DOI:10.13885/j.issn.0455-2059.2006.06.026

文章编号: 0455-2059(2006)06-0118-03

DRHR 年龄性质封闭性的注记

邱国新[1,2], 李效虎[1]

(1. 兰州大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730000; 2. 中国人民解放军炮兵学院 基础部, 安徽 合肥 230031)

摘　要: 证明了递减反向失效率(DRHR)性质关于卷积运算封闭, 同时证明了该性质在累积发生率是凹的非齐次泊松冲击模型中也封闭.

关键词: 卷积; 递减反向失效率; 累积发生率; 非齐次泊松冲击模型

中图分类号: O212.2　　**文献标识码**: A

对非负绝对连续的随机变量X, 记其分布函数、可靠性函数、密度函数分别为$F(x)$, $\bar{F}(x)$, $f(x)$. 定义X的反向失效率为$\tilde{r}(x)=f(x)/F(x)$, 它与X的失效率概念相平行, 在分析左截尾数据时起重要的作用. 同时, 在估计一个随机变量的可靠性函数方面, 反向失效率也有诸多应用[1~4]. 特别的, 如果X的反向失效率$\tilde{r}(x)$是关于x递减的, 则称X具有递减反向失效率(DRHR)性质[5,6]. 接着注意到$(\ln F(x))'=\tilde{r}(x)$, 所以, DRHR性质的另一等价定义是其分布函数$F(x)$是对数凹的[7], 或者说是PF_2的[1]. 也就是说, 对所有的$0\le x_1<x_2$, $0\le y_1<y_2$,

$$\begin{vmatrix} F(x_1-y_1) & F(x_1-y_2) \\ F(x_2-y_1) & F(x_2-y_2) \end{vmatrix} \ge 0, \tag{1}$$

或者说, 对任意常数$\Delta>0$和$0\le x_1<x_2$,

$$\frac{F(x_1+\Delta)}{F(x_1)} \ge \frac{F(x_2+\Delta)}{F(x_2)}. \tag{2}$$

DRHR性质引起了很多学者的关注. NANDA等[8]调查了DRHR性质在k-out-of-n系统中的封闭性; SENGUPTA等[9]研究了DRHR性质在齐次泊松冲击模型中的封闭性. 随后, LI等[10]探讨了由独立的都具有DRHR性质的元件组成的k-out-of-n系统的剩余寿命性质; NANDA等[7]建立了DRHR性质与其他年龄性质之间的关系. 最近, ZHANG[11]宣称DRHR性质在卷积运算下封闭, 但很遗憾, 其证明是错误的.

本文重新给出DRHR性质关于卷积运算封闭性的证明, 并证明了DRHR性质在累积发生率是凹的非齐次泊松冲击模型中也封闭.

1　卷积运算的封闭性

先回忆一个称之为基本复合公式的引理, 此引理在证明DRHR性质关于卷积运算封闭时起核心作用.

引理 1[12]　令$w(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)v(y,z)\mathrm{d}\sigma(y)$绝对收敛, 则

$$\begin{vmatrix} w(x_1,z_1) & \cdots & w(x_1,z_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w(x_n,z_1) & \cdots & w(x_n,z_n) \end{vmatrix} = \int\cdots\int_{y_1<\cdots<y_n} \begin{vmatrix} u(x_1,y_1) & \cdots & u(x_1,y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(x_n,y_1) & \cdots & u(x_n,y_n) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v(y_1,z_1) & \cdots & v(y_1,z_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v(y_n,z_1) & \cdots & v(y_n,z_n) \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma(y_1)\cdots\mathrm{d}\sigma(y_n).$$

定理 1　若$X_1, X_2, \cdots, X_n$是n个互相独立的具有DRHR性质的随机变量, 则这些随机变量的和仍具有DRHR性质.

