第 41 卷第 4 期　　兰州大学学报(自然科学版)　　Vol. 41 No. 4
2005 年 8 月　　Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)　　Aug. 2005

文章编号: 0455-2059(2005)04-0112-04

二元反平均剩余寿命的一些性质

徐茂超, 李效虎

(兰州大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730000)

摘　要: 将反向的平均剩余寿命推广到了二元的版本, 并研究了其联合分布函数与二元反平均剩余寿命的联系, 同时还给出了其比例模型的重要性质.

关键词: 二元反平均剩余寿命; 二元反失效率; 比例模型

中图分类号: O212.2　　　　**文献标识码:** A

设X是非负随机变量, 在可靠性理论中, 通常把X考虑为元件的寿命, 并用$t-X \mid X \le t$表示元件在$t>0$时刻的反剩余寿命, 平均值$E[t-X \mid X \le t]$称为反平均剩余寿命. 近年来, 由于反平均剩余寿命在生存分析、可靠性理论、维修策略等众多应用概率领域扮演越来越重要的角色, 众多研究者纷纷致力于相关领域的研究[1, 2]. 在可靠性理论中, 对一元概念的多元化是一个很重要的研究领域, 因为其为多元件的复杂系统提供了理论依据. 特别是一元年龄概念的二元版本方面的研究尤为丰富.

本文关注于一元反平均剩余寿命的二元推广. 第1节, 引入二元反平均剩余寿命的概念并考察其和联合分布函数、二元反失效率的联系; 第2节, 考察了二元反平均剩余寿命的基本性质; 第3节, 给出一个函数为二元反平均剩余寿命函数的充分必要条件; 最后, 研究其比例模型的性质.

1　定义

假定$\boldsymbol{X}=(X_1, X_2)$为非负随机向量, 且在第一象限$\{(x_1, x_2): x_i \ge 0, i=1, 2\}$具有绝对连续联合分布函数. 定义$\boldsymbol{X}$的二元反平均剩余寿命为

$$m(\boldsymbol{t})=(m_1(\boldsymbol{t}), m_2(\boldsymbol{t})),$$

这里

$$m_i(\boldsymbol{t})=E[t_i-X_i \mid \boldsymbol{X} \le \boldsymbol{t}], \quad i=1, 2, \tag{1}$$

$\boldsymbol{t}=(t_1, t_2)$是非负实向量, $\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}$表示$X_i \le x_i$, $i=1, 2$. 用$F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$, $F(\cdot)$ 分别表示X_1, X_2和$\boldsymbol{X}$的分布函数, 由(1)式得到

$$m_i(\boldsymbol{t})=\int_0^{t_i} P(X_1 \le x_1 \mid X_1 \le t_1, X_2 \le t_2)\mathrm{d}x_1, \quad i=1, 2,$$

即

$$m_1(\boldsymbol{t})F(\boldsymbol{t})=\int_0^{t_1} F(x_1, t_2)\mathrm{d}x_1, \tag{2}$$

$$m_2(\boldsymbol{t})F(\boldsymbol{t})=\int_0^{t_2} F(t_1, x_2)\mathrm{d}x_2. \tag{3}$$

分别对(2), (3)式中的t_1和t_2微分得到

$$\frac{\partial \log F(\boldsymbol{t})}{\partial t_1}=\left(1-\frac{\partial m_1(\boldsymbol{t})}{\partial t_1}\right)\frac{1}{m_1(\boldsymbol{t})}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \log F(\boldsymbol{t})}{\partial t_2}=\left(1-\frac{\partial m_2(\boldsymbol{t})}{\partial t_2}\right)\frac{1}{m_2(\boldsymbol{t})}. \tag{5}$$

利用梯度算子处理这两个微分方程,

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}\right),$$

则(4)式和(5)式可表示为

$$\nabla(\log F(\boldsymbol{t})) = ((1-\frac{\partial m_1(\boldsymbol{t})}{\partial t_1})\frac{1}{m_1(\boldsymbol{t})}, (1-\frac{\partial m_2(\boldsymbol{t})}{\partial t_2})\frac{1}{m_2(\boldsymbol{t})}).$$

