应用数学和力学,第 23 卷 第 7 期(2002 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号:1000-0887(2002)07-0759-12

奇异二阶三点边值问题的正解*

曲文波[1], **张中新**[2], **武俊德**[3]

(1. 哈尔滨工业大学 数学系,哈尔滨 150001; 2. 吉林大学 数学所,长春 130012;
3. 浙江大学 应用数学系,杭州 312000)

(丁协平推荐)

摘要: 应用锥中的不动点定理研究奇异二阶三点边值问题的正解的存在性·采用一种构造 Green 函数的方法为出发点,利用分段定义算子的手法讨论更一般的奇异二阶三点边值问题·得到了一个正解的存在性定理·其中的非线性项可以是变号的·

关 键 词: 正解; 边值问题; 存在性
中图分类号: O175.1 **文献标识码**: A

1 引言和主要结果

最近,文[1]建立了一个非线性二阶三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' = Q(x)f(y) \quad (0 < x < 1), \\ y(0) = 0,\ y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性结果·在文[1]中假设 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha\eta < 1$, $Q(x) \in C([0,1];\mathbf{R}_+)$, $f(y) \in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$, $\mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$, $f(y)$ 在 $y = 0$ 和 $y = +\infty$ 处是超线性的或者是次线性的·其结果的证明是以下面两个定理为基础的·

定理 A[2,1] 假设 $0 < \eta < 1$, $\alpha\eta \neq 1$ 和函数 $h(x) \in C[0,1]$·则线性三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' = h(x) \quad (0 < x < 1), \\ y(0) = 0,\ y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases}$$

有唯一解 $y(x) \in C^2[0,1]$,它可表达为

$$y(x) = -\int_0^x (x-t)h(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\alpha x}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - t)h(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-t)h(t)\,\mathrm{d}t\cdot$$

如果 $\alpha\eta \in (0,1)$,且在 $[0,1]$ 上满足 $h(x) \leq 0$,则有 $y(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$·进一步,如果对某个 $x \in [0,1]$, $h(x) > 0$,则在 $(0,1)$ 上有 $y(x) > 0$·

定理 B[3] 设 E 是一个 Banach 空间, K 是 E 中的一个锥·假设 Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的两个

* **收稿日期**: 2001-06-05; **修订日期**: 2002-02-28
基金项目: 江苏省教育基金资助项目
作者简介: 曲文波(1965 —),男,黑龙江人,副教授,硕士(E-mail:qqqbye@163.com)
张中新(1971 —),男,吉林人,讲师,硕士(E-mail:wx555555@163.net);
武俊德(1962 —),黑龙江人,副教授,博士.

开集,且满足 $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. 设

$$\Phi: K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$$

是一个全连续映射,它满足下列两个条件中的一个:

i) $\forall y\in K\cap\partial\Omega_1$ 有 $\|\Phi y\|\le\|y\|$,且 $\forall y\in K\cap\partial\Omega_2$ 有 $\|\Phi y\|\ge\|y\|$,

或者

ii) $\forall y\in K\cap\partial\Omega_1$ 有 $\|\Phi y\|\ge\|y\|$,且 $\forall y\in K\cap\partial\Omega_2$ 有 $\|\Phi y\|\le\|y\|$.

则映射 Φ 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中有不动点.

在本文中,我们重新研究三点边值问题(1),目的是推广和改进上述结果,我们采用的假设条件是:

H1) $\eta\in(0,1)$, $\alpha>0$, $f(y)\in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{R})$, $Q(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ 在 $(0,1)$ 上乎处处有 $Q(x)\ge 0$,且满足

$$0<\int_\eta^1(1-x)Q(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,\qquad\int_0^\eta xQ(x)\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

此处有两点是我们应该强调的. 第一,在我们的问题中允许 $Q(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处是奇异的. 例如,函数

$$Q(x)=x^{-a}(1-x)^{-b}\qquad(a,b\in(1,2))$$

就满足 H1). 第二,我们的目的不仅处理 $\alpha\eta\in(0,1)$ 的情况,也要处理 $\alpha\eta\ge 1$ 的情况. 就后者而言,定理 A 是无效的. 因此,我们需要下列两个命题.

