自反阵的广义特征值反问题

吴春红, 林 鹭*

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 讨论如下广义特征值反问题: 给定矩阵 X, 对角阵 Λ 和广义反射阵 P, 求自反阵 A, B 使得 $AX = BX\Lambda$, 给出了 (A, B) 的一般表达式. 我们把上述问题解的全体记为 S_{AB}. 然后, 讨论了上述问题的最佳逼近问题: 给定任意矩阵 A^*, B^*, 求矩阵 $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in S_{AB}$, 使得在 F-范数意义下 $(\tilde{A}, \tilde{B})$ 为 (A^*, B^*) 的最佳逼近. 证明了此问题有惟一解, 并给出解的表达式, 算法及数值例子.

关键词: 广义特征值; 逆特征值问题; 自反阵; 最佳逼近

中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2006)03-0305-06

由结构动力学等实际问题提出的矩阵广义特征反问题在固体力学, 分子光谱学、结构设计、振动控制、系统参数识别等领域都有重要的应用[1~6]. 近年来, 有关他们的研究非常活跃, 已取得许多研究成果[7~11]. 而关于广义反射阵 P 的自反阵与反自反阵在工程技术和科学计算等领域中应用广泛[12~14].

令 $C^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 阶复矩阵集合; I_k 表示 k 阶单位阵; A^+, A^H, $\|\cdot\|$ 分别表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆, 共轭转置, Frobenius 范数; rank(A), $R(A)$, $N(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩, 列空间, 零空间.

定义 1　$P \in C^{n\times n}$ 称为广义反射阵, 如果它满足: (1) $P = P^H$, (2) $P^2 = I_n$.

如无特别声明, 本文中的 P 都为给定的 n 阶复的广义反射阵.

定义 2　设 $P \in C^{n\times n}$ 为广义反射阵, 称 $A \in C^{n\times n}$ 为关于 P 的自反(反自反)阵, 若: $A = PAP$ ($A = -PAP$). n 阶自反(反自反)阵的全体记为 $RP^{n\times n}$ ($ARP^{n\times n}$);

由定义知若 $P = (e_n, e_{n-1}, \cdots, e_1)$, 其中 e_i 为单位阵 I_n 的第 i 列, 则一个 $n\times n$ 阶自反(反自反)矩阵为中心对称(反对称)阵.

本文讨论如下两类问题:

问题 Ⅰ　给定 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in C^{n\times m}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in C^{m\times m}$ 和广义反射阵 $P \in C^{n\times n}$, 求矩阵 $A, B \in RP^{n\times n}$, 使得

$$AX = BX\Lambda \tag{1}$$

问题 Ⅱ　给定 $A^*, B^* \in C^{n\times n}$, 求矩阵 $\tilde{A}, \tilde{B} \in S_{AB}$, 使得

$$\|[A^*, B^*] - [\tilde{A}, \tilde{B}]\| = \inf_{A, B\in S_{AB}} \|[A^*, B^*] - [A, B]\| \tag{2}$$

其中 $S_{AB} = \{[A, B] \mid AX = BX\Lambda,\ A, B \in RP^{n\times n}\}$ 是问题 Ⅰ 的解集.

若 $B = I_n$, 问题 Ⅰ、Ⅱ 转化为自反阵的特征值反问题.

1　问题的求解

首先我们讨论一下广义反射阵 $P \in C^{n\times n}$. 因 $P^2 = I_n$, 故 P 的特征值只能为 ± 1. 设 1 为 P 的 r 重特征值, 又因为 $P = P^H$, 则特征值 1 对应的特征子空间为 r 维; 特征值 -1 对应的特征子空间为特征值 1 对应的特征子空间的正交补空间, 为 $n-r$ 维.

引理 1　设 $P \in C^{n\times n}$ 为广义反射阵, 则存在一个 $n\times n$ 阶酉阵 D, 使得

$$P = D\begin{bmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r}\end{bmatrix}D^H \tag{3}$$

如无特别声明, 本文中的广义反射阵 P 都具有式 (3) 的形式.

引理 2　设 $A \in C^{n\times n}$, 则 A 为自反阵当且仅当

$$A = D\begin{bmatrix} E & \\ & F\end{bmatrix}D^H,\ \forall E \in C^{r\times r},\ \forall F \in C^{(n-r)\times(n-r)}. \tag{4}$$

证明　$\Rightarrow$ 若 A 为自反阵, 则利用引理 1, 我们可得 $A = PAP =$

$$D\begin{bmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r}\end{bmatrix}D^H A D\begin{bmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r}\end{bmatrix}D^H,$$

收稿日期: 2005-11-15
基金项目: 国家自然科学基金(10571012), 福建省自然科学基金(Z0511010)资助
作者简介: 吴春红(1975-), 女, 硕士研究生.
* 通讯作者: linlu_xm@163.com

令 $D^H AD = \begin{bmatrix} E & M \\ N & F \end{bmatrix}$, 则

$$A = D\begin{bmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & M \\ N & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{bmatrix} D^H = D\begin{bmatrix} E & -M \\ -N & F \end{bmatrix} D^H,$$

因此 $M = 0, N = 0$, 所以 $A = D\begin{bmatrix} E & \\ & F \end{bmatrix} D^H$.

