文章编号: 0455-2059(2006)02-0102-04

有关加速寿命模型的几个新结论

邱国新[1,2], 李效虎[1]
(1. 兰州大学 数学与统计学院, 甘肃 兰州 730000;
2. 中国人民解放军炮兵学院 基础部, 安徽 合肥 230031)

摘　要: 建立了DRHR, NBUFR和NBUFRA这3个年龄性质在加速寿命模型中封闭的充分条件. 通过研究加速后的寿命和被加速寿命之间的随机比较, 讨论了加速寿命模型中的加速因子对加速效果的影响.

关键词: 随机序; DRHR; NBUFR; NBUFRA

中图分类号: O212.2　　　　**文献标识码**: A

在可靠性理论以及其他一些领域中, 人们常常通过随机比较的方法来研究两个分布之间的关系, 由此而得出的研究结果也极其丰富多彩, SHAKED 等[1]和 BARLOW 等[2]论述了这方面的绝大部分结论. 考虑两个分布之间的距离是研究两个分布之间关系的另一个主要途径, ZOLOTAREV[3]和 FINKELSTEIN[4]就给出了不少很有价值的距离定义. 与以上两种研究途径完全不同, COX[5]通过一个被称作时间相依的尺度变换 $W(x)$ 作为桥梁, 提出如下的加速寿命模型 (ALM) 来研究两个分布之间的关系:

$$G(x) = F(W(x)), \tag{1}$$

其中 $F(x)$ 是元件在正常工作环境下的寿命分布, 其对应的随机变量可以记为 X; 加速因子 $W(x)(W(0)=0)$ 是一个单调递增函数, 且当 $x\to\infty$ 时, $W(x)\to\infty$. 这样, 通过 (1) 式得到的 $G(x)$ 就可视作元件在更恶劣环境下的寿命分布, 此时的寿命记为 Y. 通常还可以进一步假设 $W(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续可微,

$$W(x)=\int_0^x w(u)\mathrm{d}u,\quad 0<w(x)<\infty.$$

对于加速寿命模型, 研究它的加速因子 $W(x)$ 或其导数 $w(x)$ 对加速寿命的影响是很有意义的. FINKELSTEIN[6]揭示: IFR(IFRA, NBU) 类寿命分布在加速寿命模型中封闭的充分条件是 $W(x)$ 是凸的 (星型的, 超可加的) 变换. 另外, 本文还证明了 Y 依通常意义的随机序小于 X (记作 $Y\le_{\rm st}X$) 的充要条件是 $W(x)\ge x$.

本文第1节给出了一些寿命分布类和一些随机序的定义, 这些定义在本文的主要结论中都将用到. 第2节讨论DRHR, NBUFR以及NBUFRA类寿命分布在加速寿命模型中封闭时, $W(x)$ 或 $w(x)$ 该满足的条件. 基于 $W(x)$, 第3节建立 $G(x)$ 与 $F(x)$ 的一些随机比较.

本文所讨论的随机变量都是非负的, 并且以0为共同的左支撑点. 术语"递增(递减)"表示"单调非减(单调非增)"的含义.

1　基本定义

设 X 和 Y 是两个表示系统或元件寿命的非负随机变量, 其分布函数分别是 F, G, 生存函数分别是 $\overline{F}=1-F$, $\overline{G}=1-G$. 当 X 和 Y 绝对连续时, 记其密度函数分别是 f 和 g, 于是 X 和 Y 的失效率 $r_F(x)$ 和 $r_G(x)$、反向失效率 $\tilde{r}_F(x)$ 和 $\tilde{r}_G(x)$、平均剩余寿命函数 $\mu_F(x)$ 和 $\mu_G(x)$ 分别是

$$r_F(x)=\frac{f(x)}{\overline{F}(x)},\quad r_G(x)=\frac{g(x)}{\overline{G}(x)};$$

$$\tilde{r}_F(x)=\frac{f(x)}{F(x)},\quad \tilde{r}_G(x)=\frac{g(x)}{G(x)};$$

$$\mu_F(x)=\int_0^\infty\frac{\overline{F}(t+x)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}t,$$

$$\mu_G(x)=\int_0^\infty\frac{\overline{G}(t+x)}{\overline{G}(x)}\mathrm{d}t.$$

下面定义1中的3个寿命分布类将在本文的第2节被研究.

