高的，与说 x 又胖又高是等价的，不会产生歧义。

因此，不严格地讲，经典逻辑的公式表达了谓词的性质。

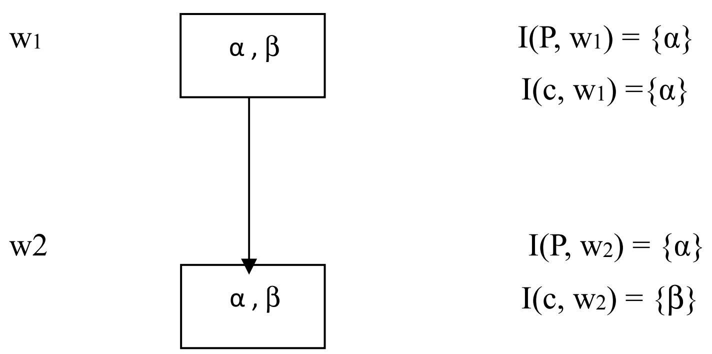
然而在模态逻辑中，情况却并非如此。例如，对于公式 $\Diamond P(c)$，它的含义是不确定的，既可以读作，可能算子 $\Diamond$ 应用于公式 $P(c)$，即谓词 P 作用于 c 是可能的；也可以读作，$\Diamond P$ 作为谓词作用于词项 c，即 c 具有 $\Diamond P$ 的性质。

两种不同的读法会产生什么样的结果呢？构造一个包含两个可能世界的模型，考察公式 $\Diamond P(c)$ 在该模型中的真值。

令 $M = \langle K, R, D, D', I\rangle$，其中 $K = \{w_1, w_2\}$，$R = \{\langle w_1, w_2\rangle\}$，$D(w_1) = D(w_2)= \{\alpha, \beta\}$，$D' = \{c\}$，$I(P, w_1) =\{\alpha\}$，$I(P, w_2) = \{\alpha\}$。

令常元符号 c 在 w_1 中指称 α，在 w_2 中指称β。

用图表示为



首先考察公式◇P(c)在 w_1 中的真值。

根据第一种读法，可能算子◇作用于公式 P(c)，要考察◇P(c)在 w_1 中的真值，需要考虑公式 P(c)在 w_1 的可及世界中的真值，由于 w_1 只有一个可及世界 w_2，因此公式 P(c)在 w_2 中的真值成为确定◇P(c)在 w_1 中真值的关键。而确定公式 P(c)在 w_2 中的真值，只需考察 c 在 w_2 指称的对象是否满足性质 P，由于 c 在 w_2 中指称 β，而 $I(P, w_2) = \{\alpha\}$，所以 $v(P(c), w_2) = 0$，继而 $v(\Diamond P(c), w_1) = 0$。

根据第二种读法，◇P 作为谓词作用于词项 c 上，要考察此时◇P(c)在 w_1 中的真值，只需考虑 c 在 w_1 中指称的对象是否满足性质◇P。由于 w_1 只有一个可及世界 w_2，因此要考虑 c 在 w_1 中指称的对象是否满足性质◇P，只需考虑 c 在 w_1 中指称的对象在 w_2 中是否满足性质 P。由于 c 在 w_1 中指称 α，且 $I(P, w_2) = \{\alpha\}$，所以有 $v(\Diamond P(c), w_1) = 1$。

这表明公式◇P(c)的两种读法——可能算子◇应用于公式 P(c)，即谓词 P 作用于 c 是可能的，与◇P 作为谓词作用于词项 c——并不简单地同一。也就是说，模态逻辑中，公式不再像经典逻辑中那样简单地表达了谓词的性质。