定理 1 对于每个给定的 $\rho\ge 0$,初值问题

$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w & (0<x<1),\\ w(0)=0,\ w'(0)=1,\end{cases}$$
$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w & (0<x<\eta),\\ w(0)=0,\ w'(\eta)=-1,\end{cases}$$
$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w & (\eta<x<1),\\ w(\eta)=0,\ w'(\eta)=1,\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w & (0<x<1),\\ w(1)=0,\ w'(1)=-1,\end{cases}$$

分别有解 $w_1(x)\in AC[0,1]\cap C^1[0,1)$, $w_2(x)\in AC[0,\eta]\cap C^1(0,\eta]$, $w_3(x)\in AC[\eta,1]\cap C^1[\eta,1)$, $w_4(x)\in AC[0,1]\cap C^1(0,1]$,它们在其存在区间上全都是凸的. 此外

$$\begin{vmatrix}w_2(x) & w_1(x)\\ w_2'(x) & w_1'(x)\end{vmatrix}\equiv w_2(0)=w_1(\eta)\qquad(在[0,\eta]上),$$
$$\begin{vmatrix}w_4(x) & w_3(x)\\ w_4'(x) & w_3'(x)\end{vmatrix}\equiv w_4(\eta)=w_3(1)\qquad(在[\eta,1]上),$$

和

$$\begin{vmatrix}w_4(x) & w_1(x)\\ w_4'(x) & w_1'(x)\end{vmatrix}\equiv w_4(0)=w_1(1)\qquad(在[0,1]上).$$

当 $\rho=0$ 时,毫无疑问地有 $w_1(x)=x$, $w_2(x)=\eta-x$, $w_3(x)=x-\eta$ 和 $w_4(x)=1-x$.

定理 2 对每个给定的 $\alpha\in\mathbf{R}$,存在一个 $\rho\ge 0$,使得

$$w_1(1)-\alpha w_1(\eta)>0. \tag{2}$$

假设(2)成立,则线性三点边值问题

$$\begin{cases} -y''+\rho Q(x)y=h(x) & (0<x<1), \\ y(0)=0, \quad y(1)=\alpha y(\eta) \end{cases}$$

有唯一解

$$y(x)=\begin{cases} \dfrac{w_4(\eta)w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\left[\displaystyle\int_0^\eta \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t\right] & (x=\eta), \\ w_2(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t+w_1(x)\int_x^\eta \frac{w_2(t)}{w_1(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t+y(\eta)\frac{w_1(x)}{w_1(\eta)}, & \\ & (0\le x\le\eta), \\ w_4(x)\displaystyle\int_\eta^x \frac{w_3(t)}{w_4(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t+w_3(x)\int_x^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t+y(\eta)\frac{w_4(x)+\alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}, & \\ & (\eta\le x\le 1), \end{cases} \tag{3}$$

此处 $h(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ 满足条件

$$\int_0^\eta w_1(t)\,|h(t)|\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)\,|h(t)|\,\mathrm{d}t<+\infty.$$

如果 $\alpha\ge 0$,在 $(0,1)$ 上几乎处处有 $h(x)\ge 0$,则在 $[0,1]$ 上 $y(x)\ge 0$. 进一步,如果

$$\int_0^\eta w_1(x)h(x)\,\mathrm{d}x+\int_\eta^1 w_4(x)h(x)\,\mathrm{d}x>0,$$

那么对所有的 $x\in(0,1]$,有 $y(x)>0$.

此处,我们称 $y(x)$ 是三点边值问题(1)的一个解,如果

i) $y(x)\in AC[0,1]$, $y(0)=0$, $y(1)=\alpha y(\eta)$,

ii) $y'(x)\in AC_{\mathrm{loc}}(0,1)\cap L^1(0,1)$, $y''(x)=L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$,

iii) 在 $(0,1)$ 上几乎处处有 $-y''(x)=Q(x)f(y(x))$.

且如果在 $(0,1]$ 上 $y(x)>0$,我们称 $y(x)$ 是问题(1)的一个正解.

很显然,定理 2 改进且推广了定理 A.

为了建立问题(1)的正解的存在性,我们进一步假设:

H2) 存在一个 $\rho\ge 0$ 使得(2)成立,且 $f^*(y)=f(y)+\rho y$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上为非负的.

H3) 下列两个条件之一成立:

$$\limsup_{y\to 0}\frac{f^*(y)}{y}\le\beta \text{ 且 } \limsup_{y\to+\infty}\frac{f^*(y)}{y}\ge\eta, \tag{4}$$

$$\limsup_{y\to 0}\frac{f^*(y)}{y}\ge\gamma \text{ 且 } \limsup_{y\to+\infty}\frac{f^*(y)}{y}\le\beta, \tag{5}$$

此处 β 和 γ 是两个常数,它们满足

$$\beta M\left(\int_0^\eta w_1(x)Q(x)\,\mathrm{d}x+\int_\eta^1 w_4(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right)<1, \tag{6}$$

$$\frac{\gamma\sigma w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(x)Q(x)\,\mathrm{d}x>1, \tag{7}$$

$$M=1+\frac{\max\{w_4(\eta),w_1(\eta)\}}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\max_{\eta\le x\le 1}\left\{\frac{w_4(x)+\alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}, \tag{8}$$

$$\sigma=\frac{\min\limits_{\eta\le x\le 1}\left\{\dfrac{w_4(x)+\alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}{\left\{\dfrac{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}{\max\{w_4(\eta),w_1(\eta)\}}\right\}+\max\limits_{\eta\le x\le 1}\left\{\dfrac{w_4(x)+\alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}<1. \tag{9}$$

