View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

基于对偶分析的四阶矩 CAPM 基金分离定理

黄文彬[1], 郑振龙[2*]

(1. 福州大学数学系, 福建 福州 350002; 2. 厦门大学金融系, 福建 厦门 361005)

摘要: 根据 Kimball 的偏好理论假设投资者偏好奇数阶阶矩, 厌恶偶数阶阶矩, 利用证明得到的 3 个等式约束条件下的对偶引理, 最终得到四阶矩 CAPM 的基金分离形式和有效投资组合. 同时, 直观地给出一种特殊情形下的基金分离形式.

关键词: 对偶; 基金分离定理; 偏度; 峰度

中图分类号: O 22; F 83　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2010) 04-0457-05

均值-方差 CAPM 是金融领域最重要的资产定价理论模型之一, 但其系统性风险只考虑二阶矩风险即波动率, 忽略了高阶矩风险, 而金融资产特别是新兴市场的金融资产的对数收益常呈现不对称性和厚尾性, 一般不是正态分布. 国内外众多的实证研究发现均值-方差 CAPM 对于横截面收益数据的解释能力并不好, 存在严重的定价误差, 因此考虑收益分布的高阶矩如三阶矩偏度、四阶矩峰度是必要的[1-4]. 在三阶矩 CAPM 中, 投资者愿意对与市场具有正协偏度的资产付出风险溢价, 当收益分布具有正协偏度时, 投资者要求较低的收益. 对四阶矩 CAPM 的研究主要集中在实证模型对金融资产收益横截面数据的解释能力上, 但与之相关的理论基础(如基金分离定理)并不完善. 本文将通过对偶分析、最优化过程, 研究四阶矩 CAPM 基金分离定理, 并直观给出一种特殊情况下的基金分离形式.

1　预备知识

定义 1　设 R_f、$\overline{R}=(R_1, R_2, \cdots, R_N)^{\mathrm{T}}$ 和 x_0、$\overline{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_N)^{\mathrm{T}}$ 分别是无风险资产、风险资产的收益和投资比例且 $x_0+x_1+\cdots+x_N=1$. $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 分别表示超额收益向量和协方差矩阵, 定义 $N\times N^2$ 的协偏度矩阵 $\boldsymbol{M}_3$ 和 $N\times N^3$ 的协峰度矩阵 $\boldsymbol{M}_4$:

$$\boldsymbol{M}_3=E[(\overline{R}-E(\overline{R}))(\overline{R}-E(\overline{R}))^{\mathrm{T}}\otimes(\overline{R}-E(\overline{R}))^{\mathrm{T}}]=\{s_{ijk}\},$$

$$\boldsymbol{M}_4=E[(\overline{R}-E(\overline{R}))(\overline{R}-E(\overline{R}))^{\mathrm{T}}\otimes(\overline{R}-E(\overline{R}))^{\mathrm{T}}\otimes(\overline{R}-E(\overline{R}))^{\mathrm{T}}]=\{k_{ijkl}\}.$$

这里 $\otimes$ 代表克罗克内积. 其中:

$$s_{ijk}=E[(R_i-E(R_i))(R_j-E(R_j))(R_k-E(R_k))],\ i,j,k=1,2,\cdots,N,$$

$$k_{ijkl}=E[(R_i-E(R_i))(R_j-E(R_j))(R_k-E(R_k))(R_l-E(R_l))],\ i,j,k,l=1,2,\cdots,N.$$

定义 2　设投资组合的预期收益为 $E(R_p)$, 投资组合的方差 $\sigma^2(R_p)$、偏度 $\gamma^3(R_p)$ 与峰度 $\delta^4(R_p)$ 的定义如下:

$$\sigma^2(R_p)=\overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}=\overline{X}^{\mathrm{T}}\textstyle\sum_p,$$

$$\gamma^3(R_p)=\overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X}^{\mathrm{T}})=\overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{S}_p,$$

$$\delta^4(R_p)=\overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})=\overline{X}^{\mathrm{T}}\overline{K}_p,$$

其中:

$$\overline{\textstyle\sum}_p=E[(\overline{R}-E(\overline{R}))(R_p-E(R_p))]=\boldsymbol{M}_2\overline{X},$$

$$\overline{S}_p=E[(\overline{R}-E(\overline{R}))(R_p-E(R_p))^2]=\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X}),$$

$$\overline{K}_p=E[(\overline{R}-E(\overline{R}))(R_p-E(R_p))^3]=\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})$$

分别代表风险资产与投资组合之间的协方差、协偏度和协峰度向量.