定义1　(1) 若对所有的 $x\ge0$, 不等式 $r_F(0)\le r_F(x)$ 成立, 则称 X 或者 $\overline{F}$ 是 NBUFR (New better

收稿日期: 2004-09-02.　**修改稿收到日期**: 2005-06-01.

基金项目: 国家自然科学基金(10201010)和兰州大学青年行动基金资助项目.

作者简介: 邱国新(1971-), 男, 安徽桐城人, 讲师, 硕士, 研究方向为可靠性理论及其应用, e-mail: qiugx02@st.lzu.edu.cn.

than used in failure rate) 的;

(2) 若对所有的 $x \geq 0$, 不等式

$$r_F(0) \leq \frac{1}{x}\int_0^x r_F(u)\mathrm{d}u = \frac{-\log \overline{F}(x)}{x}$$

成立, 则称 X 或者 $\overline{F}$ 是 NBUFRA (New better than used in failure rate average) 的;

(3) 若对所有的 $x \geq 0$, $\tilde{r}_F(x)$ 都是递减的, 则称 X 或者 $\overline{F}$ 是 DRHR (Decreasing reversed hazard rate) 的.

改变定义 1 (1), (2) 中的不等号方向便得到与 NBUFR 和 NBUFRA 分别对偶的两个寿命分布类, 即 NWUFR (New worse than used in failure rate) 和 NWUFRA (New worse than used in failure rate average) 的定义.

下面的定义 2 是对 NBUFR, NBUFRA 以及其他一些寿命分布类所对应的年龄性质的一种二元推广, BARLOW[2], KOCHAR[7] 等通过此定义来比较两个不同分布之间年龄性质的强弱.

定义 2 (1) 若对所有的 $x \geq 0$, $F^{-1}G(x)$ 都是凸的, 则称 Y 依 IFR 序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm c} X$);

(2) 若对所有的 $x \geq 0$, $F^{-1}G(x)$ 都是星形的, 则称 Y 依 IFRA 序小于 X (记为 $Y \leq_{*} X$);

(3) 若对所有的 $x \geq 0$, $F^{-1}G(x)$ 都是超可加的, 则称 Y 依 NBU 序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm su} X$);

(4) 若对所有的 $x \geq 0$,

$$\frac{\mu_G(x)}{\mu_F(F^{-1}G(x))} \leq \frac{\mu_G(0)}{\mu_F(0)}$$

成立, 则称 Y 依 NBUE 序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm NBUE} X$);

(5) 若对所有的 $x \geq 0$, $[F^{-1}G(x)]' \geq (F^{-1}G)'(0)$ 成立, 则称 Y 依 NBUFR 序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm NBUFR} X$);

(6) 若对所有的 $x \geq 0$, $F^{-1}G(x) \geq x\cdot(F^{-1}G)'(0)$ 成立, 则称 Y 依 NBUFRA 序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm NBUFRA} X$).

定义 3 (1) 若对所有的 $p \in (0,1)$, 不等式

$$\int_0^{G^{-1}(p)} G(u)\mathrm{d}u \leq \int_0^{F^{-1}(p)} F(u)\mathrm{d}u$$

成立, 则称 Y 依位置独立风险序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm lir} X$);

(2) 若对所有的凸函数 $\varphi(x)$, 不等式 $E(\varphi(Y-EY)) \leq E(\varphi(X-EX))$ 成立, 则称 Y 依膨胀序小于 X (记为 $Y \leq_{\rm dil} X$).

定义 3 中这两个随机序的有关性质和应用可参阅文献 [8 ~ 10].

2 DRHR, NBUFR 和 NBUFRA 的封闭性

当 $W(x)$ 是凸的, FINKELSTEIN[6] 证明了 $G(x)$ 可继承 $F(x)$ 的 IFR 性. 作为本文的第一个重要结论, 下面的定理 1 说明, 在 $W(x)$ 具有凹性的条件下, $G(x)$ 可继承 $F(x)$ 的 DRHR 性.

定理 1 若 $F(x)$ 是 DRHR 的, 且对所有的 $x \geq 0$, $W(x)$ 是凹的, 则 $G = F(W(x))$ 也是 DRHR 的.

