兰州大学学报(自然科学版), 1996, 32(2): 6~ 9
JOURNAL OF LANZHOU UNIVERSITY(Natural Sciences)

NBU型寿命分布在不可靠服务中的特征*

张力远 (兰州工业高等专科学校基础部, 兰州 730050)
李效虎 (兰州大学数学系, 兰州 730000)

摘 要 讨论了以寿命分布作为服务分布的服务系统中,系统不可靠和可靠两种情形下服务时间的分布性质,得出了系统不可靠时的服务时间随机大于系统可靠时的服务时间的充要条件为服务分布是NBU型的.

关键词 寿命分布 可靠性 随机大
中图法分类号 O212.2

0 引言

NBU型寿命分布在工程可靠性理论研究中具有十分重要的意义,它在维修策略和分布类理论中被广泛的研究,在可靠性统计方面也有不少关于NBU分布的结果,所有这些大多被收集在Barlow和Proschan的著作[1]中.

近年来,人们对NBU型寿命分布的其它性质做了许多研究. Janos Galamos和Charles Hogwood等对作为NBU分布特例的指数分布在不可靠服务中的行为特征做了研究[2],得出了"无记忆"的另一种表现:不可靠系统的服务时间同可靠系统的服务时间随机相等的充要条件为服务分布是指数分布.这个结果使我们对"无记忆"又有了新的认识.

在本文中,我们考虑系统不可靠时的服务时间随机大于系统可靠时的服务时间的条件,得到了一个充要条件,即:服务分布是NBU的.这样我们对"新比旧好(NBU)"又有新的认识,那就是:系统服务时间的长短关系表明了系统状态的好坏,新系统(可靠的)服务时间应随机地小于旧系统(不可靠的)服务时间.另外本文的结论推广了Janos Galamos和Charles Hogwood的结果,因为指数分布是"无记忆"的,因而是"新的和旧的"一样好.

1 模型的描述

考虑一个仅有一个服务员的工作台,该台处于正常时完成一项工作所需时间为Y,其分布函数记作G.如果工作台不可靠(可能由于外来干扰而停工),现假定其修理—重开机制为:工作台未完成服务因故停工后立即被修理并开始重新服务.这时往往关心系统不可靠时完成一项工作的服务时间T的状况.显然,若在$(0,t]$中系统无干扰发生,则

$$P(T>t)=P(Y>t),\ t>0. \tag{1}$$

若在$(0,t]$中有干扰发生,分两类情况考虑:

(1)非随机干扰.$(0,t]$中的干扰点记为

* 收稿日期: 1994-10-29

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t.$$

(2) 随机干扰. 干扰的出现遵循某一个局部有限的点过程 $\{N_t\}$,另外点过程 $\{N_t\}$ 与工作台的服务时间相互独立,记其发生序列为

$$0 < f_1 < f_2 < \cdots < f_k < f, k = 1, 2, \cdots .$$

Janos Galamos 和 Charles Hogwood[2] 得到如下结论:

$$P(T > t) = P(Y > t), t > 0,$$

当且仅当

$$\overline{G}(t) = P(Y > t) = \exp\{-\lambda t\}, \lambda > 0. \tag{2}$$

上式表明指数分布的无记忆性的另一特征: 新 (可靠) 系统的服务时间与旧 (不可靠) 系统的服务时间随机相等. 下面考察 NBU 分布在不可靠系统中的性状.

2　主要结论

定理 **2.1**　在第 1类情况中,无论干扰发生的形式,具有干扰的服务时间较无干扰的服务时间随机地大的充要条件为服务分布是 NBU的. 即 $T \geqslant_{st} Y$ 当且仅当 Y 的分布 G 是 NBU的.