很显然,当 $\rho > 0$ 时 H2) 允许 $f(y)$ 变号·

应用定理 2 和定理 B,我们能证明下面的存在性结果·

定理 3　设 H1)～H3) 成立,则三点边值问题(1)有一个正解·

定理 4　设 $0 < \eta < 1, 0 < \alpha\eta < 1, f(y) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+), Q(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$,在 $(0,1)$ 上几乎处处有 $Q(x) \geq 0$,有

$$0 < \int_\eta^1 (1 - x) Q(x) \mathrm{d}x < +\infty, \quad \int_0^\eta x Q(\mathrm{d}x) < +\infty \cdot$$

则三点边值问题(1)有一个正解,只要下列两个条件之一成立·

i) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(y)}{y} = 0$ 且 $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{f(y)}{y} = +\infty$;

ii) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(y)}{y} = +\infty$ 且 $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{f(y)}{y} = 0$·

定理 4 是定理 3 的一个推论,它改进且推广了文[3]中的结果·

此处我们必须指出在定理 4 中条件 $\alpha\eta \in (0,1)$ 是不能减弱的,原因有两点·第一,当 $\alpha = 0$ 时,三点边值问题(1)退化为两点边值问题·第二,当 $\alpha\eta = 1$ 时,我们断言三点边值问题·

$$\begin{cases} -y'' = y^2 & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \dfrac{1}{\eta} y(\eta), \end{cases}$$

没有正解·事实上,如果断言不成立,设该问题有一个正解 $y(x)$,则 $y(x)$ 在 $[0,1]$ 上的严格凹函数,因此 $y(\eta) \geq \eta y(1)$,同 $y(1) = \dfrac{1}{\eta} y(\eta)$ 矛盾,这样我们的断言成立·

2　预 备 知 识

在本节中,我们来证明定理 1 和定理 2·为此,我们提出一个引理·这个引理在后面经常用到·

引理 1　设 $h(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$,在 $(0,1)$ 中几乎处处有 $h(x) \geq 0$,且

$$\int_0^\eta x h(x) \mathrm{d}x + \int_\eta^1 (1 - x) h(x) \mathrm{d}x < +\infty \cdot$$

则

$$\lim_{x\to 0} x \int_x^\eta h(t) \mathrm{d}t = 0 = \lim_{x\to 1} (1 - x) \int_\eta^x h(t) \mathrm{d}t \cdot \tag{10}$$

证明　令 $v(x) = x \int_x^\eta h(t) \mathrm{d}t \quad (0 < x \leq \eta)$,

则　$0 \leq v(x) \leq \int_0^\eta t h(t) \mathrm{d}t < +\infty \quad (x \in (0, \eta])$,

$$v'(x) = \int_x^\eta h(t) \mathrm{d}t - x h(x) \quad (0 < x < \eta) \cdot$$

于对任何的 $\delta \in (0, \eta)$,均有

$$\begin{aligned} \int_\delta^\eta | v'(x) | \mathrm{d}x \leq \int_\delta^\eta \mathrm{d}x \leq \int_x^\eta h(t) \mathrm{d}t + \int_0^\eta x h(x) \mathrm{d}x = \\ \int_\delta^\eta (t - \delta) h(t) \mathrm{d}t + \int_0^\eta x h(x) \mathrm{d}x \leq \end{aligned}$$

$$2\int_0^{\eta} xh(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

这表明 $v'(x) \in L^1(0,\eta)$,并且 $v(x) \in AC[0,\eta]$· 由此我们可得

$$\int_0^s v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^s \mathrm{d}x\int_x^{\eta} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^s xh(x)\,\mathrm{d}x \equiv v(s) \qquad (s \in (0,\eta]),$$

这就意味着 $v(0) = 0$,即第一个等式成立·

同理,我们可证第二个等式成立·

定理 1 的证明 显然,当 $\rho = 0$ 时,定理 1 的所有结论都成立· 现在我们来证明当 $\rho > 0$ 时初值问题

$$\begin{cases} w'' = \rho Q(x) w & (0 < x < 1), \\ w(1) = 0, \quad w'(1) = -1 \end{cases} \tag{11}$$

有唯一正解·令

$$B = \left\{ u(x) \in C[0,1];\ \| u \|_B < +\infty \right\},$$

此处 $\| u \|_B = \max\limits_{0 \le x \le 1} | u(x) | \exp\left(-2\rho\int_0^1 s(1-s)Q(s)\,\mathrm{d}s \right)$·