$\Leftarrow$ 若 $A = D\begin{bmatrix} E & \\ & F \end{bmatrix} D^H, E \in C^{r\times r}, F \in C^{(n-r)\times(n-r)}$, 易证 $A = PAP$, 即 A 为自反矩阵.

引理 3 设 $P \in C^{n\times n}$ 为广义反射阵, 则任一 $A \in C^{n\times n}$ 可以分解成两个部分 A_1 和 A_2, 使得: $A_1 \in RP^{n\times n}$, $A_2 \in ARP^{n\times n}$, 且分解惟一.

证明(i) 任意 $A \in C^{n\times n}$, 令 $A_1 = \dfrac{A + PAP}{2}, A_2 = \dfrac{A - PAP}{2}$, 易证 $A_1 \in RP^{n\times n}, A_2 \in ARP^{n\times n}$.

(ii) 假设存在另外的 $A'_1 \in RP^{n\times n}, A'_2 \in ARP^{n\times n}$, 使得 $A = A'_1 + A'_2$, 则 $A_1 - A'_1 = A'_2 - A_2$, 等式左右两边同乘 P 得 $PA_1P - PA'_1P = PA'_2P - PA_2P$.

又因 $A_1 - A'_1 \in RP^{n\times n}, A_2 - A'_2 \in ARP^{n\times n}$, 则 $A_1 - A'_1 = -(A'_2 - A_2) = A_2 - A'_2$.

因此 $A_1 = A'_1, A_2 = A'_2$.

引理 4 对给定的 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in C^{n\times m}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in C^{m\times m}$, 矩阵方程 $AX = BX\Lambda$ 恒有解 $A, B \in C^{n\times n}$, 并且其解可以表示为 $[A, B] = GU_2^H$, 其中 $G \in C^{n\times(2n-r)}$ 是任意矩阵, $U_2 \in C^{2n\times(2n-r)}$ 是单位列酉阵, 且 $R(U_2) = N([X^H, -(X\Lambda)^H]), r = \mathrm{rank}([X^H, -(X\Lambda)^H])$.

证明 矩阵方程 $AX = BX\Lambda$ 可等价转化为

$$[A, B]\begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{5}$$

由矩阵广义逆的 Penrose 定理可得

$$[A, B] = Z\left(I_{2n} - \begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix}^+\right) = 0, \quad \forall Z \in C^{n\times 2n} \tag{6}$$

设 $\begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix}$ 的奇异值分解为

$$\begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix} = U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H = U_1 \Sigma V_1^H \tag{7}$$

其中 $U = (U_1, U_2)$ 为 $2n\times 2n$ 阶酉矩阵, $V = (V_1, V_2)$ 为 $m\times m$ 阶酉矩阵, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$, $R(U_2) = N([X^H, -(X\Lambda)^H]), r = \mathrm{rank}([X^H, -(X\Lambda)^H])$.

则

$$\begin{aligned}
[A, B] &= Z\left(I_{2n} - \begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ -X\Lambda \end{bmatrix}^+\right) = \\
&Z\left(I_{2n} - U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H V\begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H\right) = \\
&Z\left(I_{2n} - U\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H\right) = \\
&Z\left(I_{2n} - U\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H\right) = \\
&Z\left(U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{(2n-r)} \end{bmatrix} U^H\right) = \\
&Z\left((U_1, U_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{(2n-r)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix}\right) = \\
&Z\left((0, U_2)\begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix}\right) = ZU_2U_2^H = GU_2^H
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $G = ZU_2 \in C^{n\times(2n-r)}$ 为任意矩阵, $U_2 \in C^{2n\times(2n-r)}$ 为单位列酉阵.

记

$$D^H X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, X_1 \in C^{r\times m}, X_2 \in C^{(n-r)\times m},$$

$$Q = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \tag{9}$$

定理 1 对给定的 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in C^{n\times m}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in C^{m\times m}$ 和广义反射阵 $P \in C^{n\times n}$, 问题 Ⅰ 恒有解 $A, B \in RP^{n\times n}$, 且其解可以表示为

$$(A, B) = D\begin{bmatrix} MU_2^{(1)H} & 0 \\ 0 & NU_2^{(2)H} \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} D^H & \\ & D^H \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中 $M \in C^{r\times(2r-r_1)}, N \in C^{(n-r)\times(2(n-r)-r_2)}$ 是任意矩阵, $U_2^{(1)} \in C^{2r\times(2r-r_1)}, U_2^{(2)} \in C^{2(n-r)\times(2(n-r)-r_2)}$ 均为单位列酉矩阵, $R(U_2^{(i)}) = N([X_i^H, -(X_i\Lambda)^H]), r_i = \mathrm{rank}([X_i^H, -(X_i\Lambda)^H]), i = 1, 2$.

