

三自由度冗余驱动并联机构的 奇异性和工作空间分析

周结华¹ 彭侠夫²

1. 南昌航空大学, 南昌, 330063 2. 厦门大学, 厦门, 361005

摘要:基于 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的位置逆解模型, 运用微分法推导出了该并联机构的雅可比矩阵, 结合 Gosselin 奇异性分析法和数值分析法, 分析了该并联机构的奇异性。随后分析了影响 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构工作空间的主要因素, 并对其各支链的行程限制、各球铰副的转角限制和各支链间的尺寸干涉限制等影响因素进行了解析化分析。最后, 基于 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的位置正解模型, 设计了该并联机构回转工作空间的求解算法。该算法避免了数值方法及几何方法的复杂性和不确定性, 实现了回转工作空间的直观性表达。

关键词: 并联机构; 冗余驱动; 奇异性分析; 工作空间分析

中图分类号: TH112

DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2014.06.009

Singularity and Workspace Analysis of a 3-DOF Parallel Manipulator with Redundant Actuation

Zhou Jiehua¹ Peng Xiafu²

1. Nanchang Hangkong University, Nanchang, 330063

2. Xiamen University, Xiamen, Fujian, 361005

Abstract: The Jacobian matrix of a 4-spherical joint-prismatic joint-spherical joint/spherical joint (4-SPS/S) was deduced by inverse position kinematics and differential method, and its singularity was analyzed by Gosselin singularity analysis and numerical analysis method. The main factors which determine the workspace of the 4-SPS/S parallel manipulator with redundant actuation were researched, and the analytical derivations of branched-chain stroke restriction, rotation angle restriction of kinematic pairs and size interference between the branched-chains were deduced. The algorithm of rotary workspace was designed by forward position kinematics, which can avoid the complexity of numerical method and the uncertainty of geometric method, and can realize visual expression of rotary workspace.

Key words: parallel manipulator; redundant actuation; singularity analysis; workspace analysis

0 引言

并联机构自从由 Gough 和 Stewart 提出以来, 就以具有高刚度、高精度和高承载能力等优点而成为人们研究的热点, 并被广泛应用于飞行模拟器、工业机器人、微动机器人、并联机床等领域^[1-4]。其中并联机构的奇异性和工作空间在机构设计和运动规划中占有非常重要的地位。当机构处于某些特殊位形时, 其雅可比矩阵成为奇异阵, 机构正常的自由度发生瞬时改变, 这种现象称为奇异性, 此时机构的位形为奇异位形。奇异位

形是机构的固有性质, 它对机构的工作性能有着种种影响, 特别是对于并联机构, 更有重要意义。当机构处于奇异位形时, 机构的实际自由度不再与其理论自由度相等, 即存在两种情况: 一是机构丧失应有的自由度导致刚化; 二是机构获得额外的自由度而失去控制。并联机构的工作空间是指并联机构末端执行器的工作区域, 它是衡量并联机构性能的一个重要指标。目前关于并联机构奇异位形研究的主要方法有基于机构的输入输出速度^[5]、螺旋理论^[6]和线丛线汇原理^[7]建立机构奇异位形判断条件的方法。对并联机构工作空间的求解主要有几何法^[8]和代数法^[9], 但这两种方法具有复杂性和不确定性的特点。

本文在文献^[10-11]的基础上, 对 4-SPS/S 三

收稿日期: 2012-10-09

基金项目: 厦门大学“985 工程”专项资金资助项目(0000-X07204); 福建省自然科学基金资助项目(2010J05141); 南昌航空大学博士启动基金资助项目(EA201204428)

自由度冗余驱动并联机构展开奇异性和工作空间分析。首先,运用 Gosselin 奇异性分析法和数值分析法,对 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的奇异性进行分析。其次,基于 4-S_{PS}/S 三自由度冗余驱动并联机构的位置正解模型设计了 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构回转工作空间的求解算法。

1 机构结构与坐标系的建立

1.1 机构结构

4-SPS/S 并联机构由台基、动平台、4 条 SPS 主动支链和 1 条被动约束支链组成,其结构如图 1 所示。其中,被动约束支链上端通过球铰与动平台连接,下端与台基固连在一起。4 条 SPS 主动支链均通过球铰与动平台和台基相连。上支点 B_1, B_2, B_3, B_4 呈长方形分布,上支点 B_5 位于该长方形的中心位置。下支点 A_1, A_2, A_3, A_4 也呈长方形分布,定长杆与台基的焊接点 A_5 位于该长方形的中心位置。下支点所组成的长方形边长比上支点所组成的长方形边长短。