但是公式所表达的谓词可以从公式中抽象出来。例如，对应于◇P(c)的两种读法，可以抽象出两个不同的谓词 $\langle\lambda x.P(x)\rangle$ 和 $\langle\lambda x.\Diamond P(x)\rangle$，而相应地，公式◇P(c)被改写为 $\Diamond\langle\lambda x.P(x)\rangle(c)$ 和 $\langle\lambda x.\Diamond P(x)\rangle(c)$ 两个公式，它们分别对应于◇P(c)的两种读法。较之◇P(c)这样一个有歧义的表达式，公式 $\Diamond\langle\lambda x.P(x)\rangle(c)$ 和 $\langle\lambda x.\Diamond P(x)\rangle(c)$ 的含义是清楚的，不再有歧义，前者表达了词项 c 指称的对象具有谓词 $\langle\lambda x.P(x)\rangle$ 表达的性质是可能的，即可能算子应用于公式 $\langle\lambda x.P(x)\rangle(c)$；后者表达了词项 c 指称的对象具有谓词 $\langle\lambda x.\Diamond P(x)\rangle$ 表达的性质。

谓词抽象的思想最早由美国逻辑学家斯塔尔内克尔（R. Stalnaker）和托马森（R.Thomason）在 1968 年提出[1,2]。在 1972 年的时候，Aido Bressan 将其应用到高阶模态逻辑，工作相当繁琐，并且没有获得期望的影响。

谓词抽象理论的进一步研究和广泛应用是由美国逻辑学家 Melvin Fitting 完成的。从上世纪 70 年代开始，Fitting 将谓词抽象思想应用于逻辑学特别是模态逻辑的研究，取得了一系列成果，

---

1 Stalnaker R, Thomason R. Abstraction in first-order modal logic. Theoria, 1968 (34): 203～207.

2 Thomason R, Stalnaker R. Modality and reference. Nous, 1968 (2): 359～372.

包括 1972 年发表的两篇文章 An Epsilon-calculus system for first-order S4[1]和 Tableau methods of proof for modal logics[2]，以及尝试着使用谓词抽象获得模态逻辑的斯穆里安定理[3]、模态逻辑的希尔伯特(Hilbert) 经典 ε- 演算[4]等。Fitting 在谓词抽象理论的研究和应用方面取得的突破性进展是在 20 世纪 90 年代以后，一个是通过将谓词抽象思想引入通常的一阶模态逻辑的语言，扩大后者的表达力，从而获得了一个迄今为止与经典 Herbrand 定理最为相似的模态 Herbrand 定理（模态系统 **K** 的 Herbrand 定理）[5,6]；另一个是将谓词抽象思想应用于哲学问题的研究，在很多经典哲学问题的解答上提出了新的见解[7,8]。

1 Fitting M C. An epsilon-calculus system for first-order S4. In: Hodges W, ed. conference in Mathematical Logic, London *70. Springer Lecture Notes in Mathematics, No.255. 1972, 103～110.

2 Fitting M C. Tableau methods of proof for modal logics. Notre Dame Journal of Formal Logic, 1972 (13): 237～247.

3 Fitting M C. A modal logic analog of Smullyan's fundamental theorem. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1973(19): 1～16.

4 Fitting M C. An epsilon-calculus system for first-order S4. In: Hodges W, ed. conference in Mathematical Logic, London *70. Springer Lecture Notes in Mathematics, No.255. 1972, 103～110.

5 Fitting M C. A modal Herbrand theorem. Fundamenta Informaticae, 1996 (28): 101～122

6 Fitting M C. Herbrand's theorem for a modal logic.In: Cantini A, Casari E, Minari P, eds. Logic and Foundations of Mathematics. Kluwer Academic Publishers, 1999, 219～225.

7 Fitting M C. Modal logic should say more than it does. In: Lassez J L, Plotkin G, eds. Computational Logic, Essays in Honor of Alan Robinson. Cambridge, MA: MIT Press, 1991, 113～135.