接下来我们将从具有约束条件的最优化问题出发, 研究四阶矩 CAPM 是否也像传统 CAPM 一样存在基金分离定理. 在求解这样的最优化问题时, 首先根据 Kimball[5] 的偏好理论假设投资者偏好奇数阶阶矩, 不喜欢偶数阶阶矩. 因为较高的奇数阶阶矩可以看作是减少损失中的极值同时增加获利中的极值; 偶数阶阶矩代表收益的离散度, 一些不受欢迎的东西如波

收稿日期: 2009-06-30

基金项目: 教育部应急项目(2009JYJR051); 福建省自然科学基金(2009J01316); 福建省教育厅科技项目(JB08021)

* 通讯作者: zlzheng@xmu.edu.cn

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

动率会增加收益的不可测性. 如果投资者更关注投资收益中最坏的情况, 比如说投资组合的 VaR, 那么人们就会更加不喜欢偶数阶阶矩.

2 对偶引理

常见的标准化的对偶定理[6] 只有一个等式约束, 而四阶矩 CAPM 最优化问题牵涉到 3 个等式约束条件, 因此我们需要关于 3 个等式约束的对偶引理.

对偶引理 设开区间 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$, 实值函数 $f(\overline{X})$、$g(\overline{X})$、$h(\overline{X})$、$i(\overline{X})\in\mathbf{C}^2(\Omega)$, $\bar{g}$、$\bar{h}$、$\bar{i}$ 为实数. 若 $\overline{X}^*\in\Omega$ 是式(1)的局部极小值点, 相应的拉格朗日乘子为 $\lambda_1>0$、λ_2 和 λ_3, 且具有严格二阶条件, 则 $\overline{X}^*$ 也是式(2)的局部极大值点, 相应的拉格朗日乘子为 $-1/\lambda_1$、λ_2/λ_1 和 λ_3/λ_1.

$$\min f(\overline{X}) \quad \text{s.t.} \begin{cases} g(\overline{X})=\bar{g} \\ h(\overline{X})=\bar{h} \\ i(\overline{X})=\bar{i} \end{cases} \tag{1}$$

$$\max g(\overline{X}) \quad \text{s.t.} \begin{cases} f(\overline{X})=f(\overline{X}^*) \\ h(\overline{X})=\bar{h} \\ i(\overline{X})=\bar{i} \end{cases} \tag{2}$$

证明 因为式(1)的解与下式是等价的

$$\max(-f(\overline{X})) \quad \text{s.t.} \begin{cases} g(\overline{X})=\bar{g} \\ h(\overline{X})=\bar{h} \\ i(\overline{X})=\bar{i} \end{cases}$$

构造拉格朗日函数:

$$L=-f(\overline{X})+\lambda_1(g(\overline{X})-\bar{g})+\lambda_2(h(\overline{X})-\bar{h})+\lambda_3(i(\overline{X})-\bar{i}).$$

设 $\overline{X}^*$ 是式(1)的解, 则 $\overline{X}^*$ 必定满足一阶条件

$$\frac{\partial L}{\partial\overline{X}}=-\frac{\partial f}{\partial\overline{X}}+\lambda_1\frac{\partial g}{\partial\overline{X}}+\lambda_2\frac{\partial h}{\partial\overline{X}}+\lambda_3\frac{\partial i}{\partial\overline{X}}=0. \tag{3}$$

将式(3)乘以 $1/\lambda_1$, 则有

$$\frac{\partial g}{\partial\overline{X}}+\lambda_1'\frac{\partial f}{\partial\overline{X}}+\lambda_2'\frac{\partial h}{\partial\overline{X}}+\lambda_3'\frac{\partial i}{\partial\overline{X}}=0. \tag{4}$$

其中 $\lambda_1'=-1/\lambda_1$, $\lambda_2'=\lambda_2/\lambda_1$, $\lambda_3'=\lambda_3/\lambda_1$.