证明 由引理 2 知, 存在 $A, B \in RP^{n\times n}$ 使得 $AX = BX\Lambda$ 等价于存在 $A_1, B_1 \in C^{r\times r}, A_2, B_2 \in C^{(n-r)\times(n-r)}$ 使得:

$$D\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix} D^H X = D\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix} D^H X\Lambda \Leftrightarrow \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\Lambda \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_1X_1 \\ A_2X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1X_1 \\ B_2X_2 \end{bmatrix}\Lambda,$$

由此可得

$$A_1X_1 = B_1X_1\Lambda \tag{12}$$

$$A_2X_2 = B_2X_2\Lambda \tag{13}$$

由引理 4 知式(12) 和(13) 恒有解, 若矩阵 $\begin{bmatrix} X_i \\ -X_i\Lambda\end{bmatrix}$ 的奇异值分解为

$$\begin{bmatrix} X_i \\ -X_i\Lambda\end{bmatrix} = U^{(i)}\begin{bmatrix}\Sigma^{i} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{(i)H} = U_1^{(i)}\Sigma^{(i)}V_1^{(i)H},\quad i=1,2 \tag{14}$$

其中 $U^{(1)} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$ 为 $2r\times 2r$ 阶酉矩阵, $U^{(2)} = (U_1^{(2)}, U_2^{(2)})$ 为 $2(n-r)\times 2(n-r)$ 阶酉矩阵; $V^{(i)} = (V_1^{(i)}, V_2^{(i)})$ 为 $m\times m$ 阶酉矩阵, $\Sigma^{(i)} = \mathrm{diag}(\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}, \cdots, \sigma_{r_i}^{(i)})$, $R(U_2^{(i)}) = N([X_i^H, -(X_i\Lambda)^H])$, $r_i = \mathrm{rank}([X_i^H, -(X_i\Lambda)^H])$, $i=1,2$, $U_2^{(1)}\in C^{2r\times(2r-r_1)}$, $U_2^{(2)}\in C^{2(n-r)\times(2(n-r)-r_2)}$ 均为单位列酉矩阵, 则式(12) 和(13) 的解可以表示为

$$[A_1, B_1] = MU_2^{(1)H} \tag{15}$$

$$[A_2, B_2] = NU_2^{(2)H} \tag{16}$$

其中 $M\in C^{r\times(2r-r_1)}$, $N\in C^{(n-r)\times(2(n-r)-r_2)}$ 是任意矩阵, 又

$$D^H[A,B]\begin{bmatrix}D & \\ & D\end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix}A_1 & 0 & B_1 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & B_2\end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix}(A_1, B_1) & 0\\ 0 & (A_2, B_2)\end{bmatrix} \tag{17}$$

则由式(15) 和(16) 知问题 Ⅰ 的解可以表示为式(10) 的形式, 证毕.

记

$$D^H[A^*, B^*]\begin{bmatrix}D & \\ & D\end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix}A_{11}^* & A_{12}^*\\ A_{21}^* & A_{22}^*\end{bmatrix},$$

$$A_{11}^*\in C^{r\times 2r}, A_{22}^*\in C^{(n-r)\times 2(n-r)} \tag{18}$$

定理2　对给定 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_m]\in C^{n\times m}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)\in C^{m\times m}$ 和广义反射阵 $P\in C^{n\times n}$, $A^*, B^*\in C^{n\times n}$, 问题 Ⅰ 的解集的元素由式(10) 给出, 则问题 Ⅱ 有惟一最佳逼近解 $\hat{A}, \hat{B}$, 且可以表示为:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = D\begin{bmatrix}A_{11}^*U_2^{(1)}U_2^{(1)H} & 0\\ 0 & A_{22}^*U_2^{(2)}U_2^{(2)H}\end{bmatrix}Q^T\begin{bmatrix}D^H & \\ & D^H\end{bmatrix} \tag{19}$$

证明　由定理 1 知 S_{AB} 非空, 下证 $S_{AB} = \{[A,B] \mid AX = BX\Lambda, A, B\in RP^{n\times n}\}$ 为闭凸集. 首先对任意的 $[A_1, B_1], [A_2, B_2]\in S_{AB}$, 以及 $\lambda\in[0,1]$, 有 $A_1X = B_1X\Lambda$, $A_2X = B_2X\Lambda$, 且 $A_1, B_1\in RP^{n\times n}$, $A_2, B_2\in RP^{n\times n}$, 则 $(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2)X = \lambda A_1X + (1-\lambda)A_2X = (\lambda B_1 + (1-\lambda)B_2)X\Lambda$, 且 $\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2\in RP^{n\times n}$, $\lambda B_1 + (1-\lambda)B_2\in RP^{n\times n}$, 所以 $\lambda[A_1, B_1] + (1-\lambda)[A_2, B_2]\in S_{AB}$, 即 S_{AB} 是凸集.