8 Fitting M C. Bertrand Russell, Herbrand's theorem, and the assignment statement. Artificial Intelligence and Symbolic Computation, Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence 1476, 1998, 14～28

1 谓词抽象的引入和早期发展

谓词抽象的思想最早是由两位美国逻辑学家斯塔尔内克尔（R. Stalnaker）和托马森（R. Thomason）提出的。他们的思想集中体现在 1968 年发表的两篇文章 Abstraction in First–Order Modal Logic 和 Modality and Rrference 中。

1.1 谓词抽象思想的引入

斯塔尔内克尔和托马森发现，将高阶逻辑中的抽象演算思想（λ-演算）引入到带等号的一阶谓词逻辑中不会产生本质的变化。因为在经典逻辑中

（1）$\langle\lambda x.A(x)\rangle(t)=A(t)$

这样一条原则成立，也就是，经典逻辑中任何包含谓词抽象的公式都等价于一个不含谓词抽象的公式，或者说经典逻辑中包含抽象谓词的公式可以转换为不带抽象谓词的公式。例如令 $A(x)=P(x)$，那么$\langle\lambda x.P(x)\rangle(t)=P(t)$成立。因此将高阶逻辑中的抽象演算思想应用到带等号的一阶谓词逻辑中，不会导致本质上的差别。

然而，如果将高阶逻辑中的抽象演算思想引入到模态逻辑中，情况却大不相同。考虑 A 中包含模态词的情况，例如，当用$\Box P(x)$去替换上述等式中的 A 时，所获得的等式，其左右两边的辖域并不相同，左边得到$\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$，此时 t 并不处于必然算子□的辖域之中，右边得到$\Box P(t)$，此时 t 处于必然算子□的辖域之中，因此替换以后，等号并不成立。所以当 A 中包含模态算子时，涉及到模态算子辖域的变化，在经典逻辑中成立的原则$\langle\lambda x.A(x)\rangle(t)=A(t)$在模态逻辑中并不成立。也就是说模态逻辑中，包含抽象谓词的公式并不简单地等价于一个不含抽象谓词的公式，情况变得复杂。

斯塔尔内克尔和托马森引入高阶逻辑中的 λ-演算思想不是偶然的，在他们看来，形如$\langle\lambda x.P(x)\rangle(t)$的谓词抽象公式有着哲学上的价值，可以帮助哲学家澄清一些哲学纷争。例如，对于如下两个自然语言表达的语句，

（2）Necessarily, the Predent of the U.S. is a citizen of the U.S.

（3）The Predent of the U.S. is necessarily a citizen of the U.S.

哲学家认为前者大致表达了：任何一位美国总统是一个美国公民，这一情况是必然地；而后者表达了（事实上）是美国总统的人具有必然是一位美国公民的性质。前者为真是一个明显的事实，而后者则应被合理地视作一个假命题。

斯塔尔内克尔和托马森认为，哲学家所做的上述区分是不清楚的，并且不具有哲学意义。在他们看来，应用谓词抽象，很容易将两个自然语言表达的命题从形式上区别开来。

通过使用谓词抽象，（2）的符号化表达式为

（4）$\Box Q(\iota_x P(x))$

或者

（5）$\Box\langle\lambda y.Q(x)\rangle(\iota_x P(x))$

（4）和（5）等价，这一点很容易证明。

而（3）的符号化表达式为

（6）$\langle\lambda y.\Box Q(x)\rangle(\iota_x P(x))$

（其中，Q(x)是谓词，表达了 x 是一位美国公民，P(x)是谓词，表达了 x 是美国总统，$(\iota_x P(x)$ 则采用了罗素关于摹状词的表达，那个唯一的具有是美国公民性质的 x。）

很显然，在（5）（或者说（4）中，$(\iota_x P(x))$处于必然算子□的辖域之中，而在（6）中，$(\iota_x P(x))$并不处于必然算子□的辖域之中。

在斯塔尔内克尔和托马森看来，（5）和（6）形式上的区分还不足以说明它们表达了不同的命题。鉴于

（7） $A^t/x\equiv\langle\lambda x.A\rangle\ (t)$

这样一条抽象原则，（5）和（6）可能被视为是逻辑上等值的。

尽管很多经典逻辑中的原则可以直接推广到模态逻辑中，但是一个不争的事实是：当 A 中包含模态算子时，这条抽象原则并不成立，也就是说经典逻辑中的抽象原则并不能推广到模态逻辑，在模态逻辑中（7）是无效公式。

