

用离散速度方法计算浅水长波方程

施卫平¹, 耿爱芳², 张中新¹

(1. 吉林大学 数学系, 长春 130012; 2. 长春光学精密机械学院, 长春 130022)

摘要: 用离散速度法计算浅水波方程, 将空气动力学方程和浅水波方程作了比较, 用 Nadiga 提出的近平衡流动方法模拟浅水波方程的连续和间断解. 计算了一维的溃坝波问题和 Thacker 提出的连续解问题, 结果与精确解作了比较, 并且计算了水流跃过障碍物的问题.

关键词: 浅水波; 离散速度法

中图分类号: O352 **文献标识码:** A

1 引言

浅水波方程与无粘可压缩气体动力学方程相似. 为了数值求解无粘可压缩气体流动问题, 可采用离散速度的方法^[1], 将气体的宏观运动理解为微观粒子运动的统计平均结果. 进一步假设粒子的速度只能取有限几个值, 这就是离散速度方法的基本思想. 物理量, 如速度、密度、温度等可由粒子分布函数的统计平均值得到. 这一方法与格子气(Lattice Gas)方法^[2]和格子 Boltzmann(Lattice Boltzmann)方法^[3,4]很相似. LG 和 LB 方法分别是 1986 年和 1992 年提出来的, 这两种方法受到了统计物理、流体力学、计算数学等方面学者的关注, 它被广泛用于流体力学、统计物理和化学反应扩散等问题的计算. LG 和 LB 方法, 算法简单, 适合并行计算, 能计算复杂的流动问题.

Nadiga 提出的离散速度方法是一种流矢量分裂法, 它分别计算沿正、负两个方向流动的流矢量, 从而达到分裂流矢量的目的. 离散速度法用于计算激波问题^[1]和浅水波问题^[5]得到了很好的结果. 本文应用此方法计算了两个浅水波算例: 二维的抛物面水波问题^[6]和一维溃坝波问题, 前者为连续解问题, 后者为间断解问题.

2 浅水波方程与可压缩气体方程的比拟

在考虑浅水长波问题时, 认为水是无粘、不可

压缩的, 假定水深远远小于波长, 并认为水平方向的速度沿铅直方向无很大的变化, 则浅水波方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial h}{\partial x_i} = -g \frac{\partial h_b}{\partial x_i} \end{cases} \quad (1)$$

其中 g 为重力加速度, $i, j = 1, 2$; $u_i = u_i(x_1, x_2, t)$ 为水平速度分量沿铅直方向的平均值, $h = h(x_1, x_2, t)$ 为河床底部至水面的高度, $h_b = h_b(x_1, x_2)$ 为河床底部的高度, 是已知量; 则 $h + h_b$ 为水面的位置.

方程组(1)与二维无粘性可压缩气体方程完全类似, 气体的质量和动量方程可写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \end{cases} \quad (2)$$

其中 ρ, p 分别为气体的密度和压力, f_i 为外力(如重力)的 x_i 方向的分量. 比较(1), (2)两方程组, 令

$$\rho = h, \quad p = gh^2/2, \quad f_i = -g \frac{\partial h_b}{\partial x_i} \quad (3)$$

将(3)式中各式右端各项代入方程组(2), 即可得到方程组(1), (3)式中左端各项均为气体方程中的量, 右端均为水波方程的量, 应用这种比拟关系, 可以将气体方程的数值计算方法用于水波问题的计算.

3 离散速度模型-9 速度模型

Nadiga^[4]提出了计算可压缩气体的离散速度模型. 具体方法是: 将二维平面计算区域划分成规

收稿日期: 2000-02-25; 修改稿收到日期: 2002-04-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19702005).

作者简介: 施卫平(1963-), 男, 副教授, 博士.