其次, 注意到对 S_{AB} 中的任一收敛序列 $[A_k, B_k]\to[\hat{A}, \hat{B}]$ $(k\to+\infty)$, 有 $\hat{A}\in RP^{n\times n}$, $\hat{B}\in RP^{n\times n}$. 又由 $A_kX = B_kX\Lambda$, 则

$$\begin{aligned}\|\hat{A}X - \hat{B}X\Lambda\| &= \|\hat{A}X - A_kX + B_kX\Lambda - \hat{B}X\Lambda\| \leqslant\\ &\|\hat{A}X - A_kX\| + \|B_kX\Lambda - \hat{B}X\Lambda\| \leqslant\\ &\|\hat{A} - A_k\|\|X\| + \|B_k - \hat{B}\|\|X\|\|\Lambda\|.\end{aligned}$$

而 $k\to+\infty$ 时, $A_k\to\hat{A}$, $B_k\to\hat{B}$, 从而 $\hat{A}X = \hat{B}X\Lambda$, 表明 $[\hat{A}, \hat{B}]\in S_{AB}$, 所以 S_{AB} 是闭集. 由 S_{AB} 为闭凸集, 又因在 $\|\cdot\|$ 意义下, $C^{n\times n}$ 为一致凸的 Banach 空间, 因此问题 Ⅱ 有惟一解.

对矩阵 $\begin{bmatrix} X_i \\ -X_i\Lambda\end{bmatrix}$ 进行奇异值分解, 得到 $U^{(1)} = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$ 为 $2r\times 2r$ 阶酉矩阵, $U^{(2)} = (U_1^{(2)}, U_2^{(2)})$ 为 $2(n-r)\times 2(n-r)$ 阶酉矩阵, 则由式(18) 以及 $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, D, Q 均为酉阵可得

$$\begin{aligned}&\|[A^*, B^*] - [A, B]\|^2 = \\ &\left\|D\begin{bmatrix}A_{11}^* & A_{12}^*\\ A_{21}^* & A_{22}^*\end{bmatrix}Q^T\begin{bmatrix}D^H & \\ & D^H\end{bmatrix} - D\begin{bmatrix}MU_2^{(1)H} & \\ & NU_2^{(2)H}\end{bmatrix}Q^T\begin{bmatrix}D^H & \\ & D^H\end{bmatrix}\right\|^2 = \\ &\|A_{11}^* - MU_2^{(1)H}\|^2 + \|A_{12}^*\|^2 + \|A_{21}^*\|^2 + \\ &\|A_{22}^* - NU_2^{(2)H}\|^2.\end{aligned}$$

因此 $\|[A^*, B^*] - [A, B]\|^2 = \min$ 当且仅当

$$A_{11}^* = MU_2^{(1)H}, A_{22}^* = NU_2^{(2)H},$$

即

$$M = A_{11}^*U_2^{(1)}, N = A_{22}^*U_2^{(2)} \tag{20}$$

将式(20) 代入式(10) 即可得式(19), 证毕.

下面讨论由问题推出的算法的稳定性, 即若给 $[A^*, B^*]$ 一个小的扰动, 问题 Ⅱ 的解 $[\hat{A}, \hat{B}]$ 会有怎样的变化.

定理 3　给定 $A^{(i)*}, B^{(i)*}\in C^{n\times n}$, $[\hat{A}^{(i)}, \hat{B}^{(i)}] = \arg\inf_{[A,B]\in S_{AB}}\|[A^{(i)*}, B^{(i)*}] - [A, B]\|$, $i=1,2$, 则

$$\|[\hat{A}^{(2)}, \hat{B}^{(2)}] - [\hat{A}^{(1)}, \hat{B}^{(1)}]\| \leqslant \alpha\|[A^{(2)*}, B^{(2)*}] - [A^{(1)*}, B^{(1)*}]\| \tag{21}$$

其中 α 为不依赖与 $[A^{(i)*}, B^{(i)*}]$ 的常数.