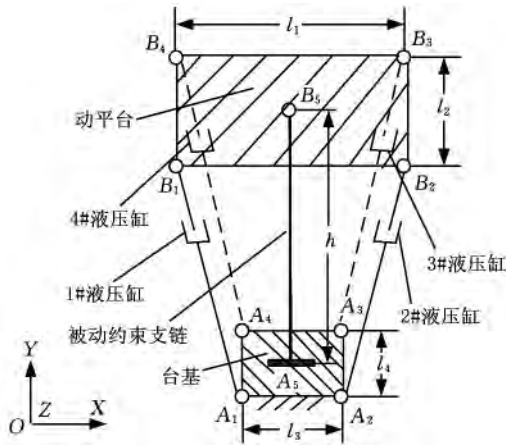


图 1 4-S_{PS}/S 并联机构结构

1.2 坐标系的建立

以上支点 B_5 为坐标系原点, X 轴平行于 B_1B_2 , Y 轴平行于 B_2B_3 , Z 轴与 X 轴、 Y 轴满足右手定则关系,建立动坐标系 $OXYZ$ 。其中,由上支点 B_1 指向 B_2 为 X 轴的正方向,由上支点 B_2 指向 B_3 为 Y 轴的正方向,动平台的初始位置平行于台基。静态参考坐标系 $O'X'Y'Z'$ 的 X' 轴、 Y' 轴和 Z' 轴分别与动坐标系 X 轴、 Y 轴和 Z 轴的初始位置完全重合,动坐标系随动平台一起运动。

分别建立跟随主动支链 $A_iB_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 一起运动的支链坐标系 $O_{A_i}X_{A_i}Y_{A_i}Z_{A_i}$ 以及与主动支链的上下球铰副基座固连的坐标系 $O_{A_i'}\xi_{A_i'}\eta_{A_i'}\zeta_{A_i'}$ 和 $O_{B_i'}\xi_{B_i'}\eta_{B_i'}\zeta_{B_i'}$ 。其中,支链坐标系以 A_i 为坐标原点 O_{A_i} , A_iB_i 为 Z_{A_i} 轴, Y_{A_i} 轴平行于矢

量 A_5A_i 与 A_iB_i 的叉积, X_{A_i} 轴与 Z_{A_i} 、 Y_{A_i} 轴满足右手定则关系;坐标系 $O_{A_i'}\xi_{A_i'}\eta_{A_i'}\zeta_{A_i'}$ 的原点 $O_{A_i'}$ 建立在与 A_i 连接的台基处, $\xi_{A_i'}$ 轴、 $\eta_{A_i'}$ 轴和 $\zeta_{A_i'}$ 轴分别与静态参考坐标系的 X' 轴、 Y' 轴和 Z' 轴平行;坐标系 $O_{B_i'}\xi_{B_i'}\eta_{B_i'}\zeta_{B_i'}$ 的原点 $O_{B_i'}$ 建立在与 B_i 连接的动平台处, $\xi_{B_i'}$ 轴、 $\eta_{B_i'}$ 轴和 $\zeta_{B_i'}$ 轴分别与动坐标系的 X 轴、 Y 轴和 Z 轴平行,随动平台一起运动。

2 奇异性分析

2.1 位置逆解模型

在运动过程中,动坐标系相对于静态参考坐标系的姿态用三个姿态角描述,即横摇角 α 、纵摇角 β 、偏航角 γ 。由文献[11]可知,动坐标系到静态参考坐标系的坐标变换矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\alpha\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & s\alpha\gamma + c\alpha s\beta c\gamma \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $c\alpha, c\beta, c\gamma$ 和 $s\alpha, s\beta, s\gamma$ 分别为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 和 $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ 的简写形式; R 为单位正交矩阵, $R^{-1} = R^T$ 。

根据并联机构结构可知,上支点 B_i 在动坐标系下的坐标向量构成矩阵 ${}^B B$, 表示为

$${}^B B = [{}^B b_{j,i}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} l_1/2 & l_1/2 & l_1/2 & -l_1/2 \\ -l_2/2 & -l_2/2 & l_2/2 & l_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