同时式(1)对应的加边海赛矩阵如下:

$$\boldsymbol{H}_f=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial g}{\partial\overline{X}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h}{\partial\overline{X}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial i}{\partial\overline{X}}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial g}{\partial\overline{X}} & \frac{\partial h}{\partial\overline{X}} & \frac{\partial i}{\partial\overline{X}} & \boldsymbol{H}_{NN} \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{H}_{NN}=-\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}+\lambda_1\frac{\partial^2 g}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}+\lambda_2\frac{\partial^2 h}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}+\lambda_3\frac{\partial^2 i}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}$ 是 $N\times N$ 的矩阵, 而 $\frac{\partial g}{\partial\overline{X}}$、$\frac{\partial h}{\partial\overline{X}}$、$\frac{\partial i}{\partial\overline{X}}$ 是 $N\times 1$ 维的一阶导数向量.

由等式约束条件下的局部最优化的充分条件[6] 知, 当式(5)中的 $N-3$ 个顺序主子式依次改变符号, 并以正的 $|(\boldsymbol{H}_f)_4|>0$ 开始, 交替改变符号, 即 $|(\boldsymbol{H}_f)_4|>0$, $|(\boldsymbol{H}_f)_5|<0$, …, 那么 $\overline{X}^*$ 是满足约束条件要求的 $-f(\overline{X})$ 的局部极大值点, 即 $\overline{X}^*$ 是满足约束条件的 $f(\overline{X})$ 的局部极小值点.

现在对式(1)的加边海赛矩阵进行变化. 先将式(5)乘以 $1/\lambda_1$ 得到新矩阵; 其次将新矩阵的第 1 行到第 3 行以及第 1 列到第 3 列分别乘上 λ_1, 再把式(4)代入矩阵的第 1 行和第 1 列; 然后将所得到的矩阵的第 2 行、第 3 行分别乘上 λ_2'、λ_3' 加到第 1 行, 第 2 列、第 3 列分别乘上 λ_2'、λ_3' 加到第 1 列; 最后将矩阵的第 1 行与第 1 列同时乘以 $-1/\lambda'$, 最终可得式(2)的加边海赛矩阵

$$\boldsymbol{H}_g=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial\overline{X}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial h}{\partial\overline{X}}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial i}{\partial\overline{X}}^{\mathrm{T}} \\ \frac{\partial f}{\partial\overline{X}} & \frac{\partial h}{\partial\overline{X}} & \frac{\partial i}{\partial\overline{X}} & \boldsymbol{HH}_{NN} \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{HH}_{NN}=\frac{\partial^2 g}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}+\lambda_1'\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}+\lambda_2'\frac{\partial^2 h}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}+\lambda_3'\frac{\partial^2 i}{\partial\overline{X}\partial\overline{X}^{\mathrm{T}}}$. 在所有的运算过程到最后, 矩阵的顺序主子式符号都没有发生变化, 因此综合式(4)与(6), 我们知道 $\overline{X}^*$ 也是式(2)的局部极大值点.