证明　由式(18) 得

$$(A^*, B^*) = D\begin{bmatrix}A_{11}^* & A_{12}^*\\ A_{21}^* & A_{22}^*\end{bmatrix}Q^T\begin{bmatrix}D^H & \\ & D^H\end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}&\|[A^{(2)*}, B^{(2)*}] - [A^{(1)*}, B^{(1)*}]\|^2 = \\ &\left\|\begin{bmatrix}A_{11}^{(2)*} & A_{12}^{(2)*}\\ A_{21}^{(2)*} & A_{22}^{(2)*}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}A_{11}^{(1)*} & A_{12}^{(1)*}\\ A_{21}^{(1)*} & A_{22}^{(1)*}\end{bmatrix}\right\|^2 = \\ &\|A_{11}^{(2)*} - A_{11}^{(1)*}\|^2 + \|A_{12}^{(2)*} - A_{12}^{(1)*}\|^2 + \\ &\|A_{21}^{(2)*} - A_{21}^{(1)*}\|^2 + \|A_{22}^{(2)*} - A_{22}^{(1)*}\|^2.\end{aligned}$$

由式(19) 得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\tilde{\boldsymbol{A}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{B}}^{(2)}\right)-\left(\tilde{\boldsymbol{A}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{B}}^{(1)}\right)\right\|^2= \\
&\left\|\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{(2)*}\boldsymbol{U}_2^{(1)}\boldsymbol{U}_2^{(1)^H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}^{(2)*}\boldsymbol{U}_2^{(2)}\boldsymbol{U}_2^{(2)^H} \end{bmatrix}-\right. \\
&\left.\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{(1)*}\boldsymbol{U}_2^{(1)}\boldsymbol{U}_2^{(1)^H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A}_{22}^{(1)*}\boldsymbol{U}_2^{(2)}\boldsymbol{U}_2^{(2)^H} \end{bmatrix}\right\|^2= \\
&\left\|\begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_{11}^{(2)*}-\boldsymbol{A}_{11}^{(1)*}) & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{A}_{22}^{(2)*}-\boldsymbol{A}_{22}^{(1)*}) \end{bmatrix}\right. \\
&\left.\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_2^{(1)}\boldsymbol{U}_2^{(1)^H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{U}_2^{(2)}\boldsymbol{U}_2^{(2)^H} \end{bmatrix}\right\|^2 \leqslant \\
&\left(\|\boldsymbol{U}_2^{(1)}\boldsymbol{U}_2^{(1)^H}\|^2+\|\boldsymbol{U}_2^{(2)}\boldsymbol{U}_2^{(2)^H}\|^2\right) \\
&\left(\|(\boldsymbol{A}_{11}^{(2)*}-\boldsymbol{A}_{11}^{(1)*})\|^2+\|(\boldsymbol{A}_{22}^{(2)*}-\boldsymbol{A}_{22}^{(1)*})\|^2\right) \leqslant \\
&\alpha^2[\|(\boldsymbol{A}_{11}^{(2)*}-\boldsymbol{A}_{11}^{(1)*})\|^2+\|(\boldsymbol{A}_{22}^{(2)*}-\boldsymbol{A}_{22}^{(1)*})\|^2 \leqslant \\
&\alpha^2\|[\boldsymbol{A}^{(2)*}, \boldsymbol{B}^{(2)*}]-[\boldsymbol{A}^{(1)*}, \boldsymbol{B}^{(1)*}]\|^2.
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha=\|\boldsymbol{U}_2^{(1)}\boldsymbol{U}_2^{(1)^H}\|+\|\boldsymbol{U}_2^{(2)}\boldsymbol{U}_2^{(2)^H}\|$, 即得式(21), 证毕.

2 算法及数值例子

由定理 1、定理 2 可得求解问题 II 的解的算法步骤如下:

输入

(i) 输入 $\boldsymbol{X}=[x_1, x_2, \cdots, x_m] \in C^{n\times m}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in C^{m\times m}$ 和广义反射阵 $\boldsymbol{P} \in C^{n\times n}$.

(ii) 输入正交阵 $\boldsymbol{Q}$.

(iii) 输入被逼近矩阵 $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^* \in C^{n\times n}$.

输出 矩阵束 $[\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*]$ 的自反阵最佳逼近解 $[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}]$.

注 由式(9) 知 $\boldsymbol{Q}$ 与给定的 $\boldsymbol{P} \in C^{n\times n}$ 的谱分解有关, 即与 $\boldsymbol{P}$ 的阶数 n 以及特征值 1 的几何重数 r 有关, 与给定的向量 $\boldsymbol{X}$ 无关.

算法

(i) $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & -\boldsymbol{I}_{n-r} \end{bmatrix}\boldsymbol{D}^H$, 计算 r, $\boldsymbol{D}$.

(ii) 由式(9) $\boldsymbol{D}^H\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}$, 求出 $\boldsymbol{X}_1 \in C^{r\times m}$, $\boldsymbol{X}_2 \in C^{(n-r)\times m}$.

