文章编号: 0455-2059(2000)01-0007-05

NBU-$[t_0,\infty)$寿命分布及其冲击模型

李效虎，苏志勇
(兰州大学 数学系，甘肃 兰州 730000)

摘 要: 讨论了一个延迟 Poisson冲击模型以产生 NBU-$[t_0,\infty)$寿命分布,这个结果是对 Poisson冲击产生 NBU分布的推广;研究了 NBU-$[t_0,\infty)$寿命分布与已有寿命分布类 NBU和 NBU-t_0的关系,利用灾难变换证明了它在协同结构下的封闭性,同时证明 NBU-$[t_0,\infty)$与 NBU寿命分布的卷积仍然具有 NBU-$[t_0,\infty)$性质.

关键词: 寿命分布; NBU-$[t_0,\infty)$; Poisson过程; 卷积
中图分类号: O212.2 文献标识码: A

0 引言

NBU寿命分布在可靠性理论及应用中被广泛地研究[1,2]. Hollander等[3]引入一类非参数寿命分布以研究在一个单点上的 NBU性,其后, Reneau等[4]对此又作了扩展以便于讨论一般点集上的 NBU性质.它们的定义分别为:

定义 1 如果对 $x, y\geqslant 0$寿命分布 F满足

$$\overline{F}(y+x)\leqslant\overline{F}(y)\overline{F}(x),\tag{1}$$

则称 F是 NBU(New Better than Used).

定义 2 如果对 $x\geqslant 0$与给定的 $t_0\geqslant 0$寿命分布 F满足

$$\overline{F}(t_0+x)\leqslant\overline{F}(t_0)\overline{F}(x),\tag{2}$$

则称 F是 NBU-t_0(New Better than Used at Age t_0).

定义 3 如果对任意 $x\geqslant 0$和 $t\in A$,寿命分布 F满足

$$\overline{F}(x+t)\leqslant\overline{F}(t)\overline{F}(x),\tag{3}$$

其中 $A\subset[0,\infty)$,则 F称作 NBU-A(New Better than Used at Ages in the Set A). NBU-A寿命分布类为模拟元件的老化和劣化现象提供了更为丰富的内容,它能更合理地刻画元件、系统的寿命的衰减过程.

本文先考虑一种可以产生 NBU-$[t_0,\infty)$分布的冲击模型,这一结果推广了[1]中 Poisson冲击模型产生 NBU分布的结论,其次讨论了 NBU-$[t_0,\infty)$和 NBU, NBU-t_0的关系,最后研究了它在可靠性运算下的封闭性.

1 Poisson冲击模型产生 NBU-$[t_0,\infty)$分布

一装置受到一强度为 λ的 Poisson过程产生的冲击的影响,冲击源的影响在系统具有确定

收稿日期: 1998-05-27.
基金项目: 国家自然科学基金(19871035)和甘肃省自然科学基金(b4)资助项目.
作者简介: 李效虎(1969-),男,讲师.

的年龄 $t_0 \geqslant 0$之后开始;假定在 t_0以后系统的寿命分布 H只与冲击有关,在 t_0以前的寿命分布 H_0仅决定于装置的内在性质.以 $\overline{P}_k$记系统能够承受前 k次冲击的概率(只是 k的函数).根据[5]和[1],系统在 Poisson冲击下的生存函数

$$\overline{H}(x)=\begin{cases}\overline{H}_0(x), & 0\leqslant x\leqslant t_0,\\ \overline{H}_0(t_0)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda(x-t_0)}\dfrac{[\lambda(x-t_0)]^k}{k!}, & x>t_0.\end{cases} \tag{4}$$

令 $t_0=0$,则在冲击源的影响从0时刻起开始的情形下系统的生存函数

$$\overline{H}^*(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda x}(\lambda x)^k/k!\ . \tag{5}$$

假设系统的自然寿命(无冲击源影响)随机地大于在初始时刻冲击源即产生影响情形下的寿命,即

$$\overline{H}_0(x)\geqslant \overline{H}^*(x),\qquad x\geqslant 0. \tag{6}$$

关于系统寿命生存函数,有

定理4 如果(5)成立且对所有非负整数 k,j,$\overline{P}_k$满足:$\overline{P}_k\overline{P}_j\geqslant \overline{P}_{k+j}$,则系统寿命 H是 NBU-$[t_0,\infty)$的.