证明　显然, 仅需证明$n=2$时定理成立即可. 设X_i的分布函数和密度函数分别是$F_i(x)$和$f_i(x)$, $i=1, 2$, 则$X=X_1+X_2$的分布函数为$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x-s)\mathrm{d}F_2(s)$. 根据引理1, 对$0\le t_1<t_2$, $0\le u_1<u_2$, 有

$$\begin{vmatrix} F(t_1-u_1) & F(t_1-u_2) \\ F(t_2-u_1) & F(t_2-u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \int_{-\infty}^{\infty}F_1(t_1-s)f_2(s-u_1)\mathrm{d}s & \int_{-\infty}^{\infty}F_1(t_1-s)f_2(s-u_2)\mathrm{d}s \\ \int_{-\infty}^{\infty}F_1(t_2-s)f_2(s-u_1)\mathrm{d}s & \int_{-\infty}^{\infty}F_1(t_2-s)f_2(s-u_2)\mathrm{d}s \end{vmatrix}$$

收稿日期: 2004-12-08.　**修改稿收到日期**: 2006-05-17.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10201010).

作者简介: 邱国新(1971-), 男, 安徽桐城人, 讲师, 硕士, 研究方向为可靠性理论及其应用, e-mail: qiugx02@st.lzu.edu.cn.

$$= \iint\limits_{s_1<s_2} \begin{vmatrix} F_1(t_1-s_1) & F_1(t_1-s_2) \\ F_1(t_2-s_1) & F_1(t_2-s_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_2(s_1-u_1) & f_2(s_1-u_2) \\ f_2(s_2-u_1) & f_2(s_2-u_2) \end{vmatrix} \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2$$

$$= \iint\limits_{s_1<s_2} \begin{vmatrix} f_1(t_1-s_1) & F_1(t_1-s_2) \\ f_1(t_2-s_1) & F_1(t_2-s_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_2(s_1-u_1) & F_2(s_1-u_2) \\ f_2(s_2-u_1) & f_2(s_2-u_2) \end{vmatrix} \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2. \tag{3}$$

上面(3)式中最后一个等号来自分部积分公式. 对积分号内的第一个行列式变形如下

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1-s_1) & F_1(t_1-s_2) \\ f_1(t_2-s_1) & F_1(t_2-s_2) \end{vmatrix}$$

$$= f_1(t_1-s_1)F_1(t_2-s_2) - f_1(t_2-s_1)F_1(t_1-s_2)$$

$$= F_1(t_2-s_2)F_1(t_1-s_2)\left[\frac{f_1(t_1-s_1)}{F_1(t_1-s_1)}\frac{F_1(t_1-s_1)}{F_1(t_1-s_2)} - \frac{f_1(t_2-s_1)}{F_1(t_2-s_1)}\frac{F_1(t_2-s_1)}{F_1(t_2-s_2)}\right]. \tag{4}$$

由DRHR性质定义和(2)式分别有

$$\frac{f_1(t_1-s_1)}{F_1(t_1-s_1)} \ge \frac{f_1(t_2-s_1)}{F_1(t_2-s_1)},$$

$$\frac{F_1(t_1-s_1)}{F_1(t_1-s_2)} \ge \frac{F_1(t_2-s_1)}{F_1(t_2-s_2)}.$$

故(4)式是非负的.

同理可得(3)式中的第二个行列式也是非负的. 综合可得(3)式是非负的, 这样, 由(1)式知, X 具有DRHR性质.

2 非齐次泊松冲击模型中的封闭性

假设一装置遭受的冲击服从强度为$\lambda(t) > 0$的非齐次泊松过程, 装置经受前k次冲击后仍能生存的概率为$\bar{P}_k$, 这里$1 = \bar{P}_0 \ge \bar{P}_1 \ge \cdots$, 于是, 该装置的可靠性函数可写作

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}, \quad t \ge 0, \tag{5}$$

其中$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u$是累积发生率. 若$\lambda(t)$等于一正常数$\lambda$, 则

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0. \tag{6}$$

注意到在点k具有概率p_k的离散型随机变量被称作具有离散的DRHR性质是指, 对任意非负整数k, $P_k^2 \ge P_{k-1} \cdot P_{k+1}$成立, 这里$P_k = 1 - \bar{P}_k \equiv \sum_{j=0}^{k-1} p_j$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

引理2来自SENGUPTA[9], 它建立了DRHR性质在齐次泊松冲击模型中的封闭性.