则的正方形格子,把流体的流动理解为粒子从一个节点流向相邻的节点,如图 1 所示,每一节点处的粒子可分别沿 9 个速度方向运动(包括一个零速度),速度矢量为 q_α , ($\alpha = 0, \dots, 8$):

$$\begin{aligned} |q_\alpha| &= q \quad (\alpha = 1, 3, 5, 7) \\ |q_\alpha| &= \sqrt{2}q \quad (\alpha = 2, 4, 6, 8) \\ |q_\alpha| &= 0 \quad (\alpha = 0) \end{aligned}$$

分别表示沿水平、垂直和对角线方向的速度和零速度。粒子在一个时间步长内运动到相邻的节点处,在此节点处与其它粒子发生碰撞,碰撞过程要求满足质量和动量守恒,在某些情况下也要求满足能量守恒,本模型即满足能量守恒条件。

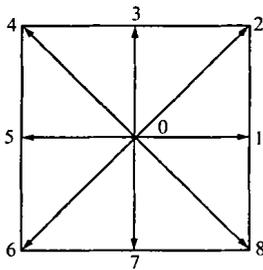


图 1 9 速度模型的粒子速度矢量

Fig.1 Particle velocity vectors in the nine-velocity model

如果用 $f_\alpha(x_1, x_2, t)$ 表示在 (x_1, x_2) 节点处速度为 q_α 的粒子存在的概率密度(或称为粒子分布函数),则这一模型在碰撞过程中的细致平衡条件关系^[5]为

$$\begin{aligned} f_0 f_2 &= f_1 f_3, f_0 f_4 = f_3 f_5, f_0 f_6 = f_5 f_7, \\ f_0 f_8 &= f_7 f_1, f_1 f_5 = f_3 f_7 \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 中的第一式表示一个速度为 q_2 的粒子和速度为 q_0 的静止粒子碰撞后,变为速度为 q_1 和 q_3 的两个粒子,反之,速度为 q_1 和 q_3 的两粒子碰撞后,变为速度为 q_0 和 q_2 的两个粒子,(4) 式中的第四式表示速度为 q_1 和 q_5 的两个粒子对头相碰后,速度方向旋转 90 度角。由(4) 式也可推导出 $f_2 f_6 = f_4 f_8$ 。

节点处的宏观物理量:密度、动量和能量可由 f_α 求和得到

$$\begin{cases} \rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \\ \rho u_1 = q(f_1 + f_2 - f_4 - f_5 - f_6 + f_8) \\ \rho u_2 = q(f_2 + f_3 + f_4 - f_6 - f_7 - f_8)/2 \\ \rho E = q^2(f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + 2(f_2 + f_4 + f_6 + f_8))/2 \end{cases} \quad (5)$$

E 表示节点处单位质量的总能量, $E = (u_1^2 + u_2^2)/2 + e$, e 表示内能,对于宏观的静止状态, $u_i = 0$ ($i = 1, 2$),由(4)、(5) 式可得

$$\begin{aligned} f_0 &= \rho(1 - e/q^2)^2, f_1 = \rho(1 - e/q^2)e/(2q^2), \\ f_2 &= \rho(e/q^2)^2/4, f_3 = f_5 = f_7 = f_1, f_4 = f_6 = f_8 = f_2 \end{aligned} \quad (6)$$

以下讨论用 9-速度模型计算浅水波方程的方法,应用第二节中所述的气体方程与浅水波方程的比拟关系,9 速度模型也可用于浅水波方程的计算,(5) 式中的速度 u_i 仍表示浅水波方程(1) 式中的速度,(5) 式中的 ρ 对应(1) 式中的 h ,限制速度 q 的范围,要求 $|u| < q$,且使(6) 式中的 f_α 都为正数,为了方便,把(1) 式写成无量纲的守恒方程形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu_i}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial hu_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (hu_i u_j) + \frac{\partial^2 h^2/2}{\partial x_i^2} = -h \frac{\partial h}{\partial x_i} \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式中的 h 和 u_i 为无量纲量,分别是有量纲量除以来流的水深 h 和特征速度 \sqrt{gh} 。参照(3) 式,可得(5) 式中的 ρ 对应于(7) 式中的 h ,内能 ρe 对应于(7) 式中的重力势能 $h^2/2$ 。(6) 式是速度 u 为零的静止平衡状态,若某一节点处速度 u 不等于零,可将粒子的分布函数假定为局部的相对平衡状态,即粒子的速度 c_α 为

$$c_\alpha = u + q_\alpha, \quad (\alpha = 0, \dots, 8)$$

为使 f_α 都为正数,且 $|u| < q$,取 $q = \max(v|u_1|, \sqrt{h}/2)$ 或 $q = \max(v|u_2|, \sqrt{h}/2)$,对于有间断的水流,取 $v = 1.3$,其它情况,取 $v = 1.1$ ^[5]。粒子分布函数的演化方程可写为