证明 由(4),(5)和(6),对 $0\leqslant x<t_0$及 $y\geqslant t_0$,有

$$\begin{aligned}\overline{H}(x)\overline{H}(y)&=\overline{H}_0(x)\overline{H}_0(t_0)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda(y-t_0)}[\lambda(y-t_0)]^k/k!\\
&\geqslant \overline{H}_0(t_0)\overline{H}^*(x)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda(y-t_0)}[\lambda(y-t_0)]^k/k!\\
&=\overline{H}_0(t_0)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda(y-t_0)}\frac{[\lambda(y-t_0)]^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{P}_l e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^l}{l!}\\
&=\overline{H}_0(t_0)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\overline{P}_k\overline{P}_{j-k}e^{-\lambda(x+y-t_0)}\frac{[\lambda(x+y-t_0)]^{j-k}[\lambda(y-t_0)]^k}{k!(j-k)!}\\
&\geqslant \overline{H}_0(t_0)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\overline{P}_j}{j!}e^{-\lambda(x+y-t_0)}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}[\lambda(y-t_0)]^k(\lambda x)^{j-k}\\
&=\overline{H}_0(t_0)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_j e^{-\lambda(x+y-t_0)}[\lambda(x+y-t_0)]^j/j!\\
&=\overline{H}(x+y-t_0)\\
&\geqslant \overline{H}(x+y).\end{aligned}$$

而对 $x\geqslant t_0$及 $y\geqslant t_0$,也有

$$\begin{aligned}\overline{H}(x)\overline{H}(y)&=\overline{H}_0^2(t_0)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda(x-t_0)}\frac{[\lambda(x-t_0)]^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\overline{P}_l e^{-\lambda(y-t_0)}\frac{[\lambda(y-t_0)]^l}{l!}\\
&\geqslant \overline{H}_0^2(t_0)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_j e^{-\lambda(x+y-2t_0)}[\lambda(x+y-2t_0)]^j/j!\\
&\geqslant \overline{H}_0(t_0)\overline{H}_0^*(t_0)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_j e^{-\lambda(x+y-2t_0)}[\lambda(x+y-t_0)]^j/j!\\
&=\overline{H}_0(t_0)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{P}_j e^{-\lambda(x+y-2t_0)}\frac{[\lambda(x+y-t_0)]^j}{j!}\sum_{i=0}^{\infty}\overline{P}_i e^{-\lambda t_0}\frac{(\lambda t_0)^i}{i!}\end{aligned}$$

$$\geqslant \overline{H}_0(t_0)\sum_{k=0}^{\infty}\overline{P}_k e^{-\lambda(x+y-t_0)}\frac{[\lambda(x+y-t_0)]^k}{k!}$$
$$=\overline{H}(x+y-t_0)$$
$$\geqslant \overline{H}(x+y).$$

由此立知: (3) 对 $A=[t_0,\infty)$ 成立,即 $H(x)$ 是 NBU-$[t_0,\infty)$ 的.

定理 4推广了 Poisson冲击产生 NBU寿命分布 (Barlow & Proschan(1981))这一结果.显然,当 $t_0=0$时, H则是 NBU 的.

2 NBU-$[t_0,\infty)$与其它分布类的关系

以下讨论 NBU-$[t_0,\infty)$寿命分布同寿命分布类 NBU, NBU-t_0间的关系.

结论 **5** 如果 F是 NBU-$[t_1,\infty)$的且 $t_1>t_0$,则 F也是 NBU-$[t_1,\infty)$的.

这个结果是显然的.由此有: NBU$\Rightarrow$NBU-$[t_0,\infty)$.

结论 **6** 如果 F是 NBU-$[t_0,\infty)$的,则 F也是 NBU-t_0的,反之不然.

结论的前半部分是明显的.下面的例子为后半部分提供支持.

例　考虑寿命分布 F,其频率函数为

$$P(1/2)=1/3,\quad P(3/2)=1/3,\quad P(2)=1/3.$$

对 $t_0=1/4$,容易验证 F满足 (2),从而, F是 NBU-t_0的.但是,对 $x=y=2/3$,

$$\overline{F}(x+y)=\overline{F}(4/3)=2/3,\quad \overline{F}(x)\overline{F}(y)=\overline{F}^2(2/3)=4/9.$$

可见, F不是 NBU-$[t_0,\infty)$的.