(iii) 对矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_i \\ -\boldsymbol{X}_i\Lambda \end{bmatrix}$ $(i=1, 2)$ 进行奇异值分解, 求出 $\boldsymbol{U}_2^{(1)} \in C^{2r\times(2r-r_1)}$, $\boldsymbol{U}_2^{(2)} \in C^{2(n-r)\times(2(n-r)-r_2)}$.

(iv) 将 $\boldsymbol{D}^H[\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*]\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \\ & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$ 按照式(18) 进行分块, 求出 $\boldsymbol{A}_{11}^* \in C^{r\times 2r}$, $\boldsymbol{A}_{22}^* \in C^{(n-r)\times 2(n-r)}$.

(v) 按照式(19) 计算 $[\tilde{\boldsymbol{A}}, \tilde{\boldsymbol{B}}]$.

下面给出数值例子. 令 $n=2r$, 其中 r 为大于零的正数. 给定广义反射阵 $\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} & 2\boldsymbol{I}_r+i\boldsymbol{I}_r \\ 2\boldsymbol{I}_r-i\boldsymbol{I}_r & \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 的谱分解形式为: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \\ & -\boldsymbol{I}_r \end{bmatrix}\boldsymbol{D}^H$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 为 $n\times n$ 阶酉阵.

输入以下矩阵: $\boldsymbol{Q} \in \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix}$

$$
X=\begin{bmatrix}
0.8903+0.1988i & 0.1911+0.7537i & 0.4574+0.7313i & 0.0492+0.5488i \\
0.7349+0.6252i & 0.4225+0.7939i & 0.4507+0.1939i & 0.6932+0.9316i \\
0.6873+0.7334i & 0.8560+0.9200i & 0.4122+0.9048i & 0.6501+0.3352i \\
0.3461+0.3759i & 0.4902+0.8447i & 0.9016+0.5692i & 0.9830+0.6555i \\
0.1660+0.0099i & 0.8159+0.3678i & 0.0056+0.6318i & 0.5527+0.3919i \\
0.1556+0.4199i & 0.4608+0.6208i & 0.2974+0.2344i & 0.4001+0.6273i
\end{bmatrix}.
$$

$$
\Lambda=\begin{bmatrix}
0.0099+0.6458i & & & \\
& 0.1370+0.9669i & & \\
& & 0.8188+0.6649i & \\
& & & 0.4302+0.8704i
\end{bmatrix}.
$$

$$
\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}
0.5028+0.9568i & 0.6822+0.2523i & 0.8600+0.1991i & 0.6449+0.9883i & 0.5341+0.2259i & 0.7027+0.3798i \\
0.7095+0.5226i & 0.3028+0.8757i & 0.8537+0.2987i & 0.8180+0.5828i & 0.7271+0.5798i & 0.5466+0.7833i \\
0.4289+0.8801i & 0.5417+0.7373i & 0.5936+0.6614i & 0.6602+0.4235i & 0.3093+0.7604i & 0.4449+0.6808i \\
0.3046+0.1730i & 0.1509+0.1365i & 0.4966+0.2844i & 0.3420+0.5155i & 0.8385+0.5298i & 0.6946+0.4611i \\
0.1897+0.9797i & 0.6979+0.0118i & 0.8998+0.4692i & 0.2897+0.3340i & 0.5681+0.6405i & 0.6213+0.5678i \\
0.1934+0.2714i & 0.3784+0.8939i & 0.8216+0.0648i & 0.3412+0.4329i & 0.3704+0.2091i & 0.7948+0.7942i
\end{bmatrix}.
$$

$$
B^* = \begin{bmatrix}
0.0592+0.3127i & 0.0150+0.6124i & 0.4983+0.0576i & 0.4120+0.4544i & 0.2126+0.7275i & 0.6299+0.8928i \\
0.6029+0.0129i & 0.7680+0.6085i & 0.2140+0.3676i & 0.7446+0.4418i & 0.8392+0.4784i & 0.3705+0.2731i \\
0.0503+0.3840i & 0.9708+0.0158i & 0.6435+0.6315i & 0.2679+0.3533i & 0.6288+0.5548i & 0.5751+0.2548i \\
0.4154+0.6831i & 0.9901+0.0164i & 0.3200+0.7176i & 0.4399+0.1536i & 0.1338+0.1210i & 0.4514+0.8656i \\
0.3050+0.0928i & 0.7889+0.1901i & 0.9601+0.6927i & 0.9334+0.6756i & 0.2071+0.4508i & 0.0439+0.2324i \\
0.8744+0.0353i & 0.4387+0.5869i & 0.7266+0.0841i & 0.6833+0.6992i & 0.6072+0.7159i & 0.0272+0.8049i
\end{bmatrix}.
$$