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_{\alpha i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} = \Omega_\alpha \quad (\alpha = 0, \dots, 8) \quad (8)$$

这里 Ω_α 是碰撞项,上式左端表示 f_α 的随体导数。碰撞项 Ω_α 满足质量和动量守恒:

$$\sum_{\alpha=0}^8 \Omega_\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=0}^8 c_{\alpha i} \Omega_\alpha = 0$$

由(8) 式对 α 求和得质量和动量守恒方程

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_\alpha c_{\alpha j}) = 0 \\ \frac{\partial hu_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_\alpha c_{\alpha i} c_{\alpha j}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

由 q_α 的对称性得

$$f_\alpha c_{\alpha i} = f_\alpha (u_i + q_{\alpha i}) = hu_i \quad (10)$$

因为 $f_{\alpha q \alpha i} = 0$

$$f_{\alpha C \alpha i} C_{\alpha j} = f_{\alpha} (u_i + q_{\alpha i}) (u_j + q_{\alpha j}) = hu_i u_j + f_{\alpha q \alpha i} q_{\alpha j} = ne \delta_{ij} + hu_i u_j + h^2 \delta_{ij} / 2 + hu_i u_j \quad (11)$$

为了方便, 将(7) 式改写成

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} G\right)^T = b \quad (12)$$

其中 $F = \begin{pmatrix} h \\ hu_i \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \frac{\partial hu_b}{\partial \alpha_i} \end{pmatrix}$

$$G = [hu_j, hu_i u_j + h^2 \delta_{ij} / 2] = \begin{bmatrix} f_{\alpha C \alpha j} & f_{\alpha C \alpha i} C_{\alpha j} \end{bmatrix}$$

4 数值计算步骤

将二维计算区域分割成以节点为中心的正方形小格, 小正方形内流体的速度和水深由节点处的值表示, 节点处的值按以下步骤演化:

首先给定每个节点处的初值 $f = (h, hu_i)$

第 1 步: 用(6) 式求得 f_0, f_1, f_2 : 取 $q =$

$$\max(|Y|u|, \sqrt{h/2}), f_0 = h(1 - h/(2q^2))^2, f_1 = h^2(1 - h/(2q^2))/(4q^2), f_2 = h(h/(2q^2))^2/4$$

第 2 步: 计算流分裂矢量 G^+ 和 G^- :

$$G^+ = \begin{cases} \begin{matrix} c_{\alpha 1}^{>0} & c_{\alpha 2}^{>0} & c_{\alpha 3}^{>0} \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{matrix} \begin{matrix} f_{\alpha C \alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 1} C_{\alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 2} C_{\alpha 1} \\ f_{\alpha C \alpha 2} & f_{\alpha C \alpha 1} C_{\alpha 2} & f_{\alpha C \alpha 2} C_{\alpha 2} \\ f_{\alpha C \alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 1} C_{\alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 2} C_{\alpha 1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_{\alpha 1}^{<0} & c_{\alpha 2}^{<0} & c_{\alpha 3}^{<0} \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{matrix} \begin{matrix} f_{\alpha C \alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 1} C_{\alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 2} C_{\alpha 1} \\ f_{\alpha C \alpha 2} & f_{\alpha C \alpha 1} C_{\alpha 2} & f_{\alpha C \alpha 2} C_{\alpha 2} \\ f_{\alpha C \alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 1} C_{\alpha 1} & f_{\alpha C \alpha 2} C_{\alpha 1} \end{matrix} \end{cases}$$