由$(\infty, \infty) \to (\infty, t_2) \to (t_1, t_2)$积分,

$$\begin{aligned}\log F(\boldsymbol{t}) &= -\int_{t_1}^{\infty}(1-\frac{\partial m_1(x_1, t_2)}{\partial x_1})\frac{\mathrm{d}x_1}{m_1(x_1, t_2)} - \int_{t_2}^{\infty}(1-\frac{\partial m_2(\infty, x_2)}{\partial x_2})\frac{\mathrm{d}x_2}{m_2(\infty, x_2)} \\ &= \log\frac{m_1(\infty, t_2)m_2(\infty, \infty)}{m_1(t_1, t_2)m_2(\infty, t_2)} - \int_{t_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_1}{m_1(x_1, t_2)} - \int_{t_2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{m_2(\infty, x_2)}.\end{aligned}$$

因此

$$F(\boldsymbol{t})=\frac{m_1(\infty, t_2)m_2(\infty, \infty)}{m_1(t_1, t_2)m_2(\infty, t_2)}\exp\{-\int_{t_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_1}{m_1(x_1, t_2)} - \int_{t_2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{m_2(\infty, x_2)}\}. \tag{6}$$

收稿日期: 2003-12-04.

基金项目: 国家自然科学基金 (10201010) 和新世纪优秀人才计划资助项目.

作者简介: 徐茂超(1981-), 男, 硕士研究生.

由 $(\infty,\infty)\to(t_1,\infty)\to(t_1,t_2)$ 积分,

$$F(t)=\frac{m_1(\infty,\infty)m_2(t_1,\infty)}{m_2(t_1,t_2)m_1(t_1,\infty)}\exp\{-\int_{t_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_1}{m_1(x_1,\infty)}-\int_{t_2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{m_2(t_1,x_2)}\}\tag{7}$$

同样成立.

Roy[3] 引入了以下二元反失效率

$$r(t)=(r_1(t),r_2(t))=(\frac{\partial\log F(t)}{\partial t_1},\frac{\partial\log F(t)}{\partial t_2}).$$

由 (4) 式和 (5) 式

$$r_1(t)=\left(1-\frac{\partial m_1(t)}{\partial t_1}\right)\frac{1}{m_1(t)},$$

$$r_2(t)=\left(1-\frac{\partial m_2(t)}{\partial t_2}\right)\frac{1}{m_2(t)}.$$

因此, 由 (6) 式和 (7) 式,

$$\begin{aligned}F(t)&=\exp\{-\int_{t_1}^{\infty}r_1(x_1,t_2)\mathrm{d}x_1-\int_{t_2}^{\infty}r_2(\infty,x_2)\mathrm{d}x_2\}\\&=\exp\{-\int_{t_1}^{\infty}r_1(x_1,\infty)\mathrm{d}x_1-\int_{t_2}^{\infty}r_2(t_1,x_2)\mathrm{d}x_2\}.\end{aligned}$$

2　基本性质

(1) 定义第 i 个元件的反平均剩余寿命为

$$m_i(t_i)=E[t_i-X_i\mid X_i\le t_i],\quad i=1,2,$$

则 $m_i(t)=m_i(t_i)$, $i=1,2$, 当且仅当 X_1 和 X_2 相互独立.

实际上, 如果 X_1 和 X_2 相互独立, 由 (1) 式和 (2) 式,

$$m_1(t)F_1(t_1)F_2(t_2)=F_2(t_2)\int_0^{t_1}F_1(x_1)\mathrm{d}x_1.$$

因此

$$m_1(t)=\frac{\int_0^{t_1}F_1(x_1)\mathrm{d}x_1}{F_1(t_1)}=m_1(t_1).$$

相反, 如果 $m_i(t)=m_i(t_i)$, $i=1,2$. 由 (6) 式, 以下表达式成立,

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{m_1(\infty)}{m_1(t_1)}\exp\{-\int_{t_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_1}{m_1(x_1)}\}\\&\quad\cdot\frac{m_2(\infty)}{m_2(t_2)}\exp\{-\int_{t_2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{m_2(x_2)}\}\\&=F_1(t_1)F_2(t_2).\end{aligned}$$

因此, X_1 和 X_2 相互独立.

(2) 在 (2), (3) 式中分别让 $t_1\to\infty$, $t_2\to\infty$, 很容易得到一元的反平均剩余寿命.

$$m_1(t_1,\infty)=\frac{\int_0^{t_1}F_1(x_1)\mathrm{d}x_1}{F_1(t_1)}=m_1(t_1),$$

$$m_2(\infty,t_2)=\frac{\int_0^{t_2}F_2(x_2)\mathrm{d}x_2}{F_2(t_2)}=m_2(t_2).$$

(3) 随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2)$ 或其分布函数称为二元反失效率递减. 如果 $r_i(t)$ 关于 $t_i\ge0$ 递减, 二元反平均剩余寿命递增; 如果 $m_i(t)$ 关于 $t_i\ge0$ 递增, 二元反失效率递减, 暗含着二元反平均剩余寿命递增.