因此当存在四阶矩时, 由 Kimball[5] 的投资者偏好理论和上述的对偶引理, 我们知道式(7)~(10)最优化问题的解肯定存在且是等价的. 它们分别对应着其他条件给定下最大化预期收益、最小化方差、最大化偏度和最小化峰度 4 种情形.

$$\max \overline{X}^{T}E(\overline{R})+(1-\overline{X}^{\mathrm{T}}1)R_f$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}=\sigma^2 \\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})=s^3 \\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})=k^4 \end{cases} \tag{7}$$

$$\min \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\text{s.t.}\begin{cases}\overline{X}^{\mathrm{T}}E(\overline{R})+(1-\overline{X}^{\mathrm{T}}1)R_f=E(R_p)\\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})=s^3\\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})=k^4\end{cases}\tag{8}$$

$$\max\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\overline{X}^{\mathrm{T}}E(\overline{R})+(1-\overline{X}^{\mathrm{T}}1)R_f=E(R_p)\\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}=\sigma^2\\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})=k^4\end{cases}\tag{9}$$

$$\min\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\overline{X}^{\mathrm{T}}E(\overline{R})+(1-\overline{X}^{\mathrm{T}}1)R_f=E(R_p)\\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}=\sigma^2\\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})=s^3\end{cases}\tag{10}$$

3　基金分离定理

现在我们用最优化问题(8), 在投资组合的预期收益、偏度与峰度给定的情况下, 最小化投资组合的方差.

构造拉格朗日函数

$$\begin{aligned}L=&-\overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}+\lambda_1(\overline{X}^{\mathrm{T}}E(\overline{R})+(1-\overline{X}^{\mathrm{T}}1)R_f-\\&E(R_p))+\lambda_2(\overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})-s^3)+\\&\lambda_3(\overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X}-k^4)),\end{aligned}$$

由一阶条件整理得到

$$\begin{aligned}\overline{X}=&\lambda_1\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1+\lambda_2\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})+\\&\lambda_3\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X}).\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{M}_1$、$\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})$ 和 $\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})$ 分别与上式进行向量内积运算, 求得

$$\begin{aligned}\lambda_1=&((A_2A_5-A_3A_4)k^4+(A_4A_6-A_5^2)r_p+\\&(A_3A_5-A_2A_6)s^3)/(2A_2A_3A_5+A_0A_4A_6-\\&A_0A_5^2-A_2^2A_6-A_3^2A_4)\triangleq B,\\ \lambda_2=&((A_2A_3-A_0A_5)k^4+(A_3A_5-A_2A_6)r_p+\\&(A_0A_6-A_3^2)s^3)/(2A_2A_3A_5+A_0A_4A_6-\\&A_0A_5^2-A_2^2A_6-A_3^2A_4)\triangleq C,\\ \lambda_3=&((A_0A_4-A_2^2)k^4+(A_2A_5-A_3A_4)r_p+\\&(A_2A_3-A_0A_5)s^3)/(2A_2A_3A_5+A_0A_4A_6-\\&A_0A_5^2-A_2^2A_6-A_3^2A_4)\triangleq D,\end{aligned}$$

其中 $A_0=\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1$, $A_2=\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})$, $A_3=\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})$, $A_4=(\overline{X}\otimes\overline{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})$, $A_5=(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_3(\overline{X}\otimes\overline{X})$, $A_6=(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_4(\overline{X}\otimes\overline{X}\otimes\overline{X})$. 这里用 A 的下标代表 A 关于向量 $\overline{X}$ 的齐次性. 如 A_2 代表关于 $\overline{X}$ 具有 2 次齐次性. 经整理我们可得到最优问题的解满足以下的 N 个非线性方程

$$\overline{X}=B_1\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1}{1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1}+C_1\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p}{1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p}+D_1\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p}{1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p},\tag{11}$$

其中 $B_1=B\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1$, $C_1=C\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p$, $D_1=D\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p$. 式(11) 是在给定投资组合的预期收益、偏度与峰度下, 求解最小方差的必要条件, 也就是说若式(8) 存在最小值点, 那么最小值点必须满足式(11) 中的 N 个非线性方程.