证明　设 Y_i 表示时刻 t_i 的干扰发生后,工作台重新启动在无干扰的条件下完成该工作的服务时间, $i = 1, 2, \cdots, k+1$,干扰点的出现与服务相互独立,则 Y_i $(i = 1, 2, \cdots, k+1)$ 相互独立且与 Y 同分布,这样

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(Y_1 > t_1, Y_2 > t_1 - t_1, \cdots Y_k > t_k - t_{k-1}, Y_{k+1} > t - t_k) \\ &= P(Y_{k+1} > t - t_k) \prod_{i=1}^{k} P(Y_i > t_i - t_{i-1}) \\ &= \overline{G}(t - t_k) \prod_{i=1}^{k} \overline{G}(t_i - t_{i-1}), \end{aligned} \tag{3}$$

其中, $t_0 = 0, \overline{G} = 1 - G, t > 0.$

若 G 是 NBU 型的,则对任 $x, y > 0$,

$$\overline{G}(x + y) \leqslant \overline{G}(x)\overline{G}(y), \tag{4}$$

对 (3)右端连续应用 (4),则有

$$P(T > t) \geqslant \overline{G}(t) = P(Y > t),$$

对任意的 $t > 0$.

从而, $T \geqslant_{st} Y$.

反之,若 $T \geqslant_{st} Y$,特别地,考虑干扰序列 $t_1 = x, t_2 = x + y$,对 $t = t_2$ 应有

$$P(T > t) = P(Y > t), \tag{5}$$

由 (3)即有

$$P(T > t) = P(Y_1 > x)P(Y_2 > y) = \overline{G}(x)\overline{G}(y), \tag{6}$$

而

$$P(Y > t) = P(Y > x + y) = \overline{G}(x + y), \tag{7}$$

结合 (5)、(6)、(7) 立即得

$$\overline{G}(x + y) \leqslant \overline{G}(x)\overline{G}(y),$$

又 $x, y > 0$ 任意,于是服务分布 G 是 NBU的.

注意到 NWU分布与 NBU分布的对称性易有

推论 2.1 在第1类情况中,若不论干扰的发生形式,具干扰的服务时间较无干扰的服务时间随机地小的充要条件为服务分布是NWU型的.

定理 2.2 在第2类情况中,若服务分布 G 是NBU的,则具干扰的服务时间随机地大于无干扰时的服务时间.即 $T \geqslant_{st} Y$.

证明 记
$$B_k(t) = \{(t_1,\cdots,t_k): 0 < t_1 < \cdots < t_k < t\},$$
$$F_k(t_1,\cdots,t_k) = P(\tau_i \leqslant t_i, i = 1,\cdots,k, N_t = k),$$
其中,$k \geqslant 0$, τ_i 是第 i 次干扰发生的时刻.特别地有
$$P(Y_1 > t \mid N_t = 0) = P(T > t \mid N_t = 0),$$
利用全概率公式及条件概率公式可有
$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 > t_1,\cdots,Y_k > \tau_k - \tau_{k-1}, Y_{k+1} > t - \tau_k, N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k(t)} P(y_1 > t_1,\cdots,y_k > t_k - t_{k-1}, Y_{k+1} > t - t_k)\,\mathrm{d}F_k(t_1,\cdots,t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k(t)} \overline{G}(t - t_k)\prod_{i=1}^{k}\overline{G}(t_i - t_{i-1})\,\mathrm{d}F_k(t_1,\cdots,t_k), \end{aligned}$$
G 是NBU的,则
$$\overline{G}(t - t_k)\prod_{i=1}^{k}\overline{G}(t_i - t_{i-1}) \geqslant \overline{G}(t),$$
从而
$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k(t)} \overline{G}(t - t_k)\prod_{i=1}^{k}\overline{G}(t_i - t_{i-1})\,\mathrm{d}F_k(t_1,\cdots,t_k) \\ &\geqslant \overline{G}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\int_{B_k(t)} \mathrm{d}F_k(t_1,\cdots,t_k) \\ &= \overline{G}(t) \\ &= P(Y > t), \end{aligned}$$
上边的等式中使用了概率的正规性.由 t 的任意性即知 $T \geqslant_{st} Y$.

