研究简报

关于奇异非线性两点边值问题的一点注记

杨良梁 张中新
（大庆高等专科学校数学系，大庆 163712） （长春邮电学院基础部，长春 130012）

提要 在$k(x)$具有较强奇性的情况下证明了奇异非线性两点边值问题

$$\begin{cases} u''(x)+k(x)[u(x)]^{-\alpha}[u'(x)]^{\sigma}=0, & 0<x<1, \\ u(0)=0,\ Du'(1)=u(1), \end{cases}$$

正解的存在性．同时提出了一个C^1正解存在的充要条件．

关键词 奇异非线性两点边值问题，正解，C^1正解

中图分类号 O175.14

考虑如下形状的奇异非线性两点边值问题

$$\begin{cases} u''(x)+k(x)[u(x)]^{-\alpha}[u'(x)]^{\sigma}=0, & 0<x<1; \\ u(0)=0;\ Du'(1)=u(1), \end{cases} \tag{1}$$

此处假设：

(H_1) α,σ,D均为给定的正数，$\sigma\geqslant1$，$|\sigma-\alpha|<1$，且$D>1$；

(H_2) $k(x)$是一个于$[0,1]$上有定义的非负可测函数．

与文献[1]不同的是这里只考虑$\sigma\geqslant1$的情况．因为当$\sigma<1$时，采用文献[2]中的论证方法可以得到更为精确的结果．

我们研究边值问题(1)的目的有两个：一个是在函数$k(x)$具有较强奇性的情况下建立正解的存在性，一个是给出C^1正解存在的充要条件．

定理1 如果(H_1)和(H_2)成立，则两点边值问题(1)具有如下性质：

(i) 若

$$0<\int_0^1 s^{1-\rho}k(s)\mathrm{d}s<+\infty,\quad \rho:=\max\{\alpha,\sigma\}, \tag{2}$$

至少有一个正解；

(ii) 具有C^1正解的充要条件是

$$0<\int_0^1 s^{-\alpha}k(s)\mathrm{d}s<+\infty. \tag{3}$$

证明：(i) 设$u(x)$是两点边值问题(1)的一个正解．把它代入方程(2)中，然后两次积分，再利用边界条件，便可得到$u(x)$的积分表达式：

$$u(x)=\frac{x}{D-1}\int_0^1 sk(s)\frac{v^{\sigma}(s)}{u^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s+x\int_x^1 k(s)\frac{v^{\sigma}(s)}{u^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s+\int_0^x sk(s)\frac{v^{\sigma}(s)}{u^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s, \tag{4}$$

此处

$$v(x):=\frac{1}{D-1}\int_0^1 sk(s)\frac{v^{\sigma}(s)}{u^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s+\int_x^1 k(s)\frac{v^{\sigma}(s)}{u^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s \tag{5}$$

是导数$u'(x)$的表达式．它于$(0,1]$上恒正且非增．这表明$u(x)$是一个于$[0,1]$上连续的凹函数．设

收稿日期 1996-12-26. 第一作者：杨良梁，男，47岁，讲师.

$$W(x):=xv(x),\quad u(x):=\int_0^x s^{-1}W(s)\mathrm{d}s,\tag{6}$$

则 $W(x)\in C[0,1]$，并且

$$W(x)=\frac{x}{D-1}\int_0^1 s^{1-\sigma}k(s)\frac{W^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s+x\int_x^1 s^{-\sigma}k(s)\frac{W^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s,\tag{7}$$

$$xW(1)\leqslant W(x)\leqslant u(x)\leqslant DW(1),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

现在我们来求积分方程(7)的连续解．为此，我们按如下方式定义一个映射 Φ：

$$(\Phi W)(x):=\frac{x}{D-1}\int_0^1 s^{1-\sigma}k(s)\frac{W^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s+x\int_x^1 s^{-\sigma}k(s)\frac{W^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s,\ \forall\, W\in\Omega,$$

此处，

$$\Omega:=\{W\in C[0,1];\ xW(1)\leqslant W(x)\leqslant u(x)\leqslant DW(1),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ A\leqslant W(1)\leqslant B\},$$

$$u(x):=\int_0^x s^{-1}W(s)\mathrm{d}s,$$

而 A 和 B 是两个待定的正数．

显然，Ω 是 $C[0,1]$中的一个有界闭凸集．对任何的 $W\in\Omega$，从映射 Φ 的定义便可推出

$$x(\Phi W)(1)\leqslant(\Phi W)(x)\leqslant\int_0^x s^{-1}(\Phi W)(s)\mathrm{d}s\leqslant D(\Phi W)(1),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\tag{8}$$

$$\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Phi W)(x)\right|\mathrm{d}x=(2D-1)(\Phi W)(1),\tag{9}$$

$$(\Phi W)(1)=\frac{1}{D-1}\int_0^1 s^{1-\sigma}k(s)\frac{W^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s\geqslant\left(\frac{D^{-\alpha}}{D-1}\int_0^1 sk(s)\mathrm{d}s\right)W^{\sigma-\alpha}(1),\tag{10}$$

$$(\Phi W)(1)\leqslant\frac{1}{D-1}\int_0^1 s^{1-\sigma}k(s)u^{\sigma-\alpha}(s)\mathrm{d}s\leqslant\begin{cases}\left(\dfrac{D^{\sigma-\alpha}}{D-1}\displaystyle\int_0^1 s^{1-\sigma}k(s)\mathrm{d}s\right)W^{\sigma-\alpha}(1), & \text{当 }\sigma\geqslant\alpha\text{ 时；}\\ \left(\dfrac{1}{D-1}\displaystyle\int_0^1 s^{1-\alpha}k(s)\mathrm{d}s\right)W^{\sigma-\alpha}(1), & \text{当 }\sigma<\alpha\text{ 时．}\end{cases}\tag{11}$$