因此当存在无风险资产时, 在四阶矩 CAPM 中, 我们可得到类似两基金分离定理的基金分离形式, 即四阶矩的有效投资组合可以看成是 3 个不同基金的线性组合. 3 个基金里面的风险资产权重比例向量分别为: $\overline{X}_1=\dfrac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{M}_1}$, $\overline{X}_2=\dfrac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p}$, $\overline{X}_3=\dfrac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p}$. $\overline{X}_1$ 其实就是均值-方差 CAPM 有效边界上的点, 而对于 $\overline{X}_2$ 和 $\overline{X}_3$, 我们可以将它们分别看作是在给定方差的情况下, 最大化偏度与最小化峰度的对冲投资组合点. 这里的 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 其实就是 Simaan[2] 中的存在无风险资产下的三阶矩 CAPM 的基金分离定理中的基金.

同理, 当只有风险资产时, 可得类似的关系,

$$\overline{X}=A\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{1}}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{1}}+B\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}E(\overline{R})}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}E(\overline{R})}+C\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{S}_p}+D\frac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{K}_p}.$$

这时候的四阶矩的有效投资组合可以看成是 4 个不同基金的线性组合, 其中 2 个基金为 $\overline{X}_2$ 和 $\overline{X}_3$, 还有 2 个基金为: $\overline{X}_4=\dfrac{\boldsymbol{M}_2^{-1}E(\overline{R})}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}E(\overline{R})}$, $\overline{X}_5=\dfrac{\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{1}}{\overline{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2^{-1}\overline{1}}$, $\overline{X}_5$ 就是方差最小的投资组合点. 当投资组合位于有效边界上时, 它的风险资产投资比例的权重可以由这 4 个基金的线性组合来表示. 显然 $\overline{X}_2$、$\overline{X}_4$ 和 $\overline{X}_5$ 是 Simaan[2] 中的不存在无风险资产下的三阶矩 CAPM 的基金分离定理中的基金. 因此, 不管是否包含无风险资产, 四阶矩的有效边界其实已经包含了二阶矩和三阶矩的有效边界. 下面我们给出存在无风险资产时均值-方差 CAPM 模型和三阶矩 CAPM 模型的证券市场线(面) 图形(见图 1, 2). 其中 $E(R_i)$、$E(R_m)$ 和 $E(R_A)$ 分别是第 i 种风险资产、市场组合和组合 A 的预期收益. 且组合 A 与市场组合的协方差与协峰度值均为零即 $\beta_{Am}=\delta_{Am}=0$ 但 $\gamma_{Am}\neq 0$.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

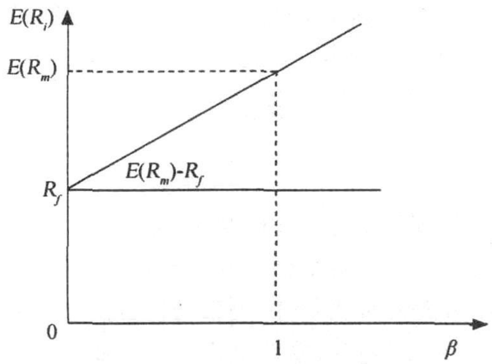

图 1 均值-方差 CAPM 模型的证券市场线

Fig. 1 Security market line of Mean-Variance CAPM

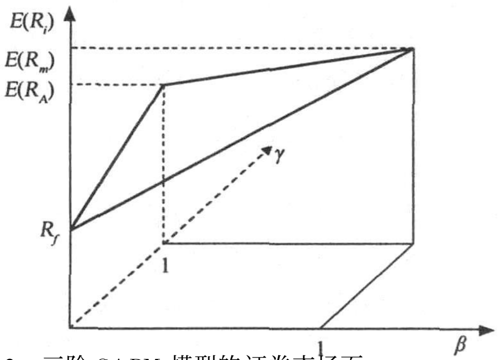

图 2 三阶 CAPM 模型的证券市场面

Fig. 2 Security market line of three-moment CAPM

4 特殊情形下的基金分离形式

为了更直观、更好的了解四阶矩 CAPM 的基金分离定理的形式, 以下我们将考虑特殊情况下的基金分离形式.

