文章编号: 0455-2059(2000)03-0032-04

独立指数情形下 n 中取 k 系统的极限行为

李效虎[1], 张久文[2]

(1.兰州大学 数学系; 2.兰州大学 电子与信息科学系, 甘肃 兰州 730000)

摘 要: 讨论了当各元件相互独立并具有互不相同的指数分布时 n 中取 k 系统的极限行为;利用有关开关更新过程的极限理论获得了该系统的极限平均故障时间间隔、极限平均停工时间长度和极限平均工作时间长度的确切计算公式.

关键词: 寿命分布; n 中取 k 系统; 更新过程

中图分类号: O212 文献标识码: A

0 引言

n 中取 k 系统[1]在石油输送、卫星通信和电话增音系统中有广泛的应用.近年来的研究主要集中在系统可靠度计算、最优排序和系统最优设计等方面.平均停工时间和平均工作时间是经常用以刻画系统性能的指标,对提供相关的维修策略具有指导意义.本文讨论各元件相互独立并具有指数分布时 n 中取 k 系统的极限行为,获得了其 MTBF 极限平均停工时间和极限平均工作时间的计算公式.

定义 1 n 个元件所构成的系统,如果当且仅当 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个或 k 个以上的元件同时失效时系统失效,则称该系统是 n 中取 k 的.

显然,当 $k=1$ 时, n 中取 k 系统即串联系统.当 $k=n$ 时, n 中取 k 系统即并联系统.

设 n 个元件相互独立、分别具有指数寿命分布 $\mathscr{E}(\lambda_i^{-1})(i=1,\cdots,n)$,考虑由它们所构成的 n 中取 k 系统,其失效修理机制如下:系统中每一元件失效后立即投入完全修理,且各自的修理时间相互独立、具有指数分布 $\mathscr{E}(\mu_i^{-1})(i=1,\cdots,n)$.关心 MTBF(mean time between failures)平均失效间隔,极限意义下的平均停工时间和平均工作时间.将每次停工视为一次更新,则系统的工作过程为一延迟更新过程(假定初始时刻 n 个元件均处于工作状态),下面是将用到的一些记号.

$N(t)$: $(0,t]$ 中系统的更新次数; $m(t)$: $(0,t]$ 中系统的平均更新次数; μ: 系统的平均更新间隔(上次故障结束至下次失效开始); D: 系统在一个更新间隔中的工作时间; $P(t,h)$: t 时刻系统正常工作而在 $t+h$ 时刻失效的概率; $Q_D(t)$: t 时刻系统处于停工状态的概率; $P_1(t,h)$: t 时刻系统中有 k 个元件正常工作,其中恰有一个在 $t+h$ 失效, $n-k$ 个在 $[t,t+h)$ 处于维修状态的概率; $P_2(t,h)$: t 时刻系统中有 k 个元件正常工作,在时刻 $t+h$ 有 2个以上失效, $n-k$ 个在 $[t,t+h)$ 处于维修状态的概率; $P_3(t,h)$: t 时刻系统中有 k 个元件正常工作、其中至时刻 $t+h$ 有 $m\leqslant k$ 个以上失效, $n-k$ 个在 $[t,t+h)$ 仍处于维修状态的元件有少于 m 个完成维修的概

收稿日期: 1999-05-10.

基金项目: 国家自然科学基金(19871035)和甘肃省自然科学基金(b4)赞助.

作者简介: 李效虎(1969-),男,讲师,博士.

率; $P_4(t,h)$: t时刻系统中有 k 个以上元件正常工作、间隔 $[t,t+h)$ 中由工作状态转为失效状态的元件数目大于由维修状态转为工作状态的元件数目的概率; $P_5(t,h)$: 间隔 $[t,t+h)$ 中发生 2次或 2次以上停工的概率.

1　主要结论

尽管假定诸元件相互独立,但是在相邻两次结束修理时刻之间停工时间和修理时间的精确分布仍难以确定.在维修策略中,极限性质实质上是更令人感兴趣的.为此,将每相邻两次结束修理时刻之间的时间视为一个更新间隔,这样,每一个元件的工作、修理过程则成为一开关更新过程.当然,系统自身可以看作由 n个相互独立的开关更新过程复合而成的一个开关更新过程.

引理 **2**　对较小的 $h>0$

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t,h) = \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \prod_{r=k+1}^{n} \frac{\mu_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \right\} \prod_{r=1}^{k} \frac{h}{\lambda_{i_r}} + o(h). \tag{1}$$

证明　由开关更新过程的开关定理[2]知,对 $1\leqslant i\leqslant n$

$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{时刻元件 } i\text{处于工作状态}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}, \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(t\text{时刻元件 } i\text{处于修理状态}) = \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}. \tag{3}$$

这样,对于较小的 $h>0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P_1(t,h)\\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \prod_{r=k+1}^{n} \frac{\mu_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \right\} \left\{ \sum_{j=1}^{k} (1-e^{-\lambda_{i_r}h}) \prod_{r=1,r\neq j}^{k} e^{-\lambda_{i_r}h} \prod_{r=1,r\neq j}^{k} e^{-\lambda_{i_r}h} \right\}\\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \prod_{r=k+1}^{n} \frac{\mu_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{k} \frac{h}{\lambda_{i_r}} + o(h) \right\}\\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \prod_{r=k+1}^{n} \frac{\mu_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{k} \frac{h}{\lambda_{i_r}} \right\} + o(h).
\end{aligned}$$

引理 **3**　对较小的 $h>0$, $\lim_{t\to\infty} P_i(t,h) = o(h)$, $i=1,2,3,4$. (4)