现在我们来选取正数 A 和 B，使 Φ 映 Ω 到 Ω 之中．当 $\sigma\geqslant\alpha$ 时，我们可选

$$A^{1-(\sigma-\alpha)}:=\frac{D^{-\alpha}}{D-1}\int_0^1 sk(s)\mathrm{d}s,\quad B^{1-(\sigma-\alpha)}:=\frac{D^{\sigma-\alpha}}{D-1}\int_0^1 s^{1-\sigma}k(s)\mathrm{d}s.\tag{12}$$

当 $\sigma<\alpha$ 时，我们可选

$$A=MB^{\sigma-\alpha},\quad B=NA^{\sigma-\alpha},\quad M:=\frac{D^{-\alpha}}{D-1}\int_0^1 sk(s)\mathrm{d}s,\quad N:=\frac{1}{D-1}\int_0^1 s^{1-\alpha}k(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$A^{1-(\sigma-\alpha)^2}:=MN^{\sigma-\alpha},\quad B^{1-(\sigma-\alpha)^2}:=NM^{\sigma-\alpha}.\tag{13}$$

这时，由(10)～(13)式知

$$A\leqslant(\Phi W)(1)\leqslant B,\quad\forall\, W\in\Omega.\tag{14}$$

(8),(9)和(14)式合起来表明：Ω 在映射 Φ 下的像集 $\Phi(\Omega)$一定是 Ω 的一个紧子集．根据 Schauder 不动点定理知，映射 Φ 于 Ω 之中至少有一个不动点．

设 $W(x)$是 Φ 在 Ω 中的一个不动点，则 $W(x)$是积分方程(7)的一个连续正解．设

$$v(x):=W(x)/x,\quad u(x):=\int_0^x v(s)\mathrm{d}s,\tag{15}$$

便可直接验证，由(15)式所确定的函数 $u(x)$恰好是两点边值问题(1)的一个正解．

(ii) 因为充分性的证明可在文献[1]中找到，这里仅证必要性．

假设 $u(x)$是两点边值问题(1)的一个 C^1 正解，则 $u(x)$是一个于$[0,1]$上连续可微的凹函数；它的导数 $v(x):=u'(x)$是一个正值的不增函数，$v(0)$为最大值，$v(1)$为最小值，并且

$$xu(1)\leqslant u(x)\leqslant xv(0),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.\tag{16}$$

由(5)式和(16)式可推出

$$0 < v(1) = \frac{1}{D-1}\int_0^1 sk(s)\frac{v^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{D-1}\frac{v^\sigma(0)}{u^\alpha(1)}\int_0^1 s^{1-\alpha}k(s)\mathrm{d}s,$$

$$v(0) = v(1) + \int_0^1 k(s)\frac{v^\sigma(s)}{u^\alpha(s)}\mathrm{d}s > \frac{v^\sigma(1)}{v^\alpha(0)}\int_0^1 s^{-\alpha}k(s)\mathrm{d}s.$$

于是，有

$$0 < \int_0^1 s^{1-\alpha}k(s)\mathrm{d}s < \int_0^1 s^{-\alpha}k(s)\mathrm{d}s < +\infty,$$

即(3)式成立.

感谢吉林大学数学系王俊禹教授的指导和帮助.

参 考 文 献

[1] 王俊禹，孔令彬. 奇异非线性两点边值问题正解的存在性. 吉林大学自然科学学报，1996，(3)：35～37

[2] Wang Junyu, Gao Wenjie. A Singular Boundary Value Problem for the One-dimensional p-Laplacian. *J Math Anal Appl*, 1996, **201**: 851～866

A Note on a Singular Nonlinear Two-Point Boundary Value Problem

Yang Liangliang

(*Department of Mathematics, Daqing High Training School, Daqing*, 163712)

Zhang Zhongxin

(*Department of Foundation, Changchun Institute of Posts and Telecommunications, Changchun*, 130012)

Abstract The existence of positive solutions is proved for the singular nonlinear two-point boundary value problem

$$\begin{cases} u''(x) + k(x)[u(x)]^{-\alpha}[u'(x)]^\sigma = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0,\ Du'(1) = u(1), \end{cases}$$

in the case of $k(x)$ possessing stronger singularity. A necessary and sufficient condition is given for the boundary value problem to have a C^1 positive solution.

Keywords singular nonlinear two-point boundary problem, positive solution, C^1 positive solution