如果 $r_1(t)$ 关于 $t_1\ge0$ 递减, 那么 $r_1(t_1-x,t_2)\ge r_1(t_1,t_2)$, 对 $x\ge0$. 即

$$\frac{\partial F(t_1-x,t_2)/\partial t_1}{F(t_1-x,t_2)}\ge\frac{\partial F(t_1,t_2)/\partial t_1}{F(t_1,t_2)},$$

等价的

$$\frac{\partial F(t_1-x,t_2)/\partial t_1}{F(t_1,t_2)}-F(t_1-x,t_2)\frac{\partial F(t_1,t_2)/\partial t_1}{F^2(t_1,t_2)}\ge0,$$

这暗含着

$$\frac{\partial\left(F(t_1-x,t_2)/F(t_1,t_2)\right)}{\partial t_1}\ge0.$$

所以 $F(t_1-x,t_2)/F(t_1,t_2)$ 关于 t_1 递增, 则

$$\int_0^{\infty}\frac{F(t_1-x,t_2)}{F(t_1,t_2)}\mathrm{d}x=m_1(t)$$

关于 t_1 递增. 运用同样的方法, 能够得到 $m_2(t)$ 关于 t_2 递增.

(4) 不存在 $m(t)$ 单降的非负随机向量 $\boldsymbol{X}$, 这里 $m(t)$ 单降指的是 $m_i(t)$ 关于 t_i, $(i=1,2)$ 单降.

由 (2) 式得

$$m_1(t)=\int_0^{\infty}\frac{F(x_1,t_2)}{F(t_1,t_2)}\mathrm{d}x_1\le t_1.$$

如果 $m_1(t)$ 关于 t_1 递减, 因为 $m_1(0,t_2)=0$, 所以, 对所有的 $t_1>0$, $m_1(t)<0$. 而事实上 $m_1(t)$ 不能为负, 相似的, $m_2(t)$ 不能关于 t_2 递减.

3　充分必要条件

Kulkarni 等[4]研究了二元绝对连续随机向量的平均剩余寿命并给出了一个函数为二元平均剩余寿命函数的充分必要条件. 平行的, 本文给出一个函数为二元反平均剩余寿命函数的充分必要条件.

(1) 假定

(a) 所考察的联合分部函数为绝对连续的;

(b) $F(\infty,\infty)=1$.

(2) 让

(a) $m(t)\equiv(m_1(t),m_2(t))$ 为定义在 $[0,\infty)^2$ 上的非负连续向量函数且 $m(\infty,\infty)$ 有界;

(b)

$$(w_1,w_2)\equiv((1-\frac{\partial m_1(t)}{\partial t_1})\frac{1}{m_1(t)},(1-\frac{\partial m_2(t)}{\partial t_2})\frac{1}{m_2(t)});$$

(c) $\Phi(\mu,t;j)\equiv\int_{\mu}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_j}{m_j(x_j,t)}$.

则 $m(t)$ 为二元反平均剩余寿命函数当且仅当以下条件成立:

(a) $\frac{\partial w_1}{\partial t_2}\equiv\frac{\partial w_2}{\partial t_1}$;

(b) $\lim\limits_{\mu\to 0}\Phi(\mu, \boldsymbol{t}; j) = \infty$, 对所有的 $\boldsymbol{t} \geq 0$, $j = 1, 2$;

(c) $\lim\limits_{t_j\to 0}(\frac{1}{m_1(\boldsymbol{t})}\exp\{\Phi(t_j, \boldsymbol{t}; j)\})$, 对所有的 $\boldsymbol{t} \geq 0$, $(j = 1, 2)$ 存在;

(d) 对所有的 $\boldsymbol{t} \geq 0$, $w_1w_2 + \frac{\partial w_1}{\partial t_2} \geq 0$.

证明与文献[4]类似, 故略去.

4 比例模型

因为二元反平均剩余寿命是一元的推广, 因此我们希望二元反平均剩余寿命能够保持一元的结构, 也就是 $m_i(\boldsymbol{t})$ 和 $m_i(t_i)$ $(i = 1, 2)$ 成比例, 这里比例常数 $k_i(x_{3-i})$ 与 x_{3-i} $(i = 1, 2)$ 有关. 从以上考虑有以下结论.

