文章编号: 0455-2059(2001)06-0006-03

NWUC寿命分布类的一个充分条件

李效虎[1], 伍锦棠[2]

(1.兰州大学 数学系, 甘肃 兰州 730000; 2.华侨大学 信息管理系, 福建 泉州 362011)

摘 要: 讨论 NWUC寿命分布类, 证明了若一个更新过程的剩余寿命函数随时间依凸序随机递增, 则其到达间隔是 NWUC的.

关键词: 可靠性; NWUC; 剩余寿命; 凸序; 更新过程

中图分类号: O212.2 文献标识码: A

在可靠性分析中, 按年龄性质对元件分类是十分有意义的. IFR, IFRA, NBU, NBUE, HNBUE作为正年龄概念在维修策略的研究中有良好的应用[1,2], 其共同特征乃是新元件较之旧元件有更长的寿命. 作为上述的对偶有所谓的负年龄概念 DFR, DFRA, NWU, NWUE, HNWUE. 令 X 为一个非负随机变量, 表示一个具有分布函数 $F(t)$ 的元件的寿命, 其生存函数是 $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$, 以 $X_t = X - t| X > t$表示该元件在年龄点 $t > 0$的剩余寿命. 如果对所有 $t \geqslant 0$, X_t 随机地小于 X, 则 F属于 NBU类. 若对所有 $t \geqslant 0$, EX_t小于 X, 则 F属于 NBUE类. Cao等[3]依据下面的随机凸序提出一类新的寿命分布. 关于随机凸序可参阅文[4,5].

定义 1 若随机变量 X, Y满足: 对所有的不减凸函数 h

$$Eh(X) \geqslant Eh(Y),$$

则称 X 依凸序随机大于 Y, 记作 $Y <_{icx} X$.

定义 2 称 F是 NBUC(new better than used in convex ordering)的, 如果对所有 $t \geqslant 0$, X_t 依凸序随机地小于 X. 此即

$$\int_y^{\infty} \overline{F}(t+x)\,dx \leqslant \overline{F}(t)\int_y^{\infty} \overline{F}(x)\,dx, \quad y, t \geqslant 0. \tag{1}$$

当然, 若上面不等式反向, 则称 F是 NWUC(New worse than used in convex ordering)的. 不难证明

$$\text{NBU} \Rightarrow \text{NBUC} \Rightarrow \text{NBUE} \Rightarrow \text{HNBUE},$$

$$\text{NWU} \Rightarrow \text{NWUC} \Rightarrow \text{NWUE} \Rightarrow \text{HWNBUE}.$$

Chen[6]获得了 NBU(NWU)和 NBUE(NWUE)的一个充分条件: 若一个更新过程的剩余寿命函数随时间随机递 (减) 增, 则其到达间隔是 NBU(NWU)的; 若一个更新过程的平均剩余寿命函数随时间递 (减) 增, 则其到达间隔是 NBUE(NWUE)的. Li等[7]通过对更新过程的剩余寿命和凸序的讨论获得一个到达间隔为 NBUC相对应的充分条件. 本文则讨论有关

收稿日期: 2001-02-26.

基金项目: 国家自然科学基金委员会数学天元基金(TY 10126014)和兰州大学博士启动基金资助项目.

作者简介: 李效虎(1969-),男,副教授,博士.

NWUC的相应结果.

令 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列独立同分布的非负随机变量序列, 其分布为 F, 假定 $F(0)=0$. 记 $S_0=0$, 对 $n\geqslant 0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 定义 $N(t)=\sup\{n: S_n\leqslant t\}$, $t\geqslant 0$, 则 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是一个更新计数过程. 以 $V(t)$ 表示年龄点 $t\geqslant 0$ 的剩余寿命, 即 $V(t)=S_{N(t)+1}-t$. Chen[6]证明: 若 $V(t)$ 关于时间 $t\geqslant 0$ 随机递增, 则 F 是 NWU的; 若 $E(V(0))=EX_1<\infty$ 且 $EV(t)$ 关于时间 $t\geqslant 0$ 递增, 则 F 是 NWUE的; Li等[7]证明: 若 $V(t)$ 关于时间 t 依凸序随机递减, 则 F 是 NBUC的. 这里证明对于 NWUC寿命分布类也有类似的结果.

定理 3　若 $V(t)$ 关于时间 $t\geqslant 0$ 依凸序随机递增, 则 F 是 NWUC的.