1.2 一个考虑谓词抽象公式的模态系统 $Q3^r$

斯塔尔内克尔和托马森通过在通常的模态逻辑的语法和语义的基础上增加包含抽象谓词的公式，证明了经典逻辑中的抽象原则在模态逻辑中并不成立。他们的具体做法是在克里普克构造的模态系统 Q3 的基础上，在原子公式中增加形如$\langle\lambda x.A\rangle(t)$的公式，构造了一个包含谓词抽象公式的模态系统 $Q3^r$，并证明了其完全性[1]。

由于 $Q3^r$ 是在 Q3 的基础上构造起来的，那么 Q3 的全部公理和推导规则自然也是 $Q3^r$ 的公理和推导规则[2]，除此之外，$Q3^r$ 的公理还包括反映谓词抽象思想的公理 **Ab**。

1.2.1 $Q3^r$ 的公理

A1. $\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$

A2. $\Box A\rightarrow A$

[1] Stalnaker R, Thomason R. Abstraction in first-order modal logic. Theoria, 1968 (34): 203～207.

[2] Thomason R,Some completeness results for modal predicate calculi.Philosophical developments in non-standard logic,K.Lambert ,ed.

A3. $\Box A \to \Box\Box A$

A4. $(\forall x)A \to E\Box t \to A^t/x$ Ex 是(x = x)的缩写，t 是任意词项

A5. $(\forall x)(Ex \to A) \to (\forall x)A$ Ex 是(x = x)的缩写

A6. $(\exists x)Ex$ Ex 是(x = x)的缩写

A7. $s=s$

A8. $s=t \to (A \to A^s//t)$ A 中不会出现被 s 替换的 t 出现在模态算子辖域中的情况

A9. $E\iota_x A \to (\exists! \ x)A$

A10. $(\forall y)((\forall x)A \equiv x=y) \to y=\iota_x A$

A11. $x=y \to \Box x=y$ x 和 y 是个体变项

A12. $\Diamond x=y \to x=y$ x 和 y 是个体变项

Ab. $x=t \to (A^x/y \equiv \langle \lambda y.A \rangle (t))$

1.2.2 Q3ʳ的推导规则

R1. $$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

R2. $$\frac{A}{\Box A}$$

R3. $$\frac{A \to B}{A \to (\forall x)B}$$ A 中的 x 不是自由出现的

R4. $$\frac{A \to \Box B}{A \to \Box(\forall x)B}$$ A 中的 x 不是自由出现的

R5. $$\frac{A \to (B_1 \prec (\ldots \prec (B_n \prec \Box C)))}{A \to B_1 \prec \ldots \prec B_n \prec \Box(\forall x)C}$$ A 中的 x 不是自由出现的

R6. $$\frac{A \to \neg t = x}{\neg A}$$ A 中的 x 不是自由出现的

$$\textbf{R7.}\quad \frac{A\rightarrow(B_1\text{⥽}(\ldots\text{⥽}(B_n\text{⥽}\neg t=x)))}{A\rightarrow(B_1\text{⥽}(\ldots\text{⥽}(\Box\neg B_n)))}\qquad A\text{ 中的 }x\text{ 不是自由出现的}$$

1.2.3 Q3ʳ的语义解释

令$\langle K, R,D, D'\rangle$是 Q3 的结构，其中，K 是可能世界的集合，R 是 K 上的可及关系，D 是一个函数，它将 K 中的元素 α 映射到个体域 D_α 的定义域中，D′是 $\bigcup_{\alpha\in K} D_\alpha$ 不相交的个体的集合。D 是所有这些定义域的并，$D=D\cup\bigcup_{\alpha\in K}D_{\boldsymbol{\alpha}}$。