基于以上结果,有

$$\text{NBU}\Rightarrow\text{NBU-}[t_0,\infty)\Rightarrow\text{NBU-}t_0.$$

3 在可靠性运算下的封闭性

为讨论在可靠性运算下的封闭性,先介绍引理[1].

引理 **7** 设 h是 n个独立元件所构成协同系统的生存函数,则对所有 $0\leqslant p_i, p_i'\leqslant 1, i=1,\cdots,n$,

$$h[(p_1,\cdots,p_n)(p_1',\cdots,p_n')]\leqslant h[(p_1,\cdots,p_n)]h[(p_1',\cdots,p_n')],$$

其中 $(p_1,\cdots,p_n)(p_1',\cdots,p_n')=(p_1p_1',\cdots,p_np_n')$.

定理 **8** n个独立元件所构成协同系统中,若第 i个元件的分布函数 F_i是 NBU-$[t_i,\infty)$的, $t_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n$,则系统寿命是 NBU-$[t_0,\infty)$的,其中 $t_0=\max\{t_1,\cdots,t_n\}$.

证明　由结论 5,诸 F_i 均是 NBU-$[t_0,\infty)$的.记 $R_i(x)=-\log\overline{F}_i(x)$为第 i个元件的累积失效率,众所周知,不等式 $\overline{F}_i(y+x)\leqslant\overline{F}_i(x)\overline{F}_i(y)$同 R_i的超可加性等价,即

$$R_i(y+x)\geqslant R_i(x)+R_i(y).$$

以 $R(x)=-\log\overline{F}(x)$记系统的累积失效率,则必存在函数 Z使

$$R(x)=Z(R_1(x),\cdots,R_n(x)).$$

注意到 $Z(d_1,\cdots,d_n)=-\log h(e^{-d_1},\cdots,e^{-d_n})$, $h(\overline{F}_1,\cdots,\overline{F}_n)$表示系统的生存函数,容易看出 Z关于每一个 d_i单调不减;于是,对所有 $x\geqslant 0$和 $y\geqslant t_0$,

$$Z(R_1(x+y),\cdots,R_n(x+y))\geqslant Z(R_1(x)+R_1(y),\cdots,R_n(x)+R_n(y)).\tag{7}$$

而且,由引理 7可以得到 Z的超可加性

$$Z(R_1+R_1',\cdots,R_n+R_n')=-\log h(e^{-(R_1+R_1')},\cdots,e^{-(R_n+R_n')})$$
$$\geqslant -\log\{h(e^{-R_1},\cdots,e^{-R_n})h(e^{-R_1'},\cdots,e^{-R_n'})\}$$
$$=Z(R_1,\cdots,R_n)Z(R_1',\cdots,R_n').$$

因此

$$Z(R_1(x)+R_1(y),\cdots,R_n(x)+R_n(y))\geqslant Z(R_1(x),\cdots,R_n(x))Z(R_1(y),\cdots,R_n(y)).\quad(8)$$

由(7),(9)可知 $R(x+y)\geqslant R(x)+R(y)$对所有 $x\geqslant 0$和 $y\geqslant t_0$成立,于是系统也是 NBU-$[t_0,\infty)$的.

在以上定理中,令 $t_i=t_0(i=1,\cdots,n)$即得到 NBU-$[t_0,\infty)$关于协同系统的封闭性;若 $t_0=0$,则可得 NBU的相应性质.

NBU-$[t_0,\infty)$似乎在卷积运算下不封闭,但获得了以下的结果.

定理 9 寿命分布 F_1是 NBU的,F_2是 NBU-$[t_0,\infty)$的,如果二者独立,则其卷积 $F=F_1*F_2$是 NBU-$[t_0,\infty)$的.