下支点 A_i 在静态参考坐标系下的坐标向量构成矩阵 ${}^A A$, 表示为

$${}^A A = [{}^A a_{j,i}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} -l_3/2 & l_3/2 & l_3/2 & -l_3/2 \\ -l_4/2 & -l_4/2 & l_4/2 & l_4/2 \\ -h & -h & -h & -h \end{bmatrix} \quad (3)$$

则上支点 B_i 在静态参考坐标系下的坐标向量构成矩阵 ${}^A B$, 表示为

$${}^A B = [{}^A b_{j,i}]_{3 \times 4} = R {}^B B \quad (4)$$

那么 4 条 SPS 主动支链的输出长度为

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^3 ({}^A b_{j,i} - {}^A a_{j,i})^2} \quad (5)$$

2.2 雅可比矩阵

将式(5)对时间求导,经过整理可得

$$d_1 \dot{d}_1 = ({}^A b_{1,1} - {}^A a_{1,1}) \dot{{}^A b}_{1,1} + ({}^A b_{2,1} - {}^A a_{2,1}) \dot{{}^A b}_{2,1} + ({}^A b_{3,1} - {}^A a_{3,1}) \dot{{}^A b}_{3,1} \quad (6)$$

$$d_2 \dot{d}_2 = ({}^A b_{1,2} - {}^A a_{1,2}) \dot{{}^A b}_{1,2} + ({}^A b_{2,2} - {}^A a_{2,2}) \dot{{}^A b}_{2,2} + ({}^A b_{3,2} - {}^A a_{3,2}) \dot{{}^A b}_{3,2} \quad (7)$$

$$d_3 \dot{d}_3 = ({}^A b_{1,3} - {}^A a_{1,3}) \dot{{}^A b}_{1,3} + ({}^A b_{2,3} - {}^A a_{2,3}) \dot{{}^A b}_{2,3} + ({}^A b_{3,3} - {}^A a_{3,3}) \dot{{}^A b}_{3,3} \quad (8)$$

$$d_4 \dot{d}_4 = ({}^A b_{1,4} - {}^A a_{1,4}) \dot{{}^A b}_{1,4} + ({}^A b_{2,4} - {}^A a_{2,4}) \dot{{}^A b}_{2,4} + ({}^A b_{3,4} - {}^A a_{3,4}) \dot{{}^A b}_{3,4} \quad (9)$$

将式(1)和式(2)代入式(4),并对时间求导可得

$${}^A \dot{b}_{1,1} = (-l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta c\gamma - \dot{\gamma}c\beta s\gamma) + (-l_2/2)(\dot{\alpha}s\alpha s\gamma - \dot{\gamma}c\alpha c\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta c\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta c\gamma - \dot{\gamma}s\alpha s\beta s\gamma) \quad (10)$$

$${}^A \dot{b}_{1,2} = (l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta c\gamma - \dot{\gamma}c\beta s\gamma) + (-l_2/2)(\dot{\alpha}s\alpha s\gamma - \dot{\gamma}c\alpha c\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta c\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta c\gamma - \dot{\gamma}s\alpha s\beta s\gamma) \quad (11)$$

$${}^A \dot{b}_{1,3} = (l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta c\gamma - \dot{\gamma}c\beta s\gamma) + (l_2/2)(\dot{\alpha}s\alpha s\gamma - \dot{\gamma}c\alpha c\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta c\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta c\gamma - \dot{\gamma}s\alpha s\beta s\gamma) \quad (12)$$

$${}^A \dot{b}_{1,4} = (-l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta c\gamma - \dot{\gamma}c\beta s\gamma) + (l_2/2)(\dot{\alpha}s\alpha s\gamma - \dot{\gamma}c\alpha c\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta c\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta c\gamma - \dot{\gamma}s\alpha s\beta s\gamma) \quad (13)$$

$${}^A \dot{b}_{2,1} = (-l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta s\gamma + \dot{\gamma}c\beta c\gamma) + (-l_2/2)(-\dot{\alpha}s\alpha c\gamma - \dot{\gamma}c\alpha s\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta s\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta s\gamma + \dot{\gamma}s\alpha s\beta c\gamma) \quad (14)$$

$${}^A \dot{b}_{2,2} = (l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta s\gamma + \dot{\gamma}c\beta c\gamma) + (-l_2/2)(-\dot{\alpha}s\alpha c\gamma - \dot{\gamma}c\alpha s\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta s\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta s\gamma + \dot{\gamma}s\alpha s\beta c\gamma) \quad (15)$$