由于 $Q3^r$ 是在 Q3 的的基础上增加了形如$\langle\lambda x.\,A\rangle\,(t)$的原子公式而得到的，因此，较之 Q3 的语义解释，$Q3^r$ 的语义解释中还应增加一条对应$\langle\lambda x.A\rangle\,(t)$公式的解释。即

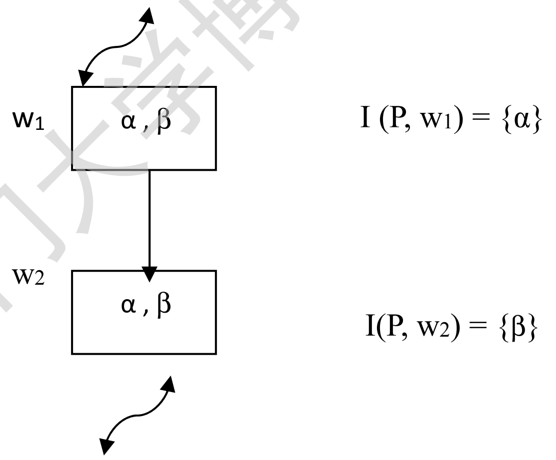
$I_\alpha(\langle\lambda x.\,A\rangle\,(t))=I^{\,I_\alpha(t)}/x_\alpha(A)$

也就是说，公式$\langle\lambda x.A\rangle$ (t)在 α 中为真，当且仅当用 t 在 α 中指称的对象替换 A 中的 x，在 α 中满足 A。

在该解释下，不难证明$\Box\langle\lambda x.P(x)\rangle(t)\rightarrow\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$不是有效的。

构造一个反模型，令 $M=\langle K, R, D,D',I\rangle$，其中 $K=\{w_1, w_2\}$，$R=\{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}$，$D(w_1)=D(w_2)=\{\alpha, \beta\}$，$D'=\{c\}$，$I(P, w_1)=\{\alpha\}$，$I(P, w_2)=\{\beta\}$。

用图表示为



是自返符号。

考察公式$\Box\langle\lambda x.P(x)\rangle(t)\rightarrow\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$在 w_1 中的真值。

首先看蕴含式的前件公式$\langle\lambda x.P(x)\rangle(t)$在 w_1 中的真值。有 $I(t, w_1)=\{\alpha\}$，$I(t, w_2)=\{\beta\}$，继在解释 I 下，$\langle\lambda x.\,P(x)\rangle(t)$在 w_1 中为真，以及$\langle\lambda x.\,P(x)\rangle(t)$在 w_2 中为真，因此$\Box\langle\lambda x.\,P(x)\rangle(t)$在 w_1 中为真。

其次考虑蕴含式的后件公式$\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$在 w_1 中的真值。$I(t,w_1)=\{a\}$，以及 $I(\alpha/xP(x),w_2)=F$，

继而，$\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$在 w_1 中为假。

因此，公式$\Box\langle\lambda x.\ P(x)\rangle(t)\rightarrow\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$在 w_1 中为假，公式$\Box\langle\lambda x.\ P(x)\rangle(t)\rightarrow\langle\lambda x.\Box P(x)\rangle(t)$不是有效的。

1.2.4 $Q3^r$的完全性证明

$Q3^r$ 的完全性证明是在 Q3 的完全性证明基础上进行的。较之 Q3 的完全性证明，$Q3^r$ 的完全性证明还应证明，如果一个公式集 Γ 是 $Q3^r$-一致的，那么 Γ 同时是 $Q3^r$-可满足的。具体思路如下：

首先，一个 $Q3^r$-M-饱和的公式集 Γ 是一个 $Q3^r$-一致的 M 的公式集，并且满足 Q3-饱和的所有其它的要求。根据 Q3 的完全性证明，M 的任何一个 $Q3^r$-一致的公式集有一个 $Q3^r$-M′-饱和的扩张，这里 M′是 M 的一个 ω-扩张；如果 Γ 是 M-饱和的集合并且$\Diamond A\in\Gamma$，那么有一个$\{\Box B/B\in\Gamma\}\cup\{A\}$的 M-饱和的的扩张。