定义一个映射 $L: B \to B$

$$Lu(1) = 1$$

$$(Lu)(x) = 1 + \frac{\rho}{1-x}\int_x^1 (t-x)(1-t)Q(t)u(t)\,\mathrm{d}t \qquad (0 \le x \le 1)·$$

对任何的 $u \in B$,我们有

$$\left| \frac{1}{1-x}\int_x^1 (t-x)(1-t)Q(t)u(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_0^1 t(1-t)Q(t)|u(t)|\,\mathrm{d}t \le$$
$$\max_{0\le t\le 1}|u(t)|\int_0^1 t(1-t)Q(t)\,\mathrm{d}t < +\infty·$$

因此 $L(B) \subset B$· 我们断言 L 是一个压缩映射 · 对任何的 $u_1(x), u_2(x) \in B$,我们有

$$\exp\left(-2\rho\int_0^1 s(1-s)Q(s)\,\mathrm{d}s \right) | (Lu_1)(x) - (Lu_2)(x) | \le$$
$$\exp\left(-2\rho\int_0^1 s(1-s)Q(s)\,\mathrm{d}s \right)\rho\int_0^1 t(1-t)Q(t)|(u_1)(t) - (u_2)(t)|\,\mathrm{d}t \le$$
$$\frac{1}{2}\| u_1 - u_2 \|_B \exp\left(-2\rho\int_0^1 s(1-s)Q(s)\,\mathrm{d}s \right) \times$$
$$\int_0^1 2\rho t(1-t)Q(t)\exp\left(-2\rho\int_t^1 s(1-s)Q(s)\,\mathrm{d}s \right)\mathrm{d}t \le \frac{1}{2}\| u_1 - u_2 \|_B,$$

对任意 $x \in [0,1]$ 成立 · 即

$$\| Lu_1 - Lu_2 \|_B \le \frac{1}{2}\| Lu_1 - Lu_2 \|_B \qquad (\forall u_1, u_2 \in B)·$$

这表明断言是正确的·由此可知 L 在 B 中有唯一的一个不动点 · 设 $u_4(x) \in C[0,1]$ 是这个唯一的不动点,则

$$u_4(x) = 1 + \frac{\rho}{1-x}\int_x^1 (t-x)(1-t)Q(t)u_4(t)\,\mathrm{d}t \qquad (0 \le x < 1)·$$

令

$$w_4(x) = (1-x)u_4(x) = 1 - x + \rho\int_x^1 (t-x)Q(t)w_4(t)\,\mathrm{d}t \qquad (0 \le x \le 1)· \tag{12}$$

则 $w_4(1)=0$,

$$w_4'(x)=-1-\rho\int_x^1 Q(t)w_4(t)\,\mathrm{d}t\quad(0<x<1),\quad w_4'(1)=-1,\tag{13}$$

$$w_4''(x)=\rho Q(x)w_4(x)\qquad(\text{a.e. } x\in(0,1))\cdot\tag{14}$$

这就是说 $w_4(x)$ 是(11)的一个解·

注意

$$\int_0^1|w_4'(x)|\,\mathrm{d}x\leq 1+\rho\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1(1-t)Q(t)|u_4(t)|\,\mathrm{d}t\leq$$

$$1+\rho\int_0^1 t(1-t)Q(t)\,\mathrm{d}t\max_{0\leq t\leq 1}|u_4(t)|<+\infty\cdot$$

这就意味着 $w_4'(x)\in AC_{\mathrm{loc}}(0,1]\cap L^1(0,1)$ 且 $w_4(x)\in AC[0,1]$·

我们现在断言:对所有的 $x\in[0,1)$, $w_4(x)>0$,即 $w_4(1)=0$ 是它的唯一零点·如果这个断言不真,则存在一个 $x_0\in[0,1)$,使得在 $(x_0,1)$ 上 $w_4(x)>0$, $w_4(x_0)=w_4(1)=0$,因为 $w_4'(1)=-1$ 及 $w_4(1)=0$,能够推出,在 $x=1$ 的一个左邻域中 $w_4(x)>0$·由 Rolle 定理可知,存在一个 ξ 使得 $w_4'(\xi)=0$·另一方面,从(13)可以导出

$$w_4'(\xi)=-1-\rho\int_\xi^1 Q(t)w_4(t)\,\mathrm{d}t<0\cdot$$

矛盾·这表明我们的断言是真的·也就是说, $w_4(x)$ 一定是(11)的唯一正解,而且(14)表明 $w_4(x)$ 在 $[0,1]$ 上是凸的·

同理,我们可以证明初值问题

$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w\qquad(0<x<1),\\ w(0)=0,\quad w'(0)=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}w''=\rho Q(x)w\qquad(0<x<\eta),\\ w(\eta)=0,\ w'(\eta)=-1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w\qquad(\eta<x<1),\\ w(\eta)=0,\ w'(\eta)=1\end{cases}$$