其中 $c_{\alpha}^{>0}$ 表示只对 C_{α} 的 x_1 方向分量 $C_{\alpha 1} > 0$ 的速度求和

第 3 步: 用 minmod 函数插值求得两相邻节点之间的流矢量, 插值得得 G_{11}^+, G_{12}^+ 和 G_{13}^+ 在 $(i - \frac{1}{2}, j)$ 点的值, G_{21}^+, G_{22}^+ 和 G_{23}^+ 在 $(i, j - \frac{1}{2})$ 点的值。

$$G_{12}^+(i + \frac{1}{2}, j) = G_{11}^+(i, j) + \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta_{bak} G_{11}^+(i, j), \Delta_{fwd} G_{11}^+(i, j))$$

$$G_{21}^-(i, j - \frac{1}{2}) = G_{21}^-(i, j) - \frac{1}{2} \text{minmod}(\Delta_{bak} G_{21}^-(i, j), \Delta_{fwd} G_{21}^-(i, j))$$

其中前差 $\Delta_{fwd} G_{11}^+(i, j) = G_{11}^+(i + 1, j) - G_{11}^+(i, j)$
后差 $\Delta_{bak} G_{21}^-(i, j) = G_{21}^-(i, j) - G_{21}^-(i, j - 1)$
 $\text{minmod}(p, q)$ 函数为 TVD (Total Variation Diminishing) 算子, 定义为

$$\text{minmod}(p, q) = \text{sgn}(p) \begin{cases} 0 & , \text{sgn}(p) \neq \text{sgn}(q) \\ \min\{|p|, |q|\} & , \text{sgn}(p) = \text{sgn}(q) \end{cases}$$

$\text{sgn}(p)$ 代表 p 的正、负号。

第 4 步: 计算

$$G(i + \frac{1}{2}, j) = G^+(i + \frac{1}{2}, j) + G^-(i + \frac{1}{2}, j) \text{ 和 } G(i, j + \frac{1}{2}) = G^+(i, j + \frac{1}{2}) + G^-(i, j + \frac{1}{2})$$

第 5 步:

$$F^{t_0 + \Delta t/2} = F^{t_0} - \frac{\Delta t}{2} (\nabla G^{t_0} - h^{t_0} \nabla b)$$

其中

$$\nabla \begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{pmatrix} = (G_{11}(i + \frac{1}{2}, j) - G_{11}(i - \frac{1}{2}, j)) / \Delta x + (G_{21}(i, j + \frac{1}{2}) - G_{21}(i, j - \frac{1}{2})) / \Delta y$$

第 6 步: 用 $F^{t_0 + \Delta t/2}$ 代替第 1 步中的 F , 重复 1-4

步, 求得 $G^{t_0 + \Delta t}$, 则

$$F^{t_1} = F^{t_0} - \Delta t (\nabla G^{t_0 + \Delta t/2} - h^{t_0 + \Delta t/2} \nabla b)$$

以上计算方法对于时间和空间都是二阶精度的^[5]。

5 三个算例

算例 1 一维溃坝波问题: 在 $t = 0$ 时, 水坝突然溃决, 溃坝后的洪水沿 x 方向前进, 地面是水平的,

$\frac{\partial hu_b}{\partial \alpha} = 0$, 初始条件为

$$h(x, 0) = \begin{cases} 10.8m & x < 0 \\ 1.8m & x > 0 \end{cases} u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2.667m/s & x > 0 \end{cases}$$

计算区域被分成 200 个节点, $t = 72.43s$ 时的数值结果与精确解^[7] 如图 2 所示, 在间断后的平台区间内, 精确值 $h_{exact} = 4.716m$, 计算值 $h_{num} = 4.713m$, 二者很接近, 此方法很好地模拟了具有间断解的溃坝波问题。

算例 2 假定河床底部是水平的, $\frac{\partial hu_b}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial hu_b}{\partial \alpha_2} = 0$, Thacker W C^[8] 给出了浅水波方程(1) 的一个二维解析解。

$$u_1 = x_1 t / (t^2 + T^2), u_2 = x_2 t / (t^2 + T^2)$$

$$h = h_{max} [T^2 / (t^2 + T^2) - (x_1^2 + x_2^2) (T^2 / (t^2 + T^2))^2 / R_0^2]$$