定理 不失一般性, 对于任意给定的正数 a 和 b, 设已知最优化问题:

$$\min \bar X^{\mathrm T}\boldsymbol M_2\bar X$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} r_p = 1 \\ \bar X^{\mathrm T}\boldsymbol M_3(\bar X\otimes\bar X) = a^3 \\ \bar X^{\mathrm T}\boldsymbol M_4(\bar X\otimes\bar X\otimes\bar X) = b^4 \end{cases} \tag{12}$$

的解为 $\bar X^*$, 相应的拉格朗日乘子分别为 λ_1^*, λ_2^* 和 λ_3^*, 最小方差为 σ^{*2}, 那么最优化问题:

$$\min \bar X^{\mathrm T}\boldsymbol M_2\bar X$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} r_p = r \\ \bar X^{\mathrm T}\boldsymbol M_3(\bar X\otimes\bar X) = a^3r^3 \\ \bar X^{\mathrm T}\boldsymbol M_4(\bar X\otimes\bar X\otimes\bar X) = b^4r^4 \end{cases} \tag{13}$$

的解则为 $\bar X = r\bar X^*$, 相应的拉格朗日乘子分别为 $\lambda_1 = r\lambda_1^*$, $\lambda_2 = \frac{1}{r}\lambda_2^*$ 和 $\lambda_3 = \frac{1}{r^2}\lambda_3^*$, 最小方差为 $\sigma^2 = r^2\sigma^{*2}$. 即当投资组合的预期超额收益、偏度和峰度具有 $r_p = r, s^3 = a^3r^3$ 和 $k^4 = b^4r^4$ 的关系式子时, 两基金分离定理成立.

证明 由式(11)有

$$\boldsymbol M_2\bar X = ((A_2A_5 - A_3A_4)k^4 + (A_4A_6 - A_5^2)r_p + (A_3A_5 - A_2A_6)s^3)/(2A_2A_3A_5 + A_0A_4A_6 - A_0A_5^2 - A_2^2A_6 - A_3^2A_4)\boldsymbol M_1 + ((A_2A_3 - A_0A_5)k^4 + (A_3A_5 - A_2A_6)r_p + (A_0A_6 - A_3^2)s^3)/(2A_2A_3A_5 + A_0A_4A_6 - A_0A_5^2 - A_2^2A_6 - A_3^2A_4)\boldsymbol M_3(\bar X\otimes\bar X) + ((A_0A_4 - A_2^2)k^4 + (A_2A_5 - A_3A_4)r_p + (A_2A_3 - A_0A_5)s^3)/(2A_2A_3A_5 + A_0A_4A_6 - A_0A_5^2 - A_2^2A_6 - A_3^2A_4)\boldsymbol M_4(\bar X\otimes\bar X\otimes\bar X).$$

当 $r_p = r, s^3 = a^3r^3$ 和 $k^4 = b^4r^4$ 时上式化为

$$\boldsymbol M_2\bar X = ((A_2A_5 - A_3A_4)b^4r^4 + (A_4A_6 - A_5^2)r + (A_3A_5 - A_2A_6)a^3r^3)/(2A_2A_3A_5 + A_0A_4A_6 - A_0A_5^2 - A_2^2A_6 - A_3^2A_4)\boldsymbol M_1 + ((A_2A_3 - A_0A_5)b^4r^4 + (A_3A_5 - A_2A_6)r + (A_0A_6 - A_3^2)a^3r^3)/(2A_2A_3A_5 + A_0A_4A_6 - A_0A_5^2 - A_2^2A_6 - A_3^2A_4)\boldsymbol M_3(\bar X\otimes\bar X) + ((A_0A_4 - A_2^2)b^4r^4 + (A_2A_5 - A_3A_4)r + (A_2A_3 - A_0A_5)a^3r^3)/(2A_2A_3A_5 + A_0A_4A_6 - A_0A_5^2 - A_2^2A_6 - A_3^2A_4)\boldsymbol M_4(\bar X\otimes\bar X\otimes\bar X). \tag{14}$$