定理 1 如果二元反平均剩余寿命与其对应的一元反平均剩余寿命成比例, 则其联合分布函数具有形式

$$F(t_1, t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2)\exp\{-\gamma A_1(t_1)A_2(t_2)\},$$

这里 $0 \leq \gamma \leq 1$, $A_i(t_i) = \int_{t_i}^{\infty} 1/m_i(x_i)\mathrm{d}x_i$, $i = 1, 2$.

证明 假定

$$m_1(\boldsymbol{t}) = k_1(t_2)m_1(t_1),$$
$$m_2(\boldsymbol{t}) = k_2(t_1)m_2(t_2).$$

让 $c_i(t_{3-i}) = 1/k_i(t_{3-i})$, $i = 1, 2$, 由 (6) 式和 (7) 式, 得

$$F(\boldsymbol{t}) = \frac{m_1(\infty)m_2(\infty)}{m_1(t_1)m_2(t_2)}\exp\{-c_1(t_2)A_1(t_1) - c_2(\infty)A_2(t_2)\}, \tag{8}$$

$$F(\boldsymbol{t}) = \frac{m_1(\infty)m_2(\infty)}{m_1(t_1)m_2(t_2)}\exp\{-c_1(\infty)A_1(t_1) - c_2(t_1)A_2(t_2)\}. \tag{9}$$

比较 (8) 式和 (9) 式, 下面等式成立,

$$c_1(t_2)A_1(t_1) + c_2(\infty)A_2(t_2) = c_1(\infty)A_1(t_1) + c_2(t_1)A_2(t_2).$$

因为 $c_i(\infty) = 1$, $i = 1, 2$, 得到

$$c_1(t_2)A_1(t_1) + A_2(t_2) = A_1(t_1) + c_2(t_1)A_2(t_2).$$

因为等式左边关于 $A_2(t_2)$ 是线性的, 所以右边也应该关于 $A_2(t_2)$ 是线性的,

$$c_2(t_1) = \alpha + \gamma A_1(t_1). \tag{10}$$

当 $t_1 \to \infty$ 时, $c_2(t_1) = 1$ 和 $A_1(t_1) = 0$, 因此 $\alpha = 1$. 化简 (9) 式得到,

$$F(\boldsymbol{t}) = \frac{m_1(\infty)}{m_1(t_1)}\exp\{-A_1(t_1)\}\frac{m_2(\infty)}{m_2(t_2)} \cdot \exp\{-A_2(t_2)\}\exp\{-\gamma A_1(t_1)A_2(t_2)\}$$
$$= F_1(t_1)F_2(t_2)\exp\{-\gamma A_1(t_1)A_2(t_2)\}.$$

注 如果 $\gamma < 0$ $(\gamma > 1)$, 由 (10) 式, 得 $c_2(t_1) < 1$ $(c_2(t_1) > 1)$, 这与 $t_1 \to \infty$, $c_2(t_1) = 1$ 矛盾, 因此, $\gamma \geq 0$ $(\gamma \leq 1)$. 如果 $\gamma = 0$, 则

$$F(t_1, t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2),$$

这表明了 X_1 和 X_2 是相互独立的.

推论 1 在定理 1 的条件下, X_1 和 X_2 分别为单增的反剩余寿命当且仅当其联合分布为二元的单增反剩余寿命.

证明 由定理 1, 得 $m_i(\boldsymbol{t}) = k_i(t_{3-i})m_i(t_i)$, 因此 $m_i(t_i)$ 关于 t_i 递增当且仅当 $m_i(\boldsymbol{t})$ 关于 t_i $(i = 1, 2)$ 递增, 结论得证.

推论 2 在定理 1 的条件下, 如果 X_1 和 X_2 都具有单降的反失效率性质, 则由这两个元件组成的并联系统同样具有单降的反失效率性质.

证明 用 Z 代表元件 X_1 和 X_2 组成的并联系统的寿命, 其分布函数为

$$F(z) = P(X_1 \leq z, X_2 \leq z)$$
$$= F_1(z)F_2(z)\exp\{-\gamma A_1(z)A_2(z)\}.$$

当 X_i 具有单降的反失效率性质, 并且

$$A_i(z) = \int_z^{\infty}\frac{\mathrm{d}x_i}{m_i(x_i)},$$

有

$$r(z) = \frac{f_1(z)}{F_1(z)} + \frac{f_2(z)}{F_2(z)} + \gamma\left(\frac{A_2(z)}{m_1(z)} + \frac{A_1(z)}{m_2(z)}\right)$$

关于 z 递减. 因此, $Z = \max\{X_1, X_2\}$ 同样具有单降的反失效率性质.