都有唯一正解 $w_1(x)$, $w_2(x)$ 和 $w_3(x)$,它们分别在 $[0,\eta]$, $[\eta,1]$ 和 $[0,1]$ 上是凸的·于是我们有

$$\begin{cases}x\leq w_1(x)\leq w_1(\eta)x/\eta,\quad 0\leq w_2(x)\leq w_2(0)\qquad(x\in[\eta,1]),\\ 0\leq w_3(x)\leq w_3(1),\quad(1-x)\leq w_4(x)\leq w_4(\eta)(1-x)/(1-\eta)\quad(x\in[\eta,1])\cdot\end{cases}\tag{15}$$

令

$$W(x)=\begin{vmatrix}w_4(x)&w_1(x)\\ w_4'(x)&w_1'(x)\end{vmatrix}\qquad(0<x<1)\cdot$$

那么

$$W'(x)=\begin{vmatrix}w_4'(x)&w_1'(x)\\ w_4'(x)&w_1'(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}w_4(x)&w_1(x)\\ \rho Q(x)w_4(x)&\rho Q(x)w_1(x)\end{vmatrix}=0\cdot$$

对 $x\in(0,1)$ 几乎处处成立·根据引理 1 和(15),(12),(13)以及

$$\begin{cases} w_1(x) = x + \rho\int_0^x (x - t)Q(t)w_1(t)\,\mathrm{d}t & (0 \le x \le 1), \\ w_1'(x) = 1 + \rho\int_0^x Q(t)w_1(t)\,\mathrm{d}t & (0 \le x < t), \end{cases}$$

我们得到 $W_x \equiv w_4(0) = w_1(1),\ x \in [0,1]$·

类似地,我们有

$$\begin{vmatrix} w_2(x) & w_1(x) \\ w_2'(x) & w_1'(x) \end{vmatrix} \equiv w_2(0) = w_1(\eta) \qquad (x \in [0,\eta]),$$

$$\begin{vmatrix} w_4(x) & w_3(x) \\ w_4'(x) & w_3'(x) \end{vmatrix} \equiv w_4(\eta) = w_3(1) \qquad (x \in [\eta,1])· \tag{16}$$

这就完成了定理 1 的证明

定理 2 的证明 当 $\alpha\eta < 1$ 时,我们可以选取 $\rho = 0$· 此时,我们有:

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) = 1 - \alpha\eta > 0·$$

当 $\alpha\eta = 1$ 即 $\alpha = 1/\eta$ 时,我们可选 $\rho > 0$ 充分小· 此时我们有

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) = 1 + \rho\int_0^1 (1 - t)Q(t)w_1(t)\,\mathrm{d}t -$$
$$\alpha\left(\eta + \rho\int_0^\eta (\eta - t)Q(t)w_1(t)\,\mathrm{d}t\right) = \rho\int_\eta^1 (1 - t)Q(t)w_1(t)\,\mathrm{d}t +$$
$$\rho\int_0^\eta (1 - t - \alpha\eta + \alpha t)Q(t)w_1(t)\,\mathrm{d}t > 0·$$

当 $\alpha\eta > 1$ 时,我们可选 $\rho > 0$ 使得

$$\rho\int_\eta^1 (1 - t)Q(t)\,\mathrm{d}t \ge \alpha·$$

此时,我们有

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) = w_4(\eta)w_1'(\eta) - w_4'(\eta)w_1(\eta) - \alpha w_1(\eta) >$$
$$w_1(\eta)\left(1 + \rho\int_\eta^1 Q(t)w_4(t)\,\mathrm{d}t - \alpha\right) >$$
$$w_1(\eta)\left(\rho\int_\eta^1 (1 - t)Q(t)\,\mathrm{d}t - \alpha\right) \ge 0·$$

总之,对每个给定的 $\alpha \in R$,都存在一个 $\rho \ge 0$ 使得 $w_1(1) - \alpha w_1(\eta) > 0$·

根据引理 1,(15) 和 (16),不难验证函数,由 (3) 定义的 $y(x)$ 是线性三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' + \rho Q(x)y = h(x) & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases} \tag{17}$$

的一个解·

下面,我们来证唯一性· 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是 (17) 的解· 令 $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$,则

$$\begin{cases} y''(x) = \rho Q(x)y(x) & (\text{a.e. } x \in (0,1)), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \alpha y(\eta)· \end{cases}$$