$${}^A \dot{b}_{2,3} = (l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta s\gamma + \dot{\gamma}c\beta c\gamma) + (l_2/2)(-\dot{\alpha}s\alpha c\gamma - \dot{\gamma}c\alpha s\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta s\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta s\gamma + \dot{\gamma}s\alpha s\beta c\gamma) \quad (16)$$

$${}^A \dot{b}_{2,4} = (-l_1/2)(-\dot{\beta}s\beta s\gamma + \dot{\gamma}c\beta c\gamma) + (l_2/2) \cdot (-\dot{\alpha}s\alpha c\gamma - \dot{\gamma}c\alpha s\gamma + \dot{\alpha}c\alpha s\beta s\gamma + \dot{\beta}s\alpha c\beta s\gamma + \dot{\gamma}s\alpha s\beta c\gamma) \quad (17)$$

$${}^A \dot{b}_{3,1} = (-l_1/2)(-\dot{\beta}c\beta) + (-l_2/2) \cdot (\dot{\alpha}c\alpha c\beta - \dot{\beta}s\alpha s\beta) \quad (18)$$

$${}^A \dot{b}_{3,2} = (l_1/2)(-\dot{\beta}c\beta) + (-l_2/2) \cdot (\dot{\alpha}c\alpha c\beta - \dot{\beta}s\alpha s\beta) \quad (19)$$

$${}^A \dot{b}_{3,3} = (l_1/2)(-\dot{\beta}c\beta) + (l_2/2) \cdot (\dot{\alpha}c\alpha c\beta - \dot{\beta}s\alpha s\beta) \quad (20)$$

$${}^A \dot{b}_{3,4} = (-l_1/2)(-\dot{\beta}c\beta) + (l_2/2) \cdot (\dot{\alpha}c\alpha c\beta - \dot{\beta}s\alpha s\beta) \quad (21)$$

将式(1)、式(2)、式(4)和式(10)~式(21)分别代入式(6)~式(9),经过整理可得

$$A\dot{\theta} = B\dot{X} \quad (22)$$

$$\dot{\theta} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$$

$$\dot{X} = [\dot{d}_1 \quad \dot{d}_2 \quad \dot{d}_3 \quad \dot{d}_4]^T$$

$$A = [a_{j,i}] \in \mathbf{R}^{4 \times 3} \quad B \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$$

且有

$$a_{11} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} -l_2 s\alpha s\gamma - l_2 c\alpha s\beta c\gamma \\ l_2 s\alpha c\gamma - l_2 c\alpha s\beta s\gamma \\ -l_2 c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} l_1 s\beta c\gamma - l_2 s\alpha c\beta c\gamma \\ l_1 s\beta s\gamma - l_2 s\alpha c\beta s\gamma \\ l_1 c\beta + l_2 s\alpha s\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{13} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} l_1 c\beta s\gamma + l_2 c\alpha c\gamma + l_2 s\alpha s\beta s\gamma \\ -l_1 c\beta c\gamma + l_2 c\alpha s\gamma - l_2 s\alpha s\beta c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} -l_2 s\alpha s\gamma - l_2 c\alpha s\beta c\gamma \\ l_2 s\alpha c\gamma - l_2 c\alpha s\beta s\gamma \\ -l_2 c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{22} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} -l_1 s\beta c\gamma - l_2 s\alpha c\beta c\gamma \\ -l_1 s\beta s\gamma - l_2 s\alpha c\beta s\gamma \\ -l_1 c\beta + l_2 s\alpha s\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{23} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} -l_1 c\beta s\gamma + l_2 c\alpha c\gamma + l_2 s\alpha s\beta s\gamma \\ l_1 c\beta c\gamma + l_2 c\alpha s\gamma - l_2 s\alpha s\beta c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{31} = \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} l_2 s\alpha s\gamma + l_2 c\alpha s\beta c\gamma \\ -l_2 s\alpha c\gamma + l_2 c\alpha s\beta s\gamma \\ l_2 c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{32} = \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} -l_1 s\beta c\gamma + l_2 s\alpha c\beta c\gamma \\ -l_1 s\beta s\gamma + l_2 s\alpha c\beta s\gamma \\ -l_1 c\beta - l_2 s\alpha s\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{33} = \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} -l_1 c\beta s\gamma - l_2 c\alpha c\gamma - l_2 s\alpha s\beta s\gamma \\ l_1 c\beta c\gamma - l_2 c\alpha s\gamma + l_2 s\alpha s\beta c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{41} = \mathbf{A}_4 \begin{bmatrix} l_2 s\alpha s\gamma + l_2 c\alpha s\beta c\gamma \\ -l_2 s\alpha c\gamma + l_2 c\alpha s\beta s\gamma \\ l_2 c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{42} = \mathbf{A}_4 \begin{bmatrix} l_1 s\beta c\gamma + l_2 s\alpha c\beta c\gamma \\ l_1 s\beta s\gamma + l_2 s\alpha c\beta s\gamma \\ l_1 c\beta - l_2 s\alpha s\beta \end{bmatrix}$$