已知当 $r = 1$ 时, $\bar X = \bar X^*$ 是式(14)的解, 即

$$\boldsymbol M_2\bar X^* = ((A_2^*A_5^* - A_3^*A_4^*)b^4 + (A_4^*A_6^* - A_5^{*2}) + (A_3^*A_5^* - A_2^*A_6^*)a^3)/(2A_2^*A_3^*A_5^* + A_0^*A_4^*A_6^* - A_0^*A_5^{*2} - A_2^{*2}A_6^* - A_3^{*2}A_4^*)\boldsymbol M_1 + ((A_2^*A_3^* - A_0^*A_5^*)b^4 + (A_3^*A_5^* - A_2^*A_6^*) + (A_0^*A_6^* - A_3^{*2})a^3)/(2A_2^*A_3^*A_5^* + A_0^*A_4^*A_6^* - A_0^*A_5^{*2} - A_2^{*2}A_6^* - A_3^{*2}A_4^*)\boldsymbol M_3(\bar X^*\otimes\bar X^*) + ((A_0^*A_4^* - A_2^{*2})b^4 + (A_2^*A_5^* - A_3^*A_4^*) + (A_2^*A_3^* - A_0^*A_5^*)a^3)/(2A_2^*A_3^*A_5^* + A_0^*A_4^*A_6^* - A_0^*A_5^{*2} - A_2^{*2}A_6^* - A_3^{*2}A_4^*)\boldsymbol M_4(\bar X^*\otimes\bar X^*\otimes\bar X^*). \tag{15}$$

容易证明 $\bar X = r\bar X^*$ 也是式(14)的解. 将 $\bar X = r\bar x^*$ 代入式(14)中, 由于 $A_0, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 是具有与下标一致关于 $\bar X$ 的齐次性函数, 经化简最后得到

$$\boldsymbol M_2(r\bar X^*) = ((A_2^*A_5^* - A_3^*A_4^*)b^4 + (A_4^*A_6^* - A_5^{*2}) + (A_3^*A_5^* - A_2^*A_6^*)a^3)/(2A_2^*A_3^*A_5^* + A_0^*A_4^*A_6^* - A_0^*A_5^{*2} - A_2^{*2}A_6^* - A_3^{*2}A_4^*)\boldsymbol M_1 r + ((A_2^*A_3^* - A_0^*A_5^*)b^4 + (A_3^*A_5^* - A_2^*A_6^*) + (A_0^*A_6^* - A_3^{*2})a^3)/(2A_2^*A_3^*A_5^* + A_0^*A_4^*A_6^* -$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$A_0^*A_5^{*2} - A_2^{*2}A_6^* - A_3^{*2}A_4^*)\boldsymbol{M}_3(\overline{X}^* \otimes \overline{X}^*)r +$
$((A_0^*A_4^* - A_2^{*2})b^4 + (A_2^*A_5^* - A_3^*A_4^*) +$
$(A_2^*A_3^* - A_0^*A_5^*)a^3)/(2A_2^*A_3^*A_5^* +$
$A_0^*A_4^*A_6^* - A_0^*A_5^{*2} - A_2^{*2}A_6^* -$
$A_3^{*2}A_4^*)\boldsymbol{M}_4(\overline{X}^* \otimes \overline{X}^* \otimes \overline{X}^*)r.$

由式(15)知 $\overline{X} = r\overline{X}^*$ 是式(14)的解.

同理, 可导出相应的拉格朗日乘子分别为 $\lambda_1 = r\lambda_1^*$, $\lambda_2 = \frac{1}{r}\lambda_2^*$ 和 $\lambda_3 = \frac{1}{r^2}\lambda_3^*$, 最小方差为 $\sigma^2 = r^2\sigma^{*2}$.

从上述定理可知, 当 $r_p = r$, $s^3 = a^3r^3$ 和 $k^4 = b^4r^4$ 时, 原先四阶矩CAPM的资本市场线就变成$(E(R_i), \sigma(R_i), \gamma(R_i), \delta(R_i))$四维空间中的一条直线, 而沿着这条直线方向的最小方差的投资组合中各个风险资产的比重 $\overline{X} = r\overline{X}^*$. 也就是说当我们先找出式(12)中的最优资产配置 $\overline{X}^*$ 后, 若要再去求沿着这条直线方向的最优资产配置时, 事情就相对简单些, 我们只要知道预期的超额收益 r, 然后在"风险组合 $\overline{X}^*$"中按 r 的比例(即 $r\overline{X}^*$)进行投资, 剩余的资产投资到无风险资产上即可.