注意,该齐次线性方程有一个通解

$$y(x) = C_1 w_1(x) + C_2 w_4(x) \qquad (0 \le x \le 1),$$

此处 C_1 和 C_2 是任意常数· 由边界条件和 (2) 可以推出 $C_1 = C_2 = 0$,即在 $[0,1]$ 之上 $y(x) \equiv$

0，唯一性得证·

定理 2 的其余部分可从(3)推出·定理 2 证毕·

在下文中，我们假设存在一个 $\rho \geq 0$ 使得 $w_1(1) - \alpha w_1(\eta) > 0$·令

$$Ly = -y'' + \rho Q(x)y,$$

$$D(L) = \Big\{ y(x) \in A(C[0,1]; y'(x) \in L^1(0,1) \cap AC_{\mathrm{loc}}(0,1),$$

$$y''(x) \in L^*(0,1),\quad y(0) = 0,\quad y(1) = \alpha y(\eta) \Big\}·$$

$$L^*(0,1) = \Big\{ h(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1);\ \| h \|^* < +\infty \Big\},$$

此处 $\| h \|^* = \int_0^\eta w_1(x) | h(x) | \mathrm{d}x + \int_\eta^1 w_4(x) | h(x) | \mathrm{d}x$·

由定理 1 和定理 2，我们能够导出两个结论，第一，$L: D(L) \to L^*(0,1)$ 是逆正的，即

$$y(x) \in D(L),\ (Ly)(x) \geq 0, \text{a. e. } x \in (0,1) \Rightarrow y(x) \geq 0,\ x \in [0,1],$$

通常称之为极值原理(见[4])·第二，存在一下正数 C，使得

$$\| L^{-1} h \| \leq C \| h \|^* \qquad (\forall h \in L^*(0,1)),$$

此处 $\| \cdot \|$ 是通常的上确界模·

3　结果的证明

在本节中，我们将给出定理 3 和定理 4 的证明·

定理 3 的证明　我们定义一个映射 $\Phi: K \to K$：

$$(\Phi y)(x) = \begin{cases} \dfrac{w_4(\eta) w_1(\eta)}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)} \left(\displaystyle\int_0^\eta \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)} Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t + \int_\eta^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)} Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t \right) \\ \hfill (x = \eta), \\ w_2(x) \displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)} Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t + w_1(x) \int_x^\eta \frac{w_2(t)}{w_1(\eta)} Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta) \dfrac{w_1(x)}{w_1(\eta)} \qquad (0 \leq x \leq \eta), \\ w_4(x) \displaystyle\int_\eta^x \frac{w_3(t)}{w_4(\eta)} Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t + w_3(x) \int_x^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)} Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta) \dfrac{w_4(x) \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)} \qquad (\eta \leq x \leq 1), \end{cases}$$

$$K = \Big\{ y(x) \in [0,1]; y(x) \geq 0, x \in [0,\eta] \text{ 且 } y(x) \geq \sigma \| y \|, x \in [\eta,1] \Big\},$$

此处 $\| y \| = \max \Big\{ | y(x) |; 0 \leq x \leq 1 \Big\}$，$\sigma$ 是由(9)定义的常数·显然 K 为 $C[0,1]$ 的锥·根据 Φ 的定义，引理 1，定理 1 和定理 2，我们知道对每个固定的 $y(x) \in K$，我们有

$$\begin{cases} (\Phi y)(0) = 0,\quad (\Phi y)(1) = \alpha (\Phi y)(\eta), \\ (\Phi y)(x) \geq 0,\quad x \in [0,1], \\ (\Phi y)(\eta) \geq \dfrac{\min\Big\{ w_4(\eta), w_1(\eta) \Big\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)} (I_1 + I_4), \end{cases} \tag{18}$$

$$I_1 = \int_0^\eta w_1(t) Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t,$$

$$I_4 = \int_\eta^1 w_4(t) Q(t) f^*(y(t)) \mathrm{d}t,$$

$$(\Phi y)(\eta) \leq \frac{\max\Big\{ w_4(\eta), w_1(\eta) \Big\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)} (I_1 + I_4), \tag{19}$$

$$(\Phi y)(x) \le I_1 + I_4 + (\Phi y)(\eta) \max_{\eta \le x \le 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\} \qquad (0 \le x \le 1),$$

于是,由(19)可知

$$\|\Phi y\| \le \left\{1 + \max_{\eta \le x \le 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}\frac{\max\left\{w_4(\eta), w_1(\eta)\right\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}\right\}(I_1 + I_4) = M(I_1 + I_4), \tag{20}$$

此外 M 是由(8)定义的常数 · 另一方面,由(18)推出

$$\|\Phi y\| \le \left\{\frac{w_1(x) - \alpha w_1(\eta)}{\min\left\{w_4(\eta), w_1(\eta)\right\}} + \max_{\eta \le x \le 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}\right\}(\Phi y)(\eta) \cdot$$