现在考察 $m_1(\boldsymbol{t})$ 和 $m_2(\boldsymbol{t})$ 成比例时的情况.

定理 2 $m_1(\boldsymbol{t}) = cm_2(\boldsymbol{t})$ 当且仅当

$$F(t_1, t_2) = \exp\{g(t_1 + ct_2)\},$$

这里常数 $c > 0$, $g(\infty) = 0$ 且 g 递增.

证明 必要性 如果 $m_1(\boldsymbol{t}) = cm_2(\boldsymbol{t})$, 由 (3) 式和 (4) 式得

$$\int_0^{t_1}F(x_1, t_2)\mathrm{d}x_1 = c\int_0^{t_2}F(t_1, x_2)\mathrm{d}x_2. \tag{11}$$

对 (11) 式关于 t_1 微分, 得到

$$F(\boldsymbol{t}) = c\int_0^{t_2}\frac{\partial F(t_1, x_2)}{\partial t_1}\mathrm{d}x_2$$
$$= c\int_0^{t_2}\frac{\partial P(x \leq t_1 \mid X_2 \leq x_2)}{\partial t_1}P(X_2 \leq x_2)\mathrm{d}x_2$$
$$= c\int_0^{t_2}f(t_1 \mid X_2 \leq x_2)P(X_2 \leq x_2)\mathrm{d}x_2.$$

对两边关于 t_2 微分,

$$\frac{\partial F(t_1, t_2)}{\partial t_2} = cf(t_1 \mid X_2 \leq t_2)P(X_2 \leq t_2).$$

则

$$f(t_2 \mid X_1 \le t_1)P(X_1 \le t_1) = cf(t_1 \mid X_2 \le t_2)P(X_2 \le t_2).$$

等价的,

$$\frac{f(t_2 \mid X_1 \le t_1)}{P(X_2 \le t_2 \mid X \le t_1)} = c\frac{f(t_1 \mid X_2 \le t_2)}{P(X \le t_1 \mid X_2 \le t_2)},$$

即 $r_2(\boldsymbol{t}) = cr_1(\boldsymbol{t})$. 注意到

$$\frac{\partial \log F(\boldsymbol{t})}{\partial t_2} = c\frac{\partial \log F(\boldsymbol{t})}{\partial t_1}. \tag{12}$$

用 $u(t_1, t_2)$ 代表 $\log F(\boldsymbol{t})$, 则 (12) 式可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = c\frac{\partial u}{\partial t_1}. \tag{13}$$

让 $x = t_1 + ct_2$ 和 $v = t_2$, (13) 式化简为

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0,$$

其解由下式给出

$$u(t_1, t_2) = g(x) = g(t_1 + ct_2).$$

因此

$$F(t_1, t_2) = \exp\{g(t_1 + ct_2)\}.$$

因为 $F(\infty, \infty) = 1$, 有 $g(\infty) = 0$, 由于 $F(t_1, t_2)$ 为联合分布函数, 所以 g 递增.

充分性 如果 $F(t_1, t_2) = \exp\{g(t_1 + ct_2)\}$, 由以上证明, 仅需证明

$$\frac{\partial \log F(\boldsymbol{t})}{\partial t_2} = c\frac{\partial \log F(\boldsymbol{t})}{\partial t_1},$$

这是很容易的, 结论得证.

参 考 文 献

[1] Finkelstein M S. On the reversed hazard rate[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2002, 78(1): 71-75.

[2] Asok K Nanda, Harshinder Singh, Neeraj Misra, *et al*. Reliability properties of reversed residual lifetime[J]. Communications in Statistics Theory and Methods, 2003, 32(10): 2031-2042.

[3] Dilip Roy. A characterization of model approach for generating bivariate life distributions using reversed hazard rates[J]. J Japan Statist Soc, 2002, 32(2): 239-245.

[4] Kulkarni H V, Rattihalli R N. Characterization of bivariate mean residual life[J]. IEEE Trans Reliability, 1996, 45(2): 249-253.

Some characteristics of bivariate reversed mean residual life length

XU Mao-chao, LI Xiao-hu

(School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou, 730000, China)

Abstract: The reversed mean residual life (RMRL) has drawn attention from many researchers in the past decade. In this paper, an extension of the concept to the bivariate case is introduced and the relationship between the joint distribution function and bivariate RMRL (BRMRL) is established. Some important properties about the proportional models are investigated as well.

Key words: BRMRL; BRHR; proportional model

AMS Subject Classifications(2000): 60E05; 62N05