$$a_{43} = \mathbf{A}_4 \begin{bmatrix} l_1 c\beta s\gamma - l_2 c\alpha c\gamma - l_2 s\alpha s\beta s\gamma \\ -l_1 c\beta c\gamma - l_2 c\alpha s\gamma + l_2 s\alpha s\beta c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{l_1 c\beta c\gamma + l_2 c\alpha s\gamma - l_2 s\alpha s\beta c\gamma + l_3}{4} \\ \frac{-l_1 c\beta s\gamma - l_2 c\alpha c\gamma - l_2 s\alpha s\beta s\gamma + l_4}{4} \\ \frac{l_1 s\beta - l_2 s\alpha c\beta + 2h}{4} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{l_1 c\beta c\gamma + l_2 c a s\gamma - l_2 s a s\beta c\gamma - l_3}{4} \\ \frac{l_1 c\beta s\gamma - l_2 c a c\gamma - l_2 s a s\beta s\gamma + l_4}{4} \\ \frac{-l_1 s\beta - l_2 s a c\beta + 2h}{4} \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} \frac{l_1 c\beta c\gamma - l_2 c a s\gamma + l_2 s a s\beta c\gamma - l_3}{4} \\ \frac{l_1 c\beta s\gamma + l_2 c a c\gamma + l_2 s a s\beta s\gamma - l_4}{4} \\ \frac{-l_1 s\beta + l_2 s a c\beta + 2h}{4} \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} \frac{l_1 c\beta c\gamma - l_2 c a s\gamma + l_2 s a s\beta c\gamma + l_3}{4} \\ \frac{-l_1 c\beta s\gamma + l_2 c a c\gamma + l_2 s a s\beta s\gamma - l_4}{4} \\ \frac{l_1 s\beta + l_2 s a c\beta + 2h}{4} \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{B} &= \text{diag}(d_1, d_2, d_3, d_4)
 \end{aligned}$$

2.3 奇异性分析

由 Gosselin 奇异性分析法^[5]可知, 并联机构的奇异位形划分为如下三种类型。

(1) 矩阵 \mathbf{B} 奇异而 \mathbf{A} 非奇异, 即

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \text{ 且 } \det \mathbf{B} = 0$$

此时锁定并联机构的末端执行器, 输入驱动关节仍存在瞬时运动, 表明机构至少失去一个瞬时自由度。这种类型的奇异位形发生在并联机构的工作空间边界或者位置逆解数目变化时的位形, 称为边界奇异。

(2) 矩阵 \mathbf{A} 奇异而 \mathbf{B} 非奇异, 即

$$\det \mathbf{A} = 0 \text{ 且 } \det \mathbf{B} \neq 0$$

此时固定并联机构的输入驱动关节, 末端执行器仍存在瞬时运动, 表明机构至少获得一个瞬时自由度, 这时并联机构失去刚度, 无法承受任何承载。这种类型的奇异位形发生在并联机构的工作空间内部, 称为位形奇异。

(3) 矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 均奇异, 即

$$\det \mathbf{A} = 0 \text{ 且 } \det \mathbf{B} = 0$$

此时机构的驱动关节和末端执行器都存在着瞬时互不影响的非零输入和输出, 对应的位姿就是第三类奇异。这类奇异跟前两种不同的是它不仅仅依赖于位姿, 还与结构参数有关系。处于该类奇异时, 机构将失去自由度。这种类型的奇异位形称为构形奇异, 在机构设计阶段应予以避免。

由于 $d_i \neq 0$, 所以 $\det \mathbf{B} = d_1 d_2 d_3 d_4 \neq 0$ 。则 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构不存在边界奇异和构形奇异, 只需讨论该并联机构的位形奇异。但是, \mathbf{A} 矩阵为非方阵, 无法根据计算 $\det \mathbf{A}$ 判断 \mathbf{A} 矩阵是否奇异。根据矩阵理论, \mathbf{A} 矩阵奇异可