于是

$$(\Phi y)(x) \ge (\Phi y)(\eta) \min_{\eta \le x \le 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}_{(\eta \le x \le 1)} \ge$$

$$\frac{\min\limits_{\eta \le x \le 1}\left\{\dfrac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}{\dfrac{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}{\min\left\{w_4(\eta), w_1(\eta)\right\}} + \max\limits_{\eta \le x \le 1}\left\{\dfrac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}\|\Phi y\| =$$

$$\sigma\|\Phi y\| \quad (\eta \le x \le 1) \cdot$$

这表明 $\Phi(K)$ 是 K 的一个子集 ·

现在断言 Φ 是一个全连续映射 · 事实上, 任意固定 $r > 0$, 令 $\Omega = \left\{y(x) \in C[0,1];\ \|y\| < r\right\}$ · 对任何的 $y(x) \in K \cap \Omega$,由 Φ 的定义及(20),我们可得

$$\|\Phi y\| \le M(I_1 + I_4) \le$$

$$M \max_{0 \le y \le r} f^*(y)\left(\int_0^\eta w_1(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t + \int_\eta^1 w_4(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t\right) = B_r \cdot \tag{21}$$

$$(\Phi y)'(x) = \begin{cases} w_2'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_1'(x)\int_x^\eta \frac{w_2(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta)\dfrac{w_1'(x)}{w_1(\eta)} \qquad (0 < x \le \eta), \\ w_4'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_3(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_3'(x)\int_x^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta)\dfrac{w_4'(x) + \alpha w_3'(x)}{w_4(\eta)} \qquad (\eta \le x \le 1) \cdot \end{cases} \tag{22}$$

于是

$$|(\Phi y)'(x)| \le -w_2'\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_1'(x)\int_x^\eta Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t +$$

$$(\Phi y)(\eta)\frac{w_1'(x)}{w_1(\eta)} \qquad (0 < x \le \eta) \le$$

$$\max_{0 \le y \le r} f^*(y)\left(\frac{-w_2'(x)}{w_1(\eta)}\int_0^\eta w_1(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t + w_1'(x)\int_x^\eta Q(t)\,\mathrm{d}t\right) +$$

$$B_r\frac{w_1'(x)}{w_1(\eta)} = G_r(x) \qquad (0 < x < \eta),$$

$$|(\Phi y)'(x)| \le -w_4'(x)\int_\eta^x Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_3'(x)\int_\eta^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t +$$

$$(\Phi y)(\eta)\frac{-w_4'(x)+\alpha w_1(x)}{w_4(\eta)}\le$$

$$\max_{0\le y\le r} f^*(y)\left[-w_4'(x)\int_\eta^x Q(t)\,\mathrm{d}t+\frac{w_3'(x)}{w_4(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right]+B_r\frac{-w_4'(x)+\alpha w_3'(x)}{w_4(\eta)}=$$

$$G(x)\qquad(\eta\le x<1)\cdot$$

从而,我们得到

$$\int_0^1|(\Phi y)'(x)|\,\mathrm{d}x\le\int_0^1 G_r(x)\,\mathrm{d}r=$$

$$\max_{0\le y\le r} f^*(y)\left[2\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+2\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right]+(2+\alpha)B_r<+\infty, \tag{23}$$

这表明$(\Phi y)'(x)\in L^1(0,1)$且$(\Phi y)(x)\in AC[0,1]$· 再则(22)和(23)蕴含着$\Phi(K\cap\Omega)$在K中是相对紧的(根据Ascoli-Arzela定理)· 此外,$f^*(y)$在$\mathbf{R}_+$上的连续性可推出Φ在K上的连续性· 总之,是Φ一个全连续映射·

另外,由(22)可知$(\Phi y)'(\eta-0)=(\Phi y)'(\eta+0)$,于是$(\Phi y)'(x)\in AC_{\mathrm{loc}}(0,1)$· 根据上面的讨论,我们可以断言,$\Phi$在$K$中的每个不动点都是(1)的解·

现在我们来证明在定理3的条件下,Φ在K中必有不动点·

对于给定的$r_1,r_2>0$,我们记

$$\Omega_1=\{y\in C[0,1];\ \|y\|<r_1,\quad \Omega_2=\{y\in C[0,1]:\ \|y\|<r_2\}\cdot$$

由(6)和(7)可知,存在一个充分小的$\varepsilon>0$,使得

$$(\beta+\varepsilon)M\left[\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right]<1,$$

$$(r-\varepsilon)\frac{\sigma w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t>1\cdot$$

