

# 岩土类材料大变形损伤破坏的高效无网格模拟研究

王 东 东

(厦门大学土木工程系 厦门 361005)

**摘 要:** 本文概述了岩土类材料大变形损伤破坏数值模拟的稳定结点积分高效无网格法,并进一步探讨了脆性材料损伤模拟方法以及渗流耦合分析。该方法采用拉格朗日无网格形函数进行空间离散,材料的损伤破坏过程采用大变形弹性损伤耦合的增量本构关系进行描述。由于稳定结点积分所采用的光滑结点变形梯度是定义在结点代表域内的平均梯度,具有非局部特性,因此能够准确地模拟剪切带的形成以及岩土类材料的大变形损伤破坏过程。典型数值算例验证了方法的有效性。

**关键词:** 岩土工程;破坏模拟;无网格法;岩土类材料;大变形

中图分类号: TU452

文献标识码: A

## Efficient meshfree simulation of the damage and failure of geotechnical materials under finite deformation

WANG Dongdong

(Department of Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005)

**Abstract:** An overview is given on the failure analysis of geotechnical materials under finite deformation by using the efficient meshfree method based on the stabilized conforming nodal integration. The damage and failure modeling of brittle geotechnical materials and the infiltration-coupled analysis are discussed. This method employs a Lagrangian meshfree kernel function and the material failure is modeled by the coupled incremental elastic-plastic damage constitutive relationship. The stabilized conforming nodal integration is realized through strain averaging in the nodal representative domain and thus it exhibits a non-local characteristic. Consequently the method can effectively model the complicated damage initiation and propagation phenomena, and its robustness is demonstrated by several typical numerical examples.

**Key words:** geotechnical engineering; failure simulation; meshfree method; geotechnical materials, finite deformation

## 0 引言

有限元法无疑是目前应用最为广泛的工程数值计算方法。然而由于有限元法采用基于单元的多项式近似,依赖于单元的有序拓扑连接,不能有效求解大变形问题和裂纹扩展等移动边界问题。上世纪 90 年代兴起的无网格法<sup>[1]</sup>将数值积分和近似函数分离开来,不依赖结点之间的有序单元连接,仅采用结点信息建立近似函数,可以构造任意高阶协调的位移场和应力场,容易实现自适应分析,在大变形问题及移动边界问题等有限元不易求解的问题上有着比较明显的优势。在众多无网格法中,基于移动最小二乘或再生核近似(MLS/RK)的无网格伽辽金法(EFG/RKPM)由于具有良好的稳定性和数值精度得到了广泛应用<sup>[1]</sup>。然而由于 MLS/RK 无网格形函数不是多项式,使得相应的伽辽金无网格法需要高阶的高斯积分,计算效率较低,同时这些方法也不能严格满足线性或弯曲准确性条件。Chen、Wang 等人<sup>[2~6]</sup>分别从线性准确性和弯曲准确性条件出发建立了一般连续体和梁板壳结构的稳定结点积分高效无网格法。已有研究结果表明稳定结点积分无网格法不仅可以有效解决自锁问题,同时

收稿日期: 2010-06-08

基金项目: 国家自然科学基金(10972188, 10602049)和教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-09-0678)

作者简介: 王东东(1974—),男,博士,教授. E-mail: ddwang@xmu.edu.cn

兼顾了效率、稳定性和精度,为大型结构的快速准确分析打下了基础。另一方面,岩土类材料诸如岩石、土及混凝土等是土木水利工程中最常见的工程材料,在自重、地震及渗流等静动荷载作用下常呈现大变形弹塑性渐进损伤破坏模式,因而研究这类材料的损伤破坏有重要的理论价值和现实意义。在稳定结点积分高效无网格法的理论框架下作者对岩土类材料的损伤破坏进行了一定的研究<sup>[7-8]</sup>。本文结合已有成果概述了基于稳定结点积分高效无网格法的岩土类材料大变形非线性模拟,并进一步探讨了脆性材料的损伤因子计算方法以及渗流耦合分析。