证明 首先注意到下面的等式

$$\tilde{r}_G(x) = \frac{g(x)}{G(x)} = \frac{f(W(x))w(x)}{F(W(x))} = \tilde{r}_F(W(x))w(x).$$

因 $W(x)$ 是凹的, 所以 $w(x)$ 是递减的. 这样, 所要证的结论由 $W(x)$ 递增性和 F 是 DRHR 的假设易得.

下面的两个定理是揭示 NBUFR (NWUFR) 和 NBUFRA (NWUFRA) 封闭的条件.

定理 2 (a) 若 $F(x)$ 是 NBUFR 的, 且对所有的 $x \geq 0$, $w(x) \geq w(0)$, 则 $G = F(W(x))$ 也是 NBUFR 的;

(b) 若 $F(x)$ 是 NWUFR 的, 且对所有的 $x \leq 0$, $w(x) \leq w(0)$, 则 $G = F(W(x))$ 也是 NWUFR 的.

证明 (a) 由 (1) 式不难推得

$$\exp[-\int_0^x r_G(u)\mathrm{d}u] = \exp[-\int_0^{W(x)} r_F(u)\mathrm{d}u].$$

这也就是说,

$$\int_0^x r_G(u)\mathrm{d}u = \int_0^{W(x)} r_F(u)\mathrm{d}u.$$

对上式两边关于 x 求微分得

$$r_G(x) = w(x) r_F(W(x)). \tag{2}$$

因为 X 是 NBUFR 的, $r_F(W(x)) \geq r_F(0)$. 于是,

$$\begin{aligned} r_G(x) &= w(x) r_F(W(x)) \\ &\geq w(0) r_F(W(x)) \geq w(0) r_F(0) = r_G(0). \end{aligned}$$

从而 $\phi(X)$ 也是 NBUFR 的.

(b) 同理可证.

定理 3 (a) 若 $F(x)$ 是 NBUFRA 的, 且对所有的 $x \geq 0$, $W(x) \geq xw(0)$, 则 $G = F(W(x))$ 也是 NBUFRA 的;

(b) 若 $F(x)$ 是 NWUFRA 的, 且对所有的 $x \leq 0$, $W(x) \leq xw(0)$, 则 $G = F(W(x))$ 也是 NWUFRA 的.

证明 (a) $F(x)$ 是 NBUFRA 的, 所以

$$\frac{1}{W(x)}\int_0^{W(x)} r_F(u)\mathrm{d}u \geq r_F(0) \geq \frac{xw(0)}{W(x)} r_F(0),$$

从而

$$\frac{1}{x}\int_0^{W(x)} r_F(u)\mathrm{d}u \geq w(0) r_F(0).$$

令 $u = W(t)$, 则

$$\frac{1}{x}\int_0^x r_F(W(t))\mathrm{d}W(t) \geq w(0) r_F(0).$$

上式等价于

$$\frac{1}{x}\int_0^x w(t)r_F(W(t))\mathrm{d}t \ge w(0)r_F(0).$$

于是根据(2)式有

$$\frac{1}{x}\int_0^x r_G(t)\mathrm{d}t \ge r_G(0),$$

即$G = F(W(x))$是NBUFRA的;

(b) 同理可证.

当$F(x)$服从指数分布时, 定理2和定理3中的充分条件可改为充分必要条件, 这就是下面的推论1和推论2.

推论1 (a) 若$F(x)$服从参数为λ的指数分布, 则$G = F(W(x))$是NBUFR的充要条件是对所有的$x \ge 0$, $w(x) \ge w(0)$;

(b) 若$F(x)$服从参数为λ的指数分布, 则$G = F(W(x))$是NWUFR的充要条件是对所有的$x \ge 0$, $w(x) \le w(0)$.

证明 (a) 因指数分布的失效率恒等于λ, 所以, 在注意到下面的事实后, 结论是显然的.

$$r_G(x) = w(x)r_F(W(x)) = w(x)\lambda \ge w(0)\lambda = r_G(0).$$

(b) 同理可证.

推论2 (a) 若$F(x)$服从参数为λ的指数分布, 则$G = F(W(t))$是NBUFRA的充要条件是对所有的$x \ge 0$, $W(x) \ge xw(0)$;

(b) 若$F(x)$服从参数为λ的指数分布, 则$G = F(W(t))$是NWUFRA的充要条件是对所有的$x \ge 0$, $W(x) \le xw(0)$.