现在假设(4)成立· 因为$\limsup_{y\to0}\frac{f^*(y)}{y}\le\beta$,我们可选取$r_1>0$,使得

$$f^*(y)\le(\beta+\varepsilon)y\text{ 对任意的 }y\in[0,r_1]\text{ 成立}\cdot$$

此时,由(20)推出,对任意的$y\in K\cap\partial\Omega_1$,我们有

$$\|\Phi y\|\le M\left[\int_0^\eta w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t\right]\le$$

$$M(\beta+\varepsilon)\left[\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t)\,\mathrm{d}t\right]r_1<$$

$$r_1=\|y\|\cdot$$

根据$\liminf_{y\to\infty}\frac{f^*(y)}{y}\ge\gamma$,存在一个正数$r_2>r_1$使得

$$f^*(y)\ge(\gamma-\varepsilon)y\text{ 对任意的 }y\ge\sigma r_2\text{ 成立}\cdot$$

此时,由Φ的定义推知,对任何的$y\in K\cap\partial\Omega_2$,我们有

$$\|\Phi y\|\ge(\Phi y)(\eta)\ge\frac{w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t\ge$$

$$(\gamma-\varepsilon)\frac{\sigma w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\left[\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right]r_2>$$

$$r_2=\|y\|\cdot$$

根据定理B的第一部分,我们知道Φ在$K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$中有一个不动点· 设$y(x)$是一个不

动点，则 $y(x)=(\Phi y)(x)$，$0\le x\le 1$，是(1)的一个正解，显然 $y(x)\ge\sigma\|y\|\ge\sigma r_1$，$x\in[\eta,1]$，且 $y(x)\ge y(\eta)\dfrac{w_1(x)}{w_1(\eta)}\quad(x\in[0,\eta])$.

其次我们假设(5)成立．由 $\liminf\limits_{y\to 0}\dfrac{f^*(y)}{y}\ge\gamma$，我们知道，存在一个 $r_1>0$，使得

$f^*(y)\ge(\gamma-\varepsilon)y$ 对任意的 $y\in[0,r_1]$ 成立．

此时，对任意的 $y\in K\cap\partial\Omega_1$，我们有

$$\|\Phi y\|\ge\frac{w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\ge$$
$$(r-\varepsilon)\frac{w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\left(\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)r_1>$$
$$r_1=\|y\|.$$

因为 $\limsup\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f^*(y)}{y}\le\beta$，我们可选 $N>r_1$，使得

$f^*(y)\le(\beta+\varepsilon)y$ 对任意的 $y\ge N$ 成立．

令 $r_2>N$，使得

$$r_2>\frac{M\max\left\{f^*(y);0\le y\le N\right\}\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)}{1-(\beta+\varepsilon)M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)}.$$

此时，对任何的 $y\in K\cap\partial\Omega_2$，我们有

$$\|\Phi y\|\le M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\right)\le$$
$$M\left(\int_{0\le y(t)\le N,0\le t\le\eta} w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t+\int_{0\le y(t)\le N,\eta\le t\le 1} w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\right)+$$
$$M\left(\int_{N\le y(t)\le r_2,0\le t\le\eta} w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t+\int_{N\le y(t)\le r_2,\eta\le t\le 1} w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\right)\le$$
$$M\max\left\{f^*(y);0\le y\le N\right\}\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)+$$
$$(\beta+\varepsilon)M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)r_2<$$
$$r_2=\|y\|.$$

定理B的第二部分表明 Φ 有一个不动点 $y(x)\in K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$．这个不动点是(1)的一个正解．至此，定理3证毕．

定理4的证明 因为 $\alpha\eta\in(0,1)$，选取 $\rho=0$，则 $w_1(1)-\alpha w_1(\eta)=1-\alpha\eta>0$．由定理4的假设可以推出 β 可以任意小而 r 可以任意大．因此，(6)和(7)都成立，定理4可由定理3推出．

致谢 作者感谢王俊禹教授的帮助和鼓励．

[参 考 文 献]

[1] MA Ru-yun. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary value problems[J]. Electron J Differential Equations, 1999, **34**: 1—8.

[2] Gupta C P. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1997, **205**(2): 586–597.

[3] Krasosel'skill M A. Positive Solutions of Operator Equation[M]. Gorningen: Noordhoff, 1964.

[4] Cabada A, Nieto J J. Fixed points and approximate solutions for nonlinear operator equations[J]. J Comput Appl Math, 2000, **113**(1-2): 17–25.

Positive Solutions to a Singular Second Order Three-Point Boundary Value Problem

QU Wen-bo[1], ZHANG Zhong-xin[2], WU Jun-de[3]

(1. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China;
2. Insitute of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, P R China;
3. Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 312000, P R China)

Abstract: A fixed point theorem is used to study a singular second order three-point boundary value problem. The problem is more general. Combining the method of constructing Green functions with operators defined piecewise, the existence result of positive solutions to a singular second order three-point boundary value probelm is established. The nonlinearity can be allowed to change sign.

Key words: positive solution; boundary value problem; existence