证明 由于 $F(t)=\int_0^\infty F_2(t-x)\mathrm{d}F(x)$,有

$$\overline{F}(x+y)=1-\int_0^\infty F_2(x+y-z)\mathrm{d}F_1(z)$$
$$=\int_0^x\overline{F}_2(x+y-z)\mathrm{d}F_1(z)+\int_x^\infty\overline{F}_2(x+y-z)\mathrm{d}F_1(z)$$
$$=\int_0^x\overline{F}_2(x+y-z)\mathrm{d}F_1(z)+\int_0^\infty\overline{F}_2(y-z)\mathrm{d}_zF_1(z+x).\quad(9)$$

F_2具有 NBU-$[t_0,\infty)$性,由(3),对所有 $x\geqslant 0,y\geqslant t_0$

$$\int_0^x\overline{F}_2(x+y-z)\mathrm{d}F_1(z)\leqslant\overline{F}_2(y)\int_0^x\overline{F}_2(x-z)\mathrm{d}F_1(z)$$
$$=\overline{F}_2(y)\{F_1(x)-\int_0^xF_1(z)\mathrm{d}\overline{F}_2(x-z)\}$$
$$=\overline{F}_2(y)\{F_1(x)-\int_0^xF_1(x-z)\mathrm{d}F_2(z)\}$$
$$=\overline{F}_2(y)\{\overline{F}(x)-\overline{F}_1(x)\}.\quad(10)$$

又 F_2是 NBU的,由(1)

$$\int_0^\infty\overline{F}_2(y-z)\mathrm{d}_zF_1(x+z)=-\overline{F}_2(y)F_1(x)-\int_0^\infty F_1(x+z)\mathrm{d}_z\overline{F}_2(y-z)$$
$$=\overline{F}_2(y)\overline{F}_1(x)-\int_0^\infty\overline{F}_1(x+z)\mathrm{d}_zF_2(y-z)$$
$$\leqslant\overline{F}_2(y)\overline{F}_1(x)-\overline{F}_1(x)\int_0^\infty\overline{F}_1(z)\mathrm{d}F_2(y-z)$$
$$=\overline{F}_2(y)\overline{F}_1(x)+\overline{F}_1(x)\{F_2(y)+\int_0^\infty F_2(y-z)\mathrm{d}\overline{F}_1(z)\}$$
$$=\overline{F}_2(y)\overline{F}_1(x)+\overline{F}_1(x)\{\overline{F}(y)-\overline{F}_2(y)\}.$$

利用(9),(10)和(11)即有,对 $x\geqslant 0,y\geqslant t_0$,

$$\overline{F}(x+y)\leqslant\overline{F}_2(y)\overline{F}(x)+\overline{F}_1(y)\overline{F}(y)-\overline{F}_2(y)\overline{F}_1(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{F}(y)\overline{F}(x) - \{\overline{F}(x) - \overline{F}_1(x)\}\{\overline{F}(y) - \overline{F}_2(y)\} \\
&\leqslant \overline{F}(y)\overline{F}(x).
\end{aligned}
$$

NBU对分布的混合不封闭,则 NBU-$[t_0,\infty)$对分布的混合也不封闭.

致谢: 对中山大学数学系胡建勋教授在资料方面的慷慨帮助表示感谢!

参 考 文 献

[1] Barlow R E, Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing: Probability models[M]. To Begin with, Silver Spring, MD. 1981.

[2] Marshall A W, Proschan F. Classes of life distributions applicable in replacement, with renewal theory implications[A]. Lecam L, *et al*. Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, vol I [C]. Berkeley, Calif: Univeristy of California Press, 1972. 395~415.

[3] Hollander M, Park D H, Proschan F. A class of life distributions for aging[J]. Journal of American Statistical Association, 1986, 81(393): 91~95.

[4] Reneau D M, Samaniego F G, Boyles R A. Estimating a survival curve when new is better than used with respect to a distinguished set[J]. Naval Research Logistics, 1991, 38: 123~144.

[5] Ross S M. Stochastic process[M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.

Shocks Model Leads to NBU-$[t_0,\infty)$ Life Distributions

Li Xiaohu, *Su Zhiyong*

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China)

Abstract A kind of delayed Poisson shocks model is introduced to produce NBU-$[t_0,\infty)$ life distributions; This generalizes the result is that Poisson shocks model leads to the well known NBU life distribution. Some relations between the NBU-$[t_0,\infty)$, on the one hand and the known NBU, NBU-t_0 class of life distributions on the other are discussed. Furthermore, the preservation properties under the coherent system, and the convolution property between NBU and NBU-$[t_0,\infty)$ elements are also discussed in great detail.

Key words life distributions; NBU-$[t_0,\infty)$; Poisson process; convolution

MR(1991) Subject Classification 62E10