其中 $T = \sqrt{2gh_{max}}$, 对应 $t = 0$ 时的初值条件为平面上凸起的旋转抛物面, $h = h_{max} (1 - (x_1^2 + x_2^2) / R_0^2)$, 当 $x_1^2 + x_2^2 < R_0^2$ 时, h_{max} 为初始时刻抛物面中心位置处的高度, R_0 为初始时刻抛物面的半径, 水面边界满足条件 $h = 0$, 即 $R = R_0 ((t^2 + T^2) / T^2)^{1/2}$, 边界为随时间逐渐扩大的圆^[6]. 计算区域分成 80×80 个单元, 图3是水面中心高度随时间的变化, $t = 20$ 时, 计算值 $h_{num} = 0.35705$, 精确值 $h_{exact} = 0.37500$, 二者非常接近随后, 当抛物面的边界超出计算区域时, 计算过程结束. 图4是在 $t = 10$ 时, 水面高度在 $x_2 = 0$ 处的剖面图. 计算结果与精确解很相近. 计算中, 取 $g = 1, h_{max} = 1.5, \Delta x = 1, \Delta t = 0.5, R_0 = 20$, 都是无量纲量.

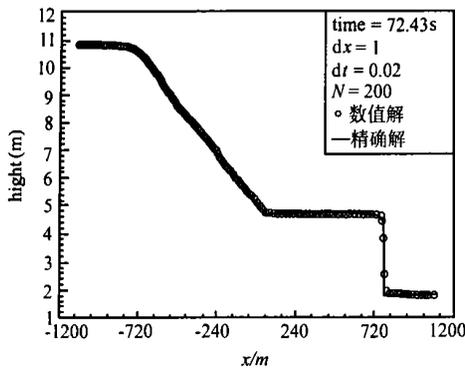


图2 溃坝的精确解和数值解
Fig.2 Numerical solution and exact solution of dam-breaking wave

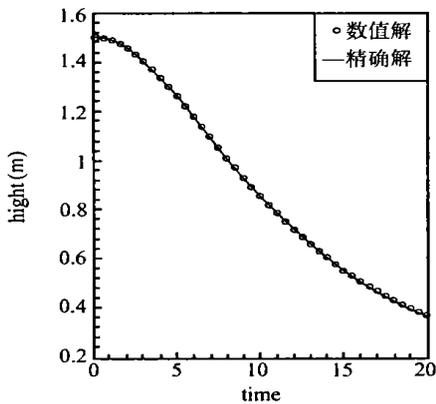


图3 中心高度随时间变化
Fig.3 The exact solution and numerical solution of the central height variation with time

算例3 LeVeque^[9]给出的一维水波跃过障碍的问题. 一维空间区域 $x \in [0, 1]$ 被分成200个节点, 在 $x = 0.5$ 附近河床向上凸起, 河床高度分布曲线为

$$h_b(x, 0) = \begin{cases} 0.25[\cos(\pi(x - 0.5)/0.1) + 1] & \text{if } |x - 0.5| < 0.1 \\ 0 & \text{if } |x - 0.5| \geq 0.1 \end{cases}$$

初始时刻流体是静止的, $u(x, 0) = 0$, 水面高度为

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1 - h_b(x) + \epsilon & \text{if } |x - 0.5| < 0.05 \\ 0 & \text{if } |x - 0.5| \geq 0.05 \end{cases}$$

理论分析可知, 高度为 ϵ 的扰动以特征速度 $\pm \sqrt{gh}$ 分别向左、右两边传播. 计算过程中, 取 $g = 1, \Delta x = 0.005, \Delta t = 0.0025$. 图5给出了 $\epsilon = 0.2, t = 0.7$ 时的水波高度的计算结果. 这一结果与文献[9]中的结果一致. 这表明本文的计算方法可以模拟河床高度变化的流动问题.