### 1 拉格朗日稳定结点积分大变形无网格法

如图1所示,初始时刻研究对象(如岩土类材料)所在空间区域为 $\Omega^0$ ,边界为 $\Gamma^0$ 。初始构形上的物质点 $X \in \bar{\Omega}^0 = \Omega^0 \cup \Gamma^0$ 经历的变形过程为 $x = \varphi(X, t) \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ , $\Omega$ 和 $\Gamma$ 为 $\Omega^0$ 和 $\Gamma^0$ 对应的当前构形上的空间区域和边界。在当前构形上研究对象的虚功方程可表述为:

$$\int_{\Omega} \delta u_i \rho a_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma'} \delta u_i t_i d\Gamma = 0 \tag{1}$$

式中 $\rho$ 为材料密度, $a_i$ 是加速度, $\sigma_{ij}$ 为应力, $b_i$ 为体力, $t_i$ 为自然边界 $\Gamma'$ 上的面力,下标 $i$ 和 $j$ 表示空间自由度,对二维问题有 $i, j = 1, 2$ 。在拉格朗日无网格法中,如图1所示。

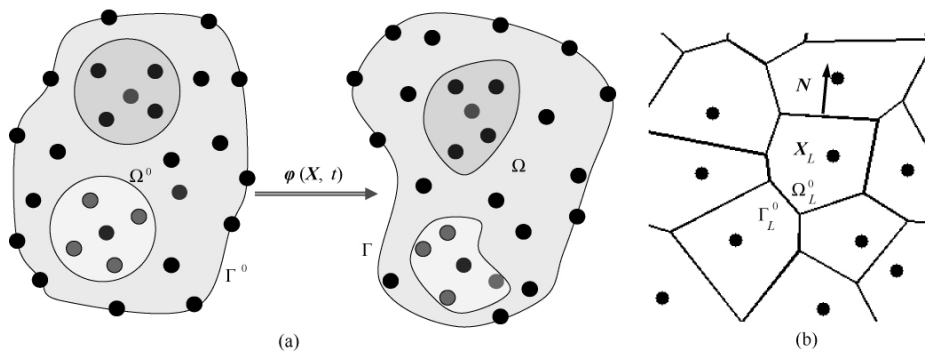


图1 拉格朗日无网格离散示意图:(a) 结点分布;(b) 结点代表域

Fig. 1 Illustration of Lagrangian meshfree discretization (a) nodal distribution, (b) nodal representative domain

初始构形 $\bar{\Omega}^0$ 被离散为一组结点 $X_l, l = 1, 2, \dots, N_p$ ,移动最小二乘或再生核(MLS/RK)形函数 $\Psi_l(X)$ 可以表示为<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} \Psi_l(X) = \mathbf{H}^T(0) \mathbf{T}^{-1}(X) \mathbf{H}^T(X - X_l) \Phi_a(X - X_l) \\ \mathbf{T}(X) = \sum_{l=1}^{N_p} \mathbf{H}^T(X - X_l) \mathbf{H}(X - X_l) \Phi_a(X - X_l) \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\Phi_a(X - X_l)$ 为三阶B样条核函数<sup>[1]</sup>, $\mathbf{H}(X - X_l)$ 为 $p$ 阶基向量:

$$\mathbf{H}^T(X - X_l) = \{1, X_1 - X_{l1}, X_2 - X_{l2}, (X_1 - X_{l1})^2, \dots, (X_2 - X_{l2})^p\} \tag{3}$$

基于式(2),位移变量 $u_i(X, t)$ ,速度变量 $\dot{u}_i(X, t)$ 以及加速度变量 $\ddot{u}_i(X, t)$ 的无网格近似为:

$$u_i(X, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \Psi_l(X) d_{il}(t); \quad \dot{u}_i(X, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \dot{\Psi}_l(X) d_{il}(t); \quad \ddot{u}_i(X, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \ddot{\Psi}_l(X) d_{il}(t) \tag{4}$$

式中 $d_{il}(t)$ 为结点 $X_l$ 的位移系数。将式(4)代入式(1)即可得到无网格离散的运动方程:

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \\ \mathbf{M}_{il} = \sum_{L=1}^{N_p} \{ \Psi_l \Psi_L \mathbf{I} \rho^0 \} (X_L) \cdot \Omega_L^0; \quad \mathbf{f}_{int,l} = \sum_{L=1}^{N_p} (\mathbf{B}_l^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{J}) (X_L) \cdot \Omega_L^0; \\ \mathbf{B}_l^T = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{l,x} & 0 & \tilde{\Psi}_{l,y} \\ 0 & \tilde{\Psi}_{l,y} & \tilde{\Psi}_{l,x} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Theta}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}] \\ \mathbf{f}_{ext,l} = \sum_{K=1}^{N_b} (\Psi_l t) (X_K) \cdot \Gamma_K^0 + \sum_{L=1}^{N_p} (\Psi_l b \mathbf{J}) (X_L) \cdot \Omega_L^0 \end{cases} \tag{5}$$

式中 $\mathbf{I}$ 代表二阶单位矩阵, $\rho^0 = J \rho, J = \det(\tilde{\mathbf{F}}), \tilde{\mathbf{F}}$ 是光滑变形梯度, $\Omega_L^0$ 如图1所示为结点 $X_L$ 代表域的面积, $\Gamma_K^0$ 为边界结点 $X_K$ 对应的边界长度, $N_b$ 为边界结点个数。式(5)采用了稳定结点积分方法<sup>[2-6]</sup>来进行空间积分。为了满足

线性准确性条件及空间稳定性要求,稳定结点积分方法中采用如下的形函数结点光滑梯度  $\tilde{\Psi}_{I,A}$  来计算内力:

$$\tilde{\Psi}_{I,A}(X_L) = \frac{1}{\Omega_L^0} \int_{\Omega_L^0} \Psi_{I,A}(X) d\Omega = \frac{1}{\Omega_L^0} \int_{\Gamma_L^0} \Psi_I(X) N_A(X) d\Gamma, \quad A = \{X, Y\} \quad (6)$$

式中  $\Omega_L^0$  为图 1 所示的结点代表域边界  $N$  为  $\Gamma_L^0$  的外法线单位向量。基于  $\tilde{\Psi}_{I,A}$  光滑变形梯度  $\bar{F}_{iA}$  和形函数的空间导数  $\tilde{\Psi}_{I,a}$  可以表示为:

$$\bar{F}_{iA}(X_L, t) = \delta_{iA} + \sum_{I=1}^{N_p} (\tilde{\Psi}_{I,A}(X_L) d_{iI}(t)); \quad \tilde{\Psi}_{I,a} = \tilde{\Psi}_{I,A} \bar{F}_{Aa}^{-1}, \quad a = \{x, y\} \quad (7)$$

式中  $\delta_{iA}$  为 Kronecker Delta 符号。

为了模拟材料的损伤演化,采用如下的大变形增量型耦合弹塑性本构方程:

$$\dot{\sigma} = C_{epd} : \dot{\varepsilon} + L : \omega \quad (8)$$

式中  $\dot{\varepsilon}$  和  $\omega$  分别为二阶变形率张量和旋转率张量,  $C_{epd}$  为四阶弹塑性损伤张量<sup>[9]</sup>。  $L$  为考虑转动影响的四阶旋转张量,其分量为:

$$L_{ijkl} = (\sigma_{ii}\delta_{jk} + \sigma_{jj}\delta_{ik} - \sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{jk}\delta_{il})/2 \quad (9)$$

岩土类材料的塑性行为采用经典的 Drucker-Prager 强度准则来描述:

$$f(\bar{\sigma}) = \|\bar{s}\| + A\bar{I}_1 - R \leq 0 \quad (10)$$

式中  $\|\bar{s}\| = (\bar{s}:\bar{s})^{1/2}$ ,  $\bar{s}$  和  $\bar{I}_1$  为有效应力  $\bar{\sigma}$  对应的偏应力分量和第一应力不变量。 $\bar{\sigma}$  和  $\sigma$  可通过损伤因子  $\xi$  联系起来,即  $\bar{\sigma} = (1 - \xi)^{-1} \sigma$ 。损伤因子  $\xi$  取为<sup>[9]</sup>:

$$\xi = \begin{cases} \frac{[r_c(r_i - r_i)]}{[r_i(r_c - r_i)]}, & r_i < r_i < r_c \\ 1, & r_i > r_c \\ 0, & r_i < r_i \end{cases} \quad (11)$$