等价于 $\text{rank} \mathbf{A} < 3$, 又因为 $\text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \text{rank} \mathbf{A}$, 所以 \mathbf{A} 矩阵是否奇异可以等价于 $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 是否为零。

3 工作空间分析

3.1 工作空间影响因素分析

工作空间是并联机构的重要特性, 影响并联机构工作空间的因素很多。通过分析 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的结构和运动要求可知, 该并联机构工作空间的影响因素主要有: 各驱动液压缸的行程限制、各支链的尺寸干涉限制、球铰副转角的限制、奇异位形的限制。

3.1.1 各驱动液压缸的行程限制解析化

连接动平台和基座的驱动液压缸的长度变化范围是有限制的, 用 $d_{i\min}$ 和 $d_{i\max}$ 分别表示第 i 个驱动液压缸在并联机构工作中所能达到的极限长度, 则各驱动液压缸的行程限制条件可表示为 $d_{i\min} \leq d_i \leq d_{i\max}$ 。

3.1.2 各支链的尺寸干涉限制解析化

4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的各主动支链和被动约束支链形状均为圆柱体, 所以各支链的尺寸干涉限制就是圆柱体与圆柱体之间的干涉限制, 本文可根据文献^[12]介绍的圆柱体与圆柱体干涉检查方法检查该并联机构各支链的尺寸干涉限制。

3.1.3 球铰副转角的限制解析化

4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的球铰副转角的限制主要有主动支链与动平台连接的球铰副转角限制、主动支链与台基连接的球铰副转角限制和被动约束支链与动平台连接的球铰副转角限制。

由于坐标系 $O_{B_i} \xi_{B_i} \eta_{B_i} \zeta_{B_i}$ 随着动平台一起运动, 而且 ξ_{B_i} 轴、 η_{B_i} 轴和 ζ_{B_i} 轴分别与动坐标系的 X 轴、 Y 轴和 Z 轴平行, 所以主动支链与动平台连接的球铰副转角即为支链坐标系 Z_{A_i} 轴与动坐标系 Z 轴的夹角。

设 \hat{s}_i 为支链坐标系的 Z_{A_i} 轴在静态参考坐标系下的单位向量, \hat{z} 为 Z 轴在静态参考坐标系下的单位向量, 则有

$$\hat{s}_i = \left(\frac{{}^A b_{1,i} - {}^A a_{1,i}}{d_i}, \frac{{}^A b_{2,i} - {}^A a_{2,i}}{d_i}, \frac{{}^A b_{3,i} - {}^A a_{3,i}}{d_i} \right)$$

$$\hat{z} = {}^A \mathbf{R}_B \cdot (0, 0, 1)$$

那么, 主动支链与动平台连接的球铰副转角满足下式:

$$\cos \varphi_{B_i} = \hat{s}_i \cdot \hat{z} \tag{23}$$

因此, 由式(23)求反余弦函数即可求出主动

支链与动平台连接的球铰副转角 φ_{B_i} 。

由于 ξ_{A_i} 轴、 η_{A_i} 轴和 ζ_{A_i} 轴分别与静态参考坐标系的 X' 轴、 Y' 轴和 Z' 轴平行, 所以主动支链与台基连接的球铰副转角即为支链坐标系 Z_{A_i} 轴与静态参考坐标系 Z' 轴的夹角。

设 \hat{z}' 为 Z' 轴在静态参考坐标系下的单位向量, 则 $\hat{z}' = (0, 0, 1)$ 。那么, 主动支链与台基连接的球铰副转角满足下式:

$$\cos \varphi_{A_i} = \hat{s}_i \cdot \hat{z}' \quad (24)$$

因此, 由式(24)求反余弦函数即可求出主动支链与台基连接的球铰副转角 φ_{A_i} 。

由于被动约束支链与台基固结在一起, 所以被动约束支链与动平台连接的球铰副转角即为动坐标系 Z 轴与静态参考坐标系 Z' 轴的夹角。

那么, 被动约束支链与动平台连接的球铰副转角满足下式:

$$\cos \varphi_{B_3} = \hat{z} \cdot \hat{z}' \quad (25)$$

因此, 由式(25)求反余弦函数即可求出被动约束支链与动平台连接的球铰副转角 φ_{B_3} 。

3.1.4 奇异位形的限制解析化

按照 2.3 节的分析方法, 判断机构所在位形是否为奇异位形, 如果是奇异位形则不能将其记录至该并联机构的工作空间内。

3.2 工作空间求解算法设计

基于 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的位置正解模型^[11]设计其回转工作空间, 求解算法如下:

- (1) 设定姿态角为 (α, β, γ) ;
- (2) 根据位置逆解模型计算四个主动支链的长度 d_i ;
- (3) 检查步骤(2)计算的主动支链长度是否满足 $d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max}$, 如果不满足, 则转到步骤(9);
- (4) 根据位置正解模型计算步骤(2)所对应的姿态角 α, β 和 γ ;
- (5) 检查在步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 情况下各支链是否发生干涉, 如果发生干涉, 则不将步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 记录至回转工作空间内, 转到步骤(9);
- (6) 检查在步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 情况下, 各球铰副转角是否超出限制范围, 如果超出限制范围, 则不将步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 记录至回转工作空间内, 转到步骤(9);
- (7) 检查在步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 情况下, 机构是否属于奇异位形, 如果是奇异位形, 则不将步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 记录至回转工作空间内, 转到步骤(9);

(8) 将步骤(4)计算的姿态角 α, β 和 γ 记录至回转工作空间内;

(9) 姿态角 (α, β, γ) 增加一个微小量后, 转到步骤(2)。

4 应用算例分析

机构尺寸参数: $l_1 = 2.4 \text{ m}$, $l_2 = 3.6 \text{ m}$, $l_3 = 1.8 \text{ m}$, $l_4 = 2.0 \text{ m}$, $h = 4.7 \text{ m}$; 各主动支链的液压缸内径和外径分别为 90 mm 和 108 mm ; 被动约束支链采用圆柱体结构设计, 直径为 300 mm ; 活塞杆外径为 63 mm ; 驱动液压缸长度最小值 $d_{\min} = 3.74 \text{ m}$, 长度最大值 $d_{\max} = 5.74 \text{ m}$; 球铰副的最大转角 $\varphi_{\max} = 45^\circ$ 。对该并联机构的综合运动设计要求为: 横摇角范围 $\alpha \in [-25^\circ, 25^\circ]$, 纵摇角范围 $\beta \in [-10^\circ, 10^\circ]$, 偏航角范围 $\gamma \in [-7.5^\circ, 7.5^\circ]$, 在预设工作空间内计算 $\det(A^T A)$, 其结果分别如图 2~图 4 所示。取姿态角: $\alpha \in [-30^\circ, 30^\circ]$, $\beta \in [-20^\circ, 20^\circ]$, $\gamma \in [-10^\circ, 10^\circ]$, 按 3.2 节所设计的工作空间求解算法, 运用 MATLAB 仿真计算得到 $-30.1154^\circ \leq \alpha \leq 30.1154^\circ$, $-20^\circ \leq \beta \leq 20^\circ$, $-21.9089^\circ \leq \gamma \leq 10^\circ$, 其结果如图 5 所示, 能满足本文设计的工作空间范围要求。