引理2 若p_k具有离散DRHR性质, 则(6)式中$\bar{H}(t)$也具有DRHR性质.

下面的引理3表明DRHR性质在增凸变换下是封闭的.

引理3 若X具有DRHR性质, $\phi(x)$是增凸变换, 则$\phi(X)$也具有DRHR性质.

证明 令$\varphi(x) = \phi^{-1}(x)$, 记$\phi(X)$的分布函数是$G(x)$, 则

$$G(x) = P\{\phi(X) \le x\} = P\{X \le \varphi(x)\} = F(\varphi(x)).$$

注意到$\phi(x)$是增凸的, $\varphi(x)$是增凹的, 且由假设知, $\ln F$也是增凹的, 所以$\ln G$是增凹的, 即$\phi(X)$具有DRHR性质.

注 SENGUPTA[9]中的定理2证明了引理3的两个特例成立, 即$\phi(x) = \alpha x\ (\alpha > 0)$和$\phi(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 1)$.

下面证明DRHR性质在非齐次泊松冲击模型中的封闭性.

定理2 若p_k具有离散DRHR性质, 且$\Lambda(t)$是凹的, 则(5)式中$\bar{H}(t)$也具有DRHR性质.

证明 因为$\Lambda(t)$永远递增, 所以当$\Lambda(t)$是凹的, Λ^{-1}就是增凸的; 另一方面, 由引理2, 若p_k具有离散DRHR性质, (6)式对应的随机变量就具有DRHR性质. 注意到(5)式可看作是(6)式中当$\lambda = 1$时对应的随机变量再经Λ^{-1}变换后的可靠性函数, 所以由引理3立即可得到(5)式对应的随机变量也具有DRHR性质.

参考文献

[1] BARLOW R E, PROSCHAN F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Probability Model[M]. New York: Holt, Rinehart and Winnston, 1981.

[2] 邱国新, 李效虎. 有关加速寿命模型的几个新结论[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2006, 42(2): 102-105.

[3] SHAKED M, SHANTHIKUMAR J. Stochastic Orders and Their Application[M]. Boston: Academic Press, 1994.

[4] FINKELSTEIN M S. A note on some aging properties of the accelerated life model[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2001, 71(1): 109-112.

[5] BLOCK H, SAVITS T, SINGH H. The reversed hazard rate function[J]. Probability in the Engineering and Informational Science, 1998, 12(1): 69-90.

[6] CHANDRA N K, ROY D. Some results on reversed hazard rate[J]. Probability in Engineering and Informational Sciences, 2001, 15(1): 95-102.

[7] NANDA A K, SINGH H, MISRA N, et al. Reliability properties of reversed residual lifetime[J]. Communications in Statistics, 2003, 32(10): 2031-2042.

[8] NANDA A K, JAIN K, SINGH H. Preservation of some partial orderings under the formation of coherent systems[J]. Statistics and Probability Letters, 1998, 39(2): 123-131.

[9] SENGUPTA D, NANDA A K. Log-concave and concave distributions in reliability[J]. Naval Logistics Research, 1999, 46(4): 419-433.

[10] LI X, ZUO M. On the behaviour of some new aging properties based upon the residual life of k-out-of-n systems[J]. Journal of Applied Probability, 2002, 39(2): 426-433.

[11] ZHANG S. Stochastic comparison of residual lifetime, inactivity time and the closure properties of life distribution classes[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2003.

[12] KARLIN S. Total Positivity[M]. Stanford: Stanford University Press, 1968: 17.

A note on the preservation of DRHR aging property

QIU Guo-xin[1,2], *LI Xiao-hu*[1]

(1. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;

2. Department of Basic Courses, Artillery College of PLA, Hefei 230031, China)

Abstract: A new proof for the preservation property of DRHR under convolution is developed. It is also shown that the DRHR property can be preserved under non-homogeneous Poisson shock model with increasing concave cumulative rate of occurrence.

Key words: convolution; cumulative rate of occurrence; DRHR; non-homogeneous Poisson shock model

AMS Subject Classifications(2000): 60E05; 60E15