式中  $r_i$  和  $r_c$  分别为损伤起始与最终的临界等效应变,  $r_i = \int_0^t \dot{\varepsilon} dt$  是当前时刻的损伤扩展临界等效应变。 $A$  与  $R$  是材料常数。对于粘土等塑性岩土类材料  $\|\dot{\varepsilon}\| = (\dot{\varepsilon}:\dot{\varepsilon})^{1/2}$ 。另一方面,对于岩石和混凝土等脆性材料,其抗拉强度远低于抗压强度,因此该类材料的破坏可以仅考虑受拉变形的损伤累积,这可以通过如下的应变率张量的谱分解实现:

$$r_i = \int_0^t \|\dot{\varepsilon}^+\| dt; \dot{\varepsilon}^+ = \sum_{j=1}^3 \langle \lambda_j \rangle e_j \otimes e_j; \quad \dot{\varepsilon} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j e_j \otimes e_j \quad (12)$$

式中  $\langle \lambda_j \rangle = (\lambda_j + |\lambda_j|)/2$ ,  $\otimes$  为并矢符号。

另外若考虑降雨入渗对岩土类材料变形的影响,可在式(1)的基础上进一步考虑渗流方程<sup>[8]</sup>:

$$\int_{\Omega} \delta p_w n \frac{\partial S_r}{\partial s} \dot{p}_w d\Omega = \int_{\Gamma_q} \delta p_w q d\Gamma + \int_{\Omega} \delta p_w \text{tr}(\dot{\varepsilon}) S_r d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta p_w \cdot v_w d\Omega \quad (13)$$

式中  $p_w$  为孔隙水压力,  $\rho_w$  为渗流密度,  $n$  为孔隙率,  $S_r$  为饱和度,  $v_w$  为渗流流速,  $s$  为基质吸力,  $\text{tr}(\dot{\varepsilon})$  表示变形率张量  $\dot{\varepsilon}$  的第一不变量,  $\Gamma_q$  代表渗流边界。式(13)对应的无网格离散方程为:

$$M_w \dot{d}_w = g_{w,ext} + g_h + G_w d_w \quad (14)$$

其中矩阵  $M_w$  和向量  $g_{w,ext}$ ,  $g_h$  及  $G_w$  中的元素为:

$$\begin{cases} (M_w)_{IJ} = \sum_{L=1}^{N_p} (\Psi_{I,n} \frac{\partial S_r}{\partial s} \Psi_{J,J})(X_L) \cdot \Omega_L^0; (G_w)_{IJ} = \sum_{L=1}^{N_p} [(\nabla \Psi_I)^T D_w (\nabla \Psi_J) (\gamma_w)^{-1} J](X_L) \cdot \Omega_L^0 \\ (g_{w,ext})_I = \sum_{L=1}^{N_p} [(\nabla \Psi_I)^T D_w \nabla J](X_L) \cdot \Omega_L^0 + \sum_{K=1}^{N_B} (\Psi_{I,q})(X_L) \cdot \Gamma_K^q; \\ (g_h)_I = \sum_{L=1}^{N_p} [\Psi_{I,\text{tr}(\dot{\varepsilon})} S_r J](X_L) \cdot \Omega_L^0 \end{cases} \quad (15)$$

式中  $D_w$  为渗透系数矩阵,  $d_w$  为孔隙水压力系数向量,  $\gamma_w$  为水的重度,  $z$  为高程水头,  $q$  为边界渗流流量。