证明　类似于引理 2,仅对 $i=2$的情形给予证明.事实上,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P_2(t,h)\\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \prod_{r=k+1}^{n} \frac{\mu_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \right\} \times\\
&\quad \times \left\{ \sum_{j,l=1,j\neq l}^{k} (1-e^{-\lambda_{i_j}h})(1-e^{-\lambda_{i_l}h}) \cdot \prod_{r=1,r\neq j,l}^{k} e^{-\lambda_{i_r}h} \prod_{r=k+1}^{n} e^{-\mu_{i_r}h} \right\}\\
&= \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \left\{ \prod_{r=1}^{k} \frac{\lambda_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \prod_{r=k+1}^{n} \frac{\mu_{i_r}}{\lambda_{i_r}+\mu_{i_r}} \right\} \cdot o(h).\\
&= o(h).
\end{aligned}$$

引理 **4**　对较小的 $h>0$.

$$\lim_{t\to\infty} P_5(t,h) = o(h). \tag{5}$$

证明　利用引理 2的结论即可证明.

定理 5　当 $t\to\infty$ 时,n 中取 k 系统的平均更新间隔为

$$\_ = \left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\left[\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{ir}}\prod_{l=1}^{k}\frac{\lambda_{il}}{\mu_{il}}\right]\right\}^{-1}. \tag{6}$$

证明　结合(1),(4)和(5)即有

$$\lim_{t\to\infty}P(t,h) = \sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\left\{\prod_{r=1}^{k}\frac{\lambda_{ir}}{\lambda_{ir}+\mu_{ir}}\prod_{r=k+1}^{n}\frac{\mu_{ir}}{\lambda_{ir}+\mu_{ir}}\right\}\sum_{r=1}^{k}\frac{h}{\lambda_{ir}} + o(h). \tag{7}$$

利用 Blackwell[3] 定理有 $\_^{-1} = \lim_{t\to\infty}P(t,h)$,这样,由(7)便有

$$\begin{aligned}\_^{-1} &= \lim_{h\to\infty}\lim_{t\to\infty}P(t,h)\\ &= \sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\left\{\prod_{r=1}^{k}\frac{\lambda_{ir}}{\lambda_{ir}+\mu_{ir}}\prod_{r=k+1}^{n}\frac{\mu_{ir}}{\lambda_{ir}+\mu_{ir}}\right\}\sum_{r=1}^{k}\lambda_{ir}^{-1}\\ &= \left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\left[\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{ir}}\prod_{l=1}^{k}\frac{\lambda_{il}}{\mu_{il}}\right]\right\}^{-1}.\end{aligned}$$

定理 6　当 $n\to\infty$ 时,n 中取 k 系统的平均停工时间为

$$ED = \frac{\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\prod_{j=1}^{r}\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}}}{\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{ir}}\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}}}. \tag{8}$$

证明　考虑到各元件之间的独立性,则有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}Q_D(t) &= \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\prod_{j=1}^{r}\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}+\mu_{ij}}\prod_{k=r+1}^{n}\frac{\mu_{ik}}{\mu_{ik}+\lambda_{ik}}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\prod_{j=1}^{r}\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}}.\end{aligned}$$

又由开关更新过程的极限定理[2]知,$\lim_{t\to\infty}Q_D(t) = \frac{ED}{ED+EU} = \frac{ED}{\_}$,结合(6)立即得到(8).

完全类似地可以得到系统在一次更新间隔中的平均工作时间

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}Q_U(t) &= \sum_{r=k}^{n}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\prod_{j=1}^{r}\frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}+\mu_{ij}}\prod_{k=r+1}^{n}\frac{\mu_{ik}}{\mu_{ik}+\lambda_{ik}}\\ &= \prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\sum_{r=k}^{n}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\prod_{j=1}^{r}\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}},\end{aligned}$$

$$EU = \frac{\sum_{r=k}^{n}\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\prod_{j=1}^{r}\frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}}}{\sum_{(i_1,\cdots,i_k)}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{\lambda_{ir}}\prod_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{ik}}{\mu_{ik}}}. \tag{9}$$

特别地,

1) 当 $k=1$ 时系统是串联的.

(a) 其平均更新间隔为 $\left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\mu_r}\right\}^{-1}$.

(b) 其平均停工时间为 $\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i}\right]^{-1}$.

(c) 其平均工作时间为 $\left(1-\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\right)\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\mu_r}\right]^{-1}$.

2) 当 $k=n$ 时系统是并联的.

(a) 其平均更新间隔为 $\left\{\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\sum_{r=1}^{n}\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}\lambda_i}{\prod_{i=1}^{n}\mu_i}\right\}^{-1}$.

(b) 其平均停工时间为 $\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\right]^{-1}$.

(c) 其平均工作时间为 $\left(1-\prod_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}\right)\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\mu_r}\right]^{-1}$.

参 考 文 献

[1] Barlow R E, Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing: Probability models [M]. To Begin with, Silver Spring, MD, 1981.

[2] Ross S M. Stochastic process [M]. New York; John Wiley & Sons, 1981.

[3] Ravichandran N. Stochastic process [M]. New York; John Wiley & Sons, 1990.

Limit Characterization for k-out of-n System with Independent Exponential Components

Li Xiaohu[1], *Zhang Jiuwen*[2]

(1. Department of Mathematics; 2. Department of Electronics and Information Science, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China)

Abstract The k-out of-n system with mutually independent but not identical exponentially distributed components is dealt with. By the limit theory of the alternating renewal process, we obtain the accurate formulas of the limit mean time between failures, the limit mean down time and the limit mean work time, as the functioning time of the system tends to infinity.

Key words life distribution; k-out of-n system; renewal process

MR (1991) Subject Classification: 62E10