证明　记

$$g(t,x)=P(V(t)\geqslant x),\quad t\geqslant 0, x\geqslant 0$$

为过程 $N(t)$ 在 t 时刻剩余寿命的生存函数, 由条件概率[8]有

$$g(t,x)=\overline{F}(t+x)+\int_0^t g(t-s,x)\,\mathrm{d}F(s),\tag{2}$$

由 Stoyan[4], X 依凸序小于 Y (具有分布函数 G) 当且仅当

$$\int_x^{\infty}\overline{F}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{\infty}\overline{G}(t)\,\mathrm{d}t.\tag{3}$$

根据 (2), 对所有 $y\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\int_y^{\infty}g(t,x)\,\mathrm{d}x&=\int_y^{\infty}\overline{F}(t,x)\,\mathrm{d}x+\int_y^{\infty}\int_0^t g(t-s,x)\,\mathrm{d}F(s)\,\mathrm{d}x\\&=\Delta_1+\Delta_2.\end{aligned}$$

$V(t)$ 关于 $t\geqslant 0$ 依凸序递增, 由 (3) 及 Fubini 有

$$\begin{aligned}\Delta_2&=\int_0^t\int_y^{\infty}g(t-s,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}F(s)\\&\leqslant\int_0^t\int_y^{\infty}g(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}F(s)\\&=\int_y^{\infty}\int_0^t g(t,x)\,\mathrm{d}F(s)\,\mathrm{d}x\\&=F(t)\int_0^t g(t,x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这样, 对所有 $y\geqslant 0$

$$\int_y^{\infty}g(t,x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_y^{\infty}\overline{F}(t+x)\,\mathrm{d}x+F(t)\int_y^{\infty}g(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

也即, 对所有 $y\geqslant 0$

$$\int_y^{\infty}\overline{F}(t+x)\,\mathrm{d}x\geqslant\overline{F}(t)\int_y^{\infty}g(t,x)\,\mathrm{d}x.\tag{4}$$

另外, 对 $t\geqslant 0$, $X_1=V(0)\leqslant_{\mathrm{icx}}V(t)$. F 是到达间隔的分布, 则对所有 $y\geqslant 0, t\geqslant 0$

$$\int_y^{\infty}g(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_y^{\infty}P(V(t))\,\mathrm{d}x\geqslant\int_y^{\infty}\overline{F}(x)\,\mathrm{d}x.\tag{5}$$

由 (4), (5), 对所有 $t\geqslant 0, y\geqslant 0$

$$\int_y^{\infty}\overline{F}(t+x)\,\mathrm{d}x\geqslant\overline{F}(t)\int_y^{\infty}\overline{F}(t)\,\mathrm{d}x,$$

此即表明 F是 NWUC的.

由定理 3及文 [6]中的定理 1和定理 2有

$$
\begin{array}{ccc}
V(t)\uparrow_{st} \text{ in } t\geqslant 0 & \Rightarrow & \text{NWU interarrivals} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
V(t)\uparrow_{icx} \text{ in } t\geqslant 0 & \Rightarrow & \text{NWUC interarrivals} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
V(t)\uparrow \text{ in } t\geqslant 0 & \Rightarrow & \text{NWUE interarrivals}
\end{array}
$$

参 考 文 献

[1] Barlow R E, Proschan F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing [M]. Madison: Silver Spring, 1981.

[2] Bryson M C, Siddiqui M M. Some criteria for aging [J]. Journal of American Statistical Association, 1969, 64: 1472~1483.

[3] Cao J, Wang Y. The NBUC and NWUC classes of life distributions [J]. Journal of Applied Probability, 1991, 28: 473~479.

[4] Stoyan D. Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models [M]. New York: Wiley, 1983.

[5] Shaked M, Shanthikumar J. Stochastic Orders and Their Applications [M]. Sandiego: Academic Press, 1994.

[6] Chen Y. Classes of life distributions and renewal counting process [J]. Journal of Applied Probability, 1994, 31: 1110~1115.

[7] Li X, Li Z, Jing B. Some new results about the NBUC class of life distributions [J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 46: 229~237.

[8] Karlin S, Taylor H M. A First Course in Stochastic Process, 2nd edition [M]. New York: Academic Press, 1975.

A Sufficient Condition for the NWUE Class of Life Distributions

Li Xiaohu[1], *Wu Jintang*[2]

(1. Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China;

2. Department of Management & Information Science, Huaqiao University, Quanzhou, 362011, China)

Abstract The NWUC class of life distributions and the renewal process are dealt with. It is shown that, if the excess lifetime of a renewal process is stochastically increasing with respect to time $t\geqslant 0$ in terms of increasing convex ordering, then the interarrival is of NWUC property. This supplements those results from Chen (1994) and Li, *et al* (2000).

Key words NWUC; reliability; increasing convex ordering; excess lifetime; renewal process

MR(1991) Subject Classifications 62E10; 60K10