证明 (a) 在$F(x)$服从参数为λ的指数分布情况下, $G = F(W(t))$属于NBUFRA等价于

$$\frac{1}{x}\int_0^x w(t)\lambda\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x r_G(t)\mathrm{d}t \ge r_G(0) = w(0)\lambda.$$

上式化简得$\frac{1}{x}\int_0^x w(t)\mathrm{d}t \ge w(0)$, 即$W(x) \ge xw(0)$.

(b) 同理可证.

3 加速寿命模型中的随机比较

本节中首先通过尺度变换$W(x)(w(x))$来刻画定义2中几个随机序.

注意到

$$F^{-1}G(x) = F^{-1}F(W(x)) = F^{-1}FW(x) = W(x),$$

所以下面的定理4轻松得证.

定理4 (a) 若对所有的$x \ge 0$, $W(x)$是凸的, 则$Y \le_{\mathrm{c}} X$;

(b) 若对所有的$x \ge 0$, $W(x)$是星形的, 则$Y \le_{*} X$;

(c) 若对所有的$x \ge 0$, $W(x)$是超可加的, 则$Y \le_{\mathrm{su}} X$;

(d) 若对所有$x \ge 0$, $w(x) \ge w(0)$, 则$Y \le_{\mathrm{NBUFR}} X$;

(e) 若对所有的$x \ge 0$, $w(x) \ge w(0)x$, 则$Y \le_{\mathrm{NBUFRA}} X$;

(f) 若对所有的$x \ge 0$, $\frac{\mu_G(x))}{\mu_F(W(x))} \le \frac{\mu_G(0)}{\mu_F(0)}$, 则$Y \le_{\mathrm{NBUE}} X$.

FINKELSTEIN[6]发现$Y \le_{\mathrm{st}} X$的充要条件是$W(x) \ge x$. 下面两个定理讨论的是Y依位置独立风险序, 或者依膨胀序小于X的充分条件.

定理5 若$W(x) - x$是增凹的, 则$Y \le_{\mathrm{lir}} X$.

证明 首先注意到

$$\int_0^{F^{-1}(p)} F(x)\mathrm{d}x - \int_0^{W^{-1}F^{-1}(p)} F(W(x))\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{F^{-1}(p)} F(x)\mathrm{d}x - \int_0^{F^{-1}(p)} F(x)[W^{-1}(x)]'\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{F^{-1}(p)} F(x)[x - W^{-1}(x)]'\mathrm{d}x.$$

由$W(x) - x$的增凹性知, $x - W^{-1}(x)$也是增凹的, 所以$[x - W^{-1}(x)]'$是非负递减的. 由引理7.1 (b)[2]有

$$\int_0^{F^{-1}(p)} F(x)[x - W^{-1}(x)]'\mathrm{d}x \ge 0,$$

于是对所有的$p \in (0, 1)$,

$$\int_0^{G^{-1}(p)} G(x)\mathrm{d}x = \int_0^{W^{-1}F^{-1}(p)} F(W(x))\mathrm{d}x \le \int_0^{F^{-1}(p)} F(x)\mathrm{d}x,$$

这就是说$Y \le_{\mathrm{lir}} X$.

下面的引理1将被用来探求$Y \le_{\mathrm{dil}} X$的充分条件, 它的证明可参阅文献[8].

引理1 设F_1和F_2分别是具有有限均值的两个非负随机变量U和V的分布函数, 则$U \le_{\mathrm{dil}} V$的充要条件是

$$\frac{1}{1-p}\int_p^1 [F_1^{-1}(u) - F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}u \le \int_0^1 [F_1^{-1}(u) - F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}u, \quad p \in (0, 1).$$

定理6 $W(x) - x$是递增的, 则$Y \le_{\mathrm{dil}} X$.

证明 首先证明下式对任意的$t \ge 0$都成立.

$$\int_t^\infty [I(x \ge F^{-1}(p)) - (1-p)]f(x)\mathrm{d}x \ge 0, \quad p \in (0, 1), \tag{3}$$

其中$I(A)$是A的示性函数.