接下来，证明 $Q3^r$ 的完全性，唯一要做的就是证明，如果 $\underline{\Gamma}$ 是 M-$Q3^r$-饱和的，那么 $\underline{\Gamma}$ 同时也是 $Q3^r$-可满足的。令$\langle K, R, Ð, Ð'\rangle$是 $Q3^r$ 的结构，其中，K 是一个集合$\{\underline{\Delta}/\underline{\Delta}$ 是 $Q3^r$-M-饱和的，并且$\underline{\Gamma}\in\underline{\Delta}\}$。该结构上的一个解释 I 与 Q3 上的解释相同。用归纳法证明，对于 M 的所有公式 A，并且对于所有的 $\underline{\Delta}\in K$，$A\in\underline{\Delta}$，当且仅当 $I_{\Delta}(A)=T$。唯一与 Q3 不同的是当 A 是谓词抽象公式$\langle\lambda x.A\rangle(t)$的情况，根据 $\underline{\Delta}$ 的结构，有 M 的一个个体变项 x，使得 $x=t\in\underline{\Delta}$。$I_{\Delta}(t)=I_{\Delta}(x)$。的证明如下：

根据公理，Ab. $x=t\rightarrow(B^x/y\equiv\langle\lambda x.B\rangle)(t)$，$\langle\lambda x.B\rangle(t)\in\underline{\Delta}$,当且仅当 $B^x/y\in\underline{\Delta}$。根据归纳假设，$\langle\lambda x.B\rangle(t)\in\underline{\Delta}$ 当且仅当 $B^x/y\in\underline{\Delta}$，当且仅当 $I_{\Delta}(B^x/y)=T$，并且根据替换引理，$\langle\lambda x.B\rangle(t)\in\underline{\Delta}$ 当且仅当 $B^x/y\in\underline{\Delta}$，当且仅当 $I_{\Delta}(B^x/y)=T$，当且仅当 $I^I{}_{\Delta}(x)/y_{\Delta}B(t)=T$。既然 $I_{\Delta}(t)=I_{\Delta}(x)$，那么$\langle\lambda x.B\rangle(t)\in\underline{\Delta}$ 当且仅当 $B^x/y\in\underline{\Delta}$，当且仅当 $I_{\Delta}(B^x/y)=T$，当且仅当 $I^I{}_{\Delta}(x)/y_{\Delta}B=T$，当且仅当 $I^I{}_{\Delta}(t)/y_{\Delta}B$。最后，根据抽象公式的满足定义，$\langle\lambda x.B\rangle(t)\in\underline{\Delta}$ 当且仅当 $B^x/y\in\underline{\Delta}$，当且仅当 $I_{\Delta}(B^x/y)=T$，当且仅当 $I^I{}_{\Delta}(x)/y_{\Delta}B=T$，当且仅当 $I_{\Delta}(\langle\lambda x.B\rangle(t))=T$。

这一结果表明$\langle\lambda x.B\rangle(t)\in\underline{\Delta}$ 当且仅当 $I_{\Delta}(\langle\lambda x.B\rangle(t))=T$。该证明主要根据归纳法，尤其是 $\underline{\Gamma}=\{A/I_{\underline{\Gamma}}$（A）$=T\}$。

由于每一个 $Q3^r$-一致集可以扩展为是 $Q3^r$-饱和集，并且已经证明每一个 $Q3^r$-饱和集同时是 $Q3^r$-可满足的，因此每一个 $Q3^r$-一致集同时也是 $Q3^r$-可满足的。逆方向的证明很容易，即每一个 $Q3^r$-可满足集同时是 $Q3^r$-一致集。

这样，得到模态系统 $Q3^r$ 的完全性定理。

一个 $Q3^r$ 的公式集 Γ 是 $Q3^r$-一致的，当且仅当它同时是 $Q3^r$-可满足的。$Q3^r$ 的一个公式 A 是可证明的，当且仅当它是 $Q3^r$-有效的。

1.3 模态与指称