其中 X, Λ, A^*, B^* 都为随机矩阵, 应用 MATLAB 程序设计语言, 根据上述算法得 $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ 如下

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix}
0.2627+0.3801i & 0.0248-0.1360i & -0.1364+0.2724i & 0.0989+0.3264i & -0.0519-0.0210i & -0.4073+0.1027i \\
0.4596+0.1972i & -0.1553+0.1877i & -0.1037+0.1671i & 0.2352+0.3069i & 0.1361+0.1138i & -0.3728+0.3147i \\
0.3082+0.2022i & 0.0374+0.0611i & -0.3072+0.4212i & 0.3387+0.2917i & -0.1904+0.1232i & -0.1296+0.3294i \\
0.3204+0.1167i & -0.0479+0.0289i & -0.1622+0.3875i & 0.2627+0.3801i & 0.0248-0.1360i & -0.1364+0.2724i \\
0.3867-0.0040i & 0.1727-0.0406i & 0.0281+0.4870i & 0.4596+0.1972i & -0.1553+0.1877i & -0.1037+0.1671i \\
0.4366-0.0960i & -0.0157+0.2262i & 0.1858+0.3013i & 0.3082+0.2022i & 0.0374+0.0611i & -0.3072+0.4212i
\end{bmatrix}.
$$

$$
\tilde{B} = \begin{bmatrix}
0.0422+0.2027i & 0.2791-0.0448i & 0.2686-0.2493i & -0.0764+0.3258i & 0.2816+0.3286i & 0.1050+0.1225i \\
0.2002+0.2817i & 0.5411+0.1732i & -0.1192-0.3038i & 0.0353+0.2554i & 0.6940+0.0362i & 0.2610-0.0607i \\
0.1004+0.3818i & 0.6241-0.0313i & 0.1557-0.1276i & -0.0746+0.1603i & 0.4257+0.4194i & 0.4290-0.3054i \\
0.2148+0.2566i & 0.4318-0.0282i & 0.1610-0.0105i & 0.0422+0.2027i & 0.2791-0.0448i & 0.2686-0.2493i \\
0.2255+0.1251i & 0.4453-0.5335i & 0.1080-0.2452i & 0.2002+0.2817i & 0.5411+0.1732i & -0.1192-0.3038i \\
0.0835+0.1559i & 0.5909-0.0889i & 0.0130-0.5264i & 0.1004+0.3818i & 0.6241-0.0313i & 0.1557-0.1276i
\end{bmatrix}.
$$

取 $10^{-10} \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{10}$, 给上述 $[A^*, B^*]$ 一个扰动 $A(\varepsilon)^* = A + \varepsilon \cdot A1$, $B(\varepsilon)^* = B + \varepsilon \cdot B1$, 得到矩阵 $[A(\varepsilon)^*, B(\varepsilon)^*]$, 其中随机矩阵

$$
A1 = \begin{bmatrix}
0.9501+0.8462i & 0.4565+0.6813i & 0.9218+0.3046i & 0.4103+0.1509i & 0.1389+0.4966i & 0.0153+0.3420i \\
0.2311+0.5252i & 0.0185+0.3795i & 0.7382+0.1897i & 0.8936+0.6979i & 0.2028+0.8998i & 0.7468+0.2897i \\
0.6068+0.2026i & 0.8214+0.8318i & 0.1763+0.1934i & 0.0579+0.3784i & 0.1987+0.8216i & 0.4451+0.3412i \\
0.4860+0.6721i & 0.4447+0.5028i & 0.4057+0.6822i & 0.3529+0.8600i & 0.6038+0.6449i & 0.9318+0.5341i \\
0.8913+0.8381i & 0.6154+0.7095i & 0.9355+0.3028i & 0.8132+0.8537i & 0.2722+0.8180i & 0.4660+0.7271i \\
0.7621+0.0196i & 0.7919+0.4289i & 0.9169+0.5417i & 0.0099+0.5936i & 0.1988+0.6602i & 0.4186+0.3093i
\end{bmatrix}.
$$

$$
B1 = \begin{bmatrix}
0.8385+0.5298i & 0.6946+0.4611i & 0.1730+0.4154i & 0.1365+0.9901i & 0.2844+0.3200i & 0.5155+0.4399i \\
0.5681+0.6405i & 0.6213+0.5678i & 0.9797+0.3050i & 0.0118+0.7889i & 0.4692+0.9601i & 0.3340+0.9334i \\
0.3704+0.2091i & 0.7948+0.7942i & 0.2714+0.8744i & 0.8939+0.4387i & 0.0648+0.7266i & 0.4329+0.6833i \\
0.7027+0.3798i & 0.9568+0.0592i & 0.2523+0.0150i & 0.1991+0.4983i & 0.9883+0.4120i & 0.2259+0.2126i \\
0.5466+0.7833i & 0.5226+0.6029i & 0.8757+0.7680i & 0.2987+0.2140i & 0.5828+0.7446i & 0.5798+0.8392i \\
0.4449+0.6808i & 0.8801+0.0503i & 0.7373+0.9708i & 0.6614+0.6435i & 0.4235+0.2679i & 0.7604+0.6288i
\end{bmatrix}.
$$