Nadiga 提出的离散速度方法具有自适应能力, 即粒子速度 q 随 h 和 u 而变化, 计算模型用于连续解和间断解问题都得到了很好的结果, 它也可以用于三维问题的数值计算.

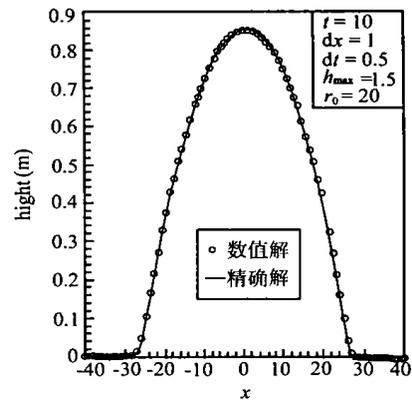


图4 $x_2 = 0$ 处高度沿 x_1 方向分布
Fig.4 The height profile at $x_2 = 0$, the exact solution and the numerical solution at $t = 10$

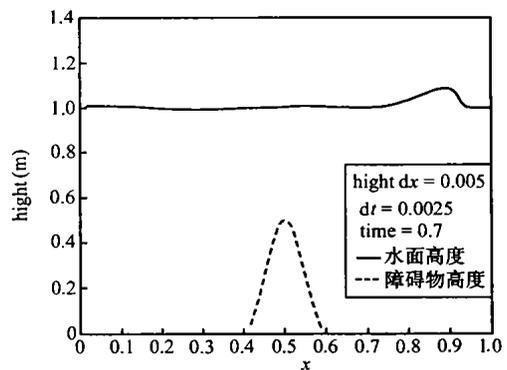


图5 水流跃过障碍物时的水面高度 (实线), 障碍物高度 (虚线)
Fig.5 The surface elevation of the water flowing over the ridge $\epsilon = 0.2, t = 0.7$

参考文献(References):

- [1] Nadiga B T. An euler solver based on locally adaptive discrete velocity [J]. *J. Statistical Physics*, 1995, **81**(2).
- [2] Frish V, Hasslacher B, Poméan Y. Lattice-gas Automata for the Navier-Stokes equation[J]. *Phys. Rev. Lett*, 1986, **56**: 1505-1508
- [3] Chen H, Chen S, Matthaeus W H. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice gas boltzmann method[J]. *Phys Rev*, 1992, **45**: 5337-5342
- [4] Qian Y H, d'huères D, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes [J]. *Euro Phys Lett*, 1992, **17**: 479-484
- [5] Nadiga B T. An adaptive discrete-velocity model for the shallow water equations[J]. *J. Comp. Physics*, 1995, **121**: 271-280
- [6] 施卫平. 用格子 Boltzmann 方程模拟浅水波问题. 力学学报, 1997, **29**: 525-529. (Shi Weiping. A Lattice Boltzmann equation method for the shallow water wave equations [J]. *ACTA Mechanica Sinica* 1997, **29**: 525-529. (in Chinese))
- [7] Augenbaum J. A lagrangian method for the shallow water equations based on a voronoi mesh-one dimensional results[J]. *J. Comp. Phys* 1984, **53**: 240-265
- [8] Thacker W C. Some exact solutions to the nonlinear shallow water wave equations[J]. *J. Fluid Mech*. 1981, **107**: 499-508
- [9] LeVeque R J. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave propagation algorithm [J]. *J. Comput Phys* 1998 146-346

A discrete-velocity model for the shallow water long wave equation

Shi Weiping¹, Geng Aifang², Zhang Zhongxin

(Mechanics Section, Department of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China;

2 Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Changchun 130022, China)

Abstract: A discrete-velocity model is used for solving the shallow water equations. The gas macro-dynamics equations are compared with the shallow water equations and the near-equilibrium flow method given by Nagiga is used to simulate the continue and/or discontinue solutions of the shallow water equation. A one-dimensional Dam-Breaking problem and a continuous solution problem provided by Thacker are studied by the present method and the corresponding solutions are compared with the exact solutions. Lastly, the simulation of the problem for water flow over a ridge is also carried out.

Key words: shallow water equation; discrete velocity method