当$t \le F^{-1}(p)$时,

$$\int_t^\infty [I(x \ge F^{-1}(p)) - (1-p)]f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_t^\infty I(x \ge F^{-1}(p))f(x)\mathrm{d}x - \int_t^\infty (1-p)f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - (1-p)\overline{F}(t)$$
$$= \overline{F}(F^{-1}(p)) - (1-p)\overline{F}(t) = (1-p)F(t) \geq 0;$$

当$t \geq F^{-1}(p)$时,

$$\int_t^{\infty} [I(x \geq F^{-1}(p)) - (1-p)]f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_t^{\infty} I(x \geq F^{-1}(p))f(x)\mathrm{d}x - \int_t^{\infty}(1-p)f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_t^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - (1-p)\overline{F}(t)$$
$$= \overline{F}(t) - (1-p)\overline{F}(t) = p\overline{F}(t) \geq 0.$$

所以对任意的$t \geq 0$, (3)式都成立.

现在证明定理6的结论. 注意到

$$(1-p)\int_0^1 [G^{-1}(u) - F^{-1}(u)]\mathrm{d}u$$
$$- \int_p^1 [G^{-1}(u) - F^{-1}(u)]\mathrm{d}u$$
$$= (1-p)\int_0^1 [W^{-1}F^{-1}(u) - F^{-1}(u)]\mathrm{d}u$$
$$- \int_p^1 [W^{-1}F^{-1}(u) - F^{-1}(u)]\mathrm{d}u$$
$$= (1-p)\int_0^{\infty} [W^{-1}(x) - x]f(x)\mathrm{d}x$$
$$- \int_{F^{-1}(p)}^{\infty} [W^{-1}(x) - x]f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\infty} [W^{-1}(x) - x](1-p)f(x)\mathrm{d}x$$
$$- \int_0^{\infty} [W^{-1}(x) - x]I(x \geq F^{-1}(p))f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\infty} [W^{-1}(x) - x][(1-p) - I(x \geq F^{-1}(p))]f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\infty} [x - W^{-1}(x)][I(x \geq F^{-1}(p)) - (1-p)]f(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

由$W(x) - x$的递增性知, $x - W^{-1}(x)$也是非负递增的. 这样, 根据(3)式和引理7.1(a)[2]的结论, (4)是非负的, 从而定理得证.

参 考 文 献

[1] SHAKED M, SHANTHIKUMAR J. Stochastic Orders and Their Application[M]. Boston: Academic Press, 1994.

[2] BARLOW R, PROSCHAN F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Probability Model[M]. New York: Holt Rinehart and Winnston, 1981.

[3] ZOLOTAREV V M. Probability metrics[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1983, 28: 59-74.

[4] FINKELSTEIN M S. On some measures and distances for positive random variables[J]. Applied Stochastic Model in Business and Industry, 2003, 19(2): 133-146.

[5] COX D R, OAKES D. Analysis of Survival Data[M]. New York: Chapman and Hall, 1984.

[6] FINKELSTEIN M S. A note on some aging properties of the accelerated life model[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2001, 71(1): 109-112.

[7] KOCHAR C, WIENS P. Partial orderings of life distributions with respect to their aging properties[J]. Naval Research Logistics, 1987, 34(8): 823-829.

[8] FAGIOULI E, PELLEREY F, SHAKED M A. Characterization of dilation order and their applications[J]. Statistical Papers, 1999, 40(4): 393-406.

[9] BELZUNCE F, CANDEL J, RUIZ J M. Dispersive orderings and characterizations of aging classes[J]. Statistics and Probability Letters, 1996, 28(4): 321-327.

[10] BELZUNCE F, PELLEREY F, RUIZ J M, et al. The dilation order, the dispersion order, and orderings of residual lives[J]. Statistics and Probability Letters, 1997, 33(3): 263-275.

Some new results involving an accelerated life model

QIU Guo-xin[1,2], *LI Xiao-hu*[1]

(1. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;

2. Department of Basic Courses, Artillery College of PLA, Hefei 230031, China)

Abstract: Some closure properties of DRHR, NBUFR and NBUFRA classes of life distributions are studied under the accelerated life model. Stochastic comparisons between accelerated random lives and original random lives under this models are investigated as well.

Key words: stochastic order; DRHR; NBUFR; NBUFRA

AMS Subject Classifications(2000): 60E05; 62N05