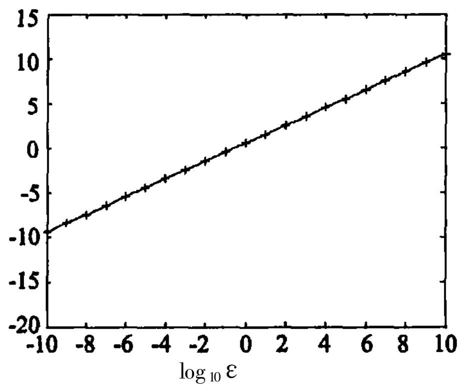

图 1　$\log_{10}\left([A(\varepsilon)^*, B(\varepsilon)^*] - [\tilde{A}(\varepsilon), \tilde{B}(\varepsilon)] \right)$ ("+")

Fig. 1　$\log_{10}\left([A(\varepsilon)^*, B(\varepsilon)^*] - [\tilde{A}(\varepsilon), \tilde{B}(\varepsilon)] \right)$ ("+")

运用上述算法, 得到对应于 $[A(\varepsilon)^*, B(\varepsilon)^*]$ 的 $[\tilde{A}(\varepsilon), \tilde{B}(\varepsilon)]$, 其中 $\tilde{A}(\varepsilon), \tilde{B}(\varepsilon) \in RP^{n\times n}$.

从图 1 我们可以看出随着 ε 趋近于零, $[\tilde{A}(\varepsilon), \tilde{B}(\varepsilon)]$ 趋近于 $[A(\varepsilon)^*, B(\varepsilon)^*]$.

参考文献:

[1] Chu M T. Inverse eigenvalue problems[J]. SIAM Rev., 1998, 40: 1- 39.

[2] Chu M T, Golub G. Structured Inverse eigenvalue problems[J]. Acta Numer, 2002, 11: 1- 71.

[3] Gladwell G M L. The inverse problems for the vibrating beam[J]. Proc. Roy. Soc., 1984, 393: 277- 295.

[4] Hald O. On Discrete and Numerical Sturm-Liouville Problems[D]. New York: New York University, 1992.

[5] Joseph K T. Inverse eigenvalue problems in structural design[J]. AIAA. J., 1992, 30: 2890- 2896.

[6] Li N, Chu K W. Designing the Hopfield neural network via pole assignment[J]. Internet. J. Syst. Sci., 1994, 25: 669- 681.

[7] 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1991.

[8] 陈亚波, 彭振赟. 广义特征值反问题的中心对称解及其最佳逼近[J]. 长沙交通学院学报, 2002, 18(3): 4- 7.

[9] 宋琦, 戴华. 求解广义特征值反问题的数值方法[J]. 南京航空航天大学学报, 1999, 31(6): 679- 685.

[10] 殷庆祥. 箭状矩阵的广义特征值反问题[J]. 南京航空航天大学学报, 2002, 34(2): 190- 192.

[11] 周硕, 吴柏生. 反中心对称矩阵的广义特征值反问题[J]. 高等学校计算数学学报, 2005, 27: 53- 59.

[12] Chen H C. Generalized reflexive matrices: special properties and application[J]. SIAM. J. Matrix Anal. Appl, 1998, 19: 140- 153.

[13] Chen H C. The SAS Domain Decomposition Method for Structural Analysis[R]. University of Illinois, Urbana, IL: CSRD Tech. Report 745, Center for Super-computing Research and Development, 1998.

[14] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.

Inverse Generalized Eigenvalue Problem for Reflexive Matrices

WU Chun-hong, LIN Lu*

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, we first consider the inverse generalized eigenvalue problem as follows: Given a matrix X, a diagonal matrix Λ and a generalized reflection matrix P, the reflexive matrix solutions (A, B) of $AX = BX\Lambda$ are considered. The general representation of such a solution is presented. We denote the set of such solutions by S_{AB}. Then the optimal approximation problem is discussed. That is: given arbitrary matrices A^*, B^*, find matrix$(\hat{A}, \hat{B}) \in S_{AB}$ which is nearest to (A^*, B^*) in the Frobenius norm. We show that the optimal approximation solution is unique and provide an expression for the nearest matrices. The algorithm and one numerical example for solving optimal approximation solution are included.

Key words: generalized eigenvalue; inverse eigenvalue problem; reflexive matrix; optimal approximation