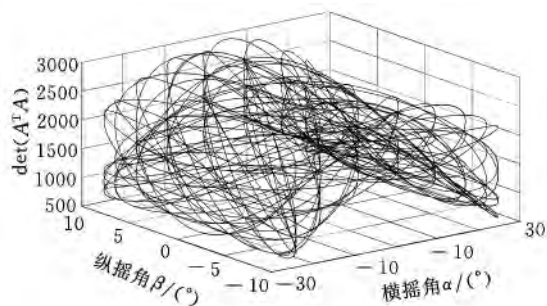


图 2 α, β 与 $\det(A^T A)$ 的关系图

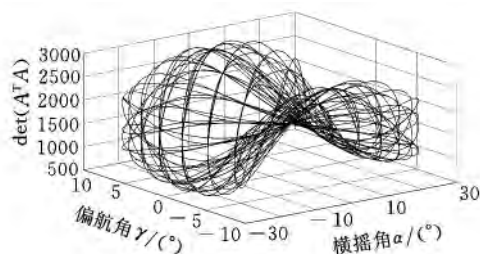


图 3 α, γ 与 $\det(A^T A)$ 的关系图

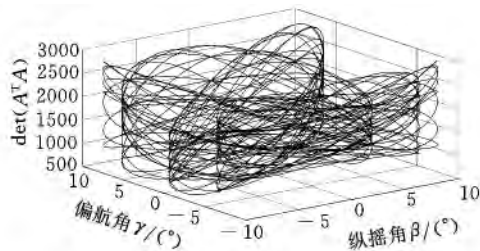


图 4 β, γ 和 $\det(A^T A)$ 的关系图

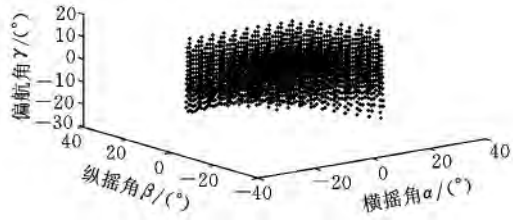


图 5 回转工作空间计算结果

5 结语

运用微分法求出了 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的雅可比矩阵。通过分析可知, 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构不存在边界奇异和构形奇异。为了讨论 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构是否存在位形奇异, 运用数值分析法, 在设计要求的工作空间内计算 $\det(A^T A)$ 的值, 验证了在所设计的机械结构尺寸下, 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构不存在位形奇异。分析了影响 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构工作空间的主要因素, 基于位置正解模型, 设计了 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构回转工作空间的求解算法。根据回转工作空间的求解算法, 运用 MATLAB 编程计算获得了该并联机构的回转工作空间范围。通过结果分析可知, 该并联机构能满足本文设计的工作空间范围要求, 而且本文所设计的回转工作空间求解算法避免了数值方法及几何方法的复杂性和不确定性, 实现了回转工作空间的直观性表达。

参考文献:

- [1] Stewart D. A Platform with Six Degrees of Freedom [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1965, 180(15): 371-386.
- [2] Dasgupta B, Mruthyunjaya T S. The Stewart Platform Manipulator: a Review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(1): 15-40.
- [3] 马晓丽, 马履中, 周兆忠, 等. 3T-1R 并联平台的工作空间分析与优化设计 [J]. 中国机械工程, 2006, 17(18): 1938-1943.
Ma Xiaoli, Ma Lüzhong, Zhou Zhaozhong, et al. Workspace Analysis and Optimal Design of a 3T-1R Parallel Kinematics Platform [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(18): 1938-1943.
- [4] 刘延斌, 张书涛, 韩建海, 等. 一种新型 4-RPTR 并联机构及运动学分析 [J]. 中国机械工程, 2010, 21(23): 2812-2815.

Liu Yanbin, Zhang Shutao, Han Jianhai, et al. Structure and Kinematics Analysis of a Novel 4-RPTR Parallel Mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(23): 2812-2815.

- [5] Gosselin C, Angeles J. Singularity Analysis of Closed-loop Kinematics Chains [J]. IEEE Transactions of Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281-290.
- [6] Mohammed M G, Duffy J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Transactions of the ASME, 1985, 107(2): 226-229.
- [7] Merlet J P. Singular Configuration of A New Parallel Manipulators and Grassman Geometry [J]. The International Journal of Robotics Research, 1989, 8(5): 45-56.
- [8] Dibakar S, Mruthyunjaya T S. A Computational Geometry Approach for Determination of Boundary of Workspaces of Planar Manipulators with Arbitrary Topology [J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(1): 149-169.
- [9] Cecarelli M. A Formulation for the Workspace Boundary of General N-revolute Manipulators [J]. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(5): 637-646.
- [10] Kurtz R L. Kinematics and Optimization of a Parallel Robotic Wrist Mechanism with Redundancy [D]. Montreal, Canada: McGill University, 1989.
- [11] 周结华, 彭侠夫, 仲训昱. 空间 3 自由度冗余驱动并联机构的运动学分析 [J]. 四川大学学报(工程科学版), 2012, 44(2): 221-226.

Zhou Jiehua, Peng Xiafu, Zhong Xunyu. Kinematics Analysis of Spatial 3-DOF Parallel Manipulator with Redundant Actuator [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2012, 44(2): 221-226.

- [12] 赵晓明, 张蕾, 王革, 等. 并联机床的工作空间及其近似表示方法 [J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(6): 1007-1016.

Zhao Xiaoming, Zhang Lei, Wang Ge, et al. Working Space of Parallel Mechanisms and Its Approximate Representation [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(6): 1007-1016.

(编辑 王艳丽)

作者简介: 周结华, 男, 1983 年生。南昌航空大学信息工程学院讲师、博士。主要研究方向为并联机构、运动体综合控制技术和智能控制等。发表论文 10 余篇。彭侠夫, 男, 1963 年生。厦门大学信息科学与技术学院教授、博士研究生导师。