从上述定理中, 我们知道只要任意给定 a 和 b 后, 由它们所确定的直线方向上, 两基金分离定理一定成立. 现在, 对式(12)我们稍微做个变化, 其中 b 不变, 但 a 变为 $a_1(a_1 \neq a)$, 下面最优化问题的解我们用 $\overline{Y}^*$ 表示.

$$\min \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X} \quad \text{s.t.}\begin{cases} r_p = 1 \\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X} \otimes \overline{X}) = a_1^3 \\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X} \otimes \overline{X} \otimes \overline{X}) = b^4 \end{cases}$$

同样, 沿着 $r_p = r$, $s^3 = a_1^3r^3$ 和 $k^4 = b^4r^4$ 这条直线方向的最小方差组合可以表示为 $\overline{Y} = r\overline{Y}^*$. 而这条直线与 $r_p = r$, $s^3 = a^3r^3$ 和 $k^4 = b^4r^4$ 直线可线性生成 $r_p = r$, $k^4 = b^4r^4$ 平面. 因此, 若要沿着这个平面求最优资产配置时, 我们只要在无风险资产和"风险资产 $\overline{X}^*$ 和 $\overline{Y}^*$"进行比例配置就好.

最后, 再考虑另一个最优配置

$$\min \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_2\overline{X}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} r_p = 1 \\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_3(\overline{X} \otimes \overline{X}) = a_1^3 \\ \overline{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_4(\overline{X} \otimes \overline{X} \otimes \overline{X}) = b_1^4 \end{cases}$$

的解 $\overline{Z}^*$, 其中 $b_1 \neq b$. 沿着 $r_p = r$, $s^3 = a_1^3r^3$ 和 $k^4 = b_1^4r^4$ 这条直线方向上最小方差组合可以表示为 $\overline{Z} = r\overline{Z}^*$. 上述的平面与现在这条直线的线性组合, 就可以生成四阶矩 CAPM 的资本市场线, 所有的最优投资组合都落在由无风险资产和 $\overline{X}^*$、$\overline{Y}^*$、$\overline{Z}^*$ 线性生成的面上. 即当存在无风险资产时, 四基金分离定理中的 4 个基金可以选择无风险资产和 3 个风险资产 $\overline{X}^*$、$\overline{Y}^*$ 和 $\overline{Z}^*$.

参考文献:

[1] Kraus A, Litzenberger R H. Skewness preference and the valuation of risk assets[J]. Journal of Finance, 1976, 31: 1085-1100.

[2] Simaan Y. Portfolio selection and asset pricing-three-parameter framework[J]. Management Science, 1993, 39: 568-577.

[3] Fang H, Lai T Y. Co-kurtosis and capital asset pricing[J]. Financial Review, 1997, 32: 293-307.

[4] Hwang S, Satchell S E. Modelling emerging market risk premia using higher moments[J]. Int J Fin Econ, 1999, 4: 271-296.

[5] Kimball Miles S. Standard risk aversion[J]. Econometrica, 1993, 61: 589-611.

[6] 杰弗瑞 A 杰里, 王根蓓. 高级微观经济学[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2002.

Fund Separation Theory of Four-Moment CAPM Based on Duality

HUANG Wen-bin[1], ZHENG Zhen-long[2*]

(1. Department of Mathematics, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China;

2. Department of Finance, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The paper used Kimball's preference theory to suppose that agents like odd moments and dislike even ones. A duality result involving three equality constraints is needed and proved. Fund separation and efficient portfolios of Four-Moment CAPM are found. And fund separation in the special case is given.

Key words: duality; fund separation; skewness; kurtosis

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net