完全类似地也有

推论 2.2 在第2类情况中,无论干扰发生的形式,若服务分布 G 是NWU的,则具干扰的服务时间随机地小于无干扰的服务时间.

定理 2.3 在第2类情况中,若不论干扰发生形式,具有干扰的服务时间随机地大于无干扰的服务时间,则服务分布 G 是NBU型的.

证明 对任意的 $t > 0$,
$$\begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_k(t)} \overline{G}(t - t_k)\prod_{i=1}^{k}\overline{G}(t_i - t_{i-1})\,\mathrm{d}F_k(t_1,\cdots,t_k) \\ &\geqslant P(Y > t), \end{aligned} \tag{8}$$
(8)对任意局部有限的干扰点过程 $\{N_t\}$ 均成立.对任意的 $t > 0$ 及 $0 < s < t$,考虑随机干扰点过程 $\{N_t(\delta)\}$,它满足:当 $0 < \delta \to 0$ 时,
$$P(N_t(\delta) = 1, \tau_1 = s) = 1 - o(\delta), \tag{9}$$
$$P(N_t(\delta) \geqslant 2) = o(\delta), \tag{10}$$
不难看出,当 $\delta \to 0$ 时,成立

$$N_t(X) \to \begin{cases} 1, & \text{当 } t \geqslant s, \\ 0, & \text{当 } t < s. \end{cases} \tag{11}$$

若以 $F_k(t_1,\cdots,t_k,X)$ 记 $P(f_i \leqslant t_i, i=1,\cdots,k, N_t(X)=k)$,则 (8) 变为

$$P(T > t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k(t)} \overline{G}(t-t_k) \prod_{i=1}^{k} \overline{G}(t_i - t_{i-1})\, \mathrm{d}F_k(t_1,\cdots,t_k,X) \geqslant \overline{G}(t), \tag{12}$$

利用 (9)和 (10),上式可写为

$$\int_{B_1(t)} \overline{G}(t-t_1)\overline{G}(t_1)\, \mathrm{d}F_1(t_1,X) + o(X) \geqslant \overline{G}(t), \tag{13}$$

上式 $X \to 0$,利用 (11) 及 Lebesgue积分的定义,立即有

$$\overline{G}(t-s)\overline{G}(s) \geqslant \overline{G}(t),$$

由于 t,s 任意,上式即表明服务分布是 NBU的.

同样地可以有

推论 2.3 在第 2类情况中,无论干扰的形式,若具干扰的服务时间随机地小于无干扰的服务时间,则服务分布 G是 NWU的.

综合定理 (推论) 2.1~ 2.3的结果,事实上,已经得到如下的结论:

定理 2.4 不论干扰发生的形式,具干扰的服务时间较无干扰的服务时间随机地大 (小) 的充要条件为服务分布是 NBU (NWU) 的,即 $T \geqslant_{st} Y$ 当且仅当 G是 NBU的.

至此,我们便得到了 NBU(NWU)型寿命分布在不可靠服务中的特征.

致谢: 本文得到了中科院冰川冻土研究所何春雄博士的指导和帮助.

参 考 文 献

1 Barlow R E, Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing: Probability models. To begin with, Silver Spring, MD. 1981. 159~ 181

2 Janos Galambos, Charles Hagwood. An unreliable server characterization of the exponential distribution. J Appl Prob, 1994, 31, 274~ 279

3 Shelton M Ross. Stochastic process. New York: John Wiley & Sons, 1983. 251~ 255

Application of NBU Distribution in Unreliable Server System

Zhang Liyuan

(Department of Basic Course, Lanzhou Higher Industrial College, Lanzhou 730050)

Li Xiaohu

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

Abstract The NBU distribution which is the serving distribution of an unreliable server system is discussed. The serving times on reliable and unreliable occasions are compared. Another description of NBU-property is obtained.

Key words NBU reliability stochastically larger