## 2 数值算例

考虑图 2 所示的三个典型算例:算例(a)是为测试算法而设计的刚性模具内盛矩形土体模型;算例(b)为土

质边坡模型;算例(c)为混凝土重力坝模型,主要目的是检验方法能否有效地模拟脆性材料损伤开裂,施加位移与力荷载在原理上是等价的,为方便起见施加了位移荷载。其中算例(a)和(b)为粘土塑性材料,算例(c)为混凝土脆性材料。算例(a)和(b)中土体密度为 $1900\text{kg/m}^3$ ,体积与剪切模量分别为 $K=27.8\text{MPa}$ , $\mu=9.3\text{MPa}$ ;塑性和损伤材料参数分别为 $A=0.15$ , $R=0.3\text{MPa}$ , $r_i=0.2$ , $r_c=5.0$ ;饱和渗透系数 $k_w^s=5\times 10^{-5}\text{m/s}$ ,初始基质吸力 $s_0=18\text{kPa}$ ,初始饱和度和孔隙比分别为 $S_{v0}=60\%$ 和 $n_0=0.4$ 。算例(c)中混凝土的密度为 $2300\text{kg/m}^3$ ,体积与剪切模量分别为 $K=15.02\text{GPa}$ , $\mu=12.85\text{MPa}$ ,抗拉和抗压强度分别为 $2\text{MPa}$ 和 $20\text{MPa}$ ,相应的塑性参数为 $A=0.25$ , $R=1.64\text{MPa}$ 。混凝土材料的损伤参数为 $r_i=0.01$ 和 $r_c=0.1$ 。三个算例都采用平面应变假定,时间域采用中心差分法来进行数值积分,时间积分步长取为 $10^{-4}\text{s}$ 。无网格近似采用线性基函数,结点影响域相对支撑半径为1.5。算例(a)和(b)的无网格离散模型分别有861和675个结点。另外为了验证方法的收敛性,算例(c)采用488和1013个结点两种离散模型进行计算。

算例(a)的加载方式为左半部L形刚性模具以 $10^{-2}\text{m/s}$ 先向右挤压土体0.2m产生系列剪切带,随后上移1.5m。图3显示了土体在刚性模具作用下的复杂交叉剪切带扩展以及大变形损伤破坏过程,整个计算过程采用拉格朗日描述,没有出现网格畸变引起的计算失效问题。算例(b)考虑边坡斜面上 $q=30\text{mm/h}$ 的降雨入渗。在降雨和自重作用下边坡的失稳过程如图4所示,可见所提方法可以很好地模拟剪切带的形成和大变形扩展。另外根据图4中的边坡滑移面采用Bishop条分法计算的边坡安全系数为0.9,验证了计算结果的合理性。为了模拟重力坝的滑移破坏,算例(c)中在大坝顶部至坝踵5m以上的上游面施加朝下游方向5m的位移。大坝的滑移破坏过程的无网格模拟见图5,结果显示密疏两种离散模型都可以有效模拟大坝破坏历程,即所提方法具有良好的网格不敏感性。三个典型算例的无网格模拟结果均表明所提方法能够有效模拟岩土类材料的复杂损伤破坏过程。

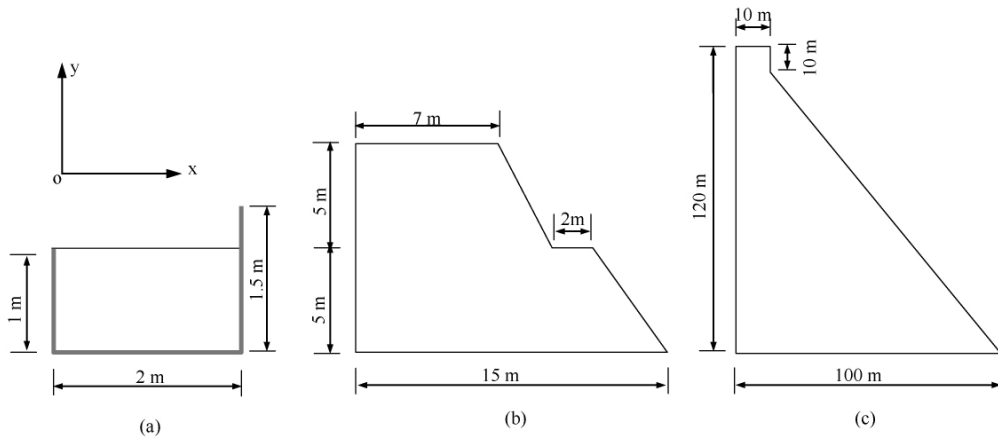


图2 算例模型: (a) 刚性模具内盛矩形土体模型; (b) 边坡模型; (c) 混凝土重力坝模型

Fig. 2 Computational models (a) square soil specimen in a rigid mould, (b) soil slope model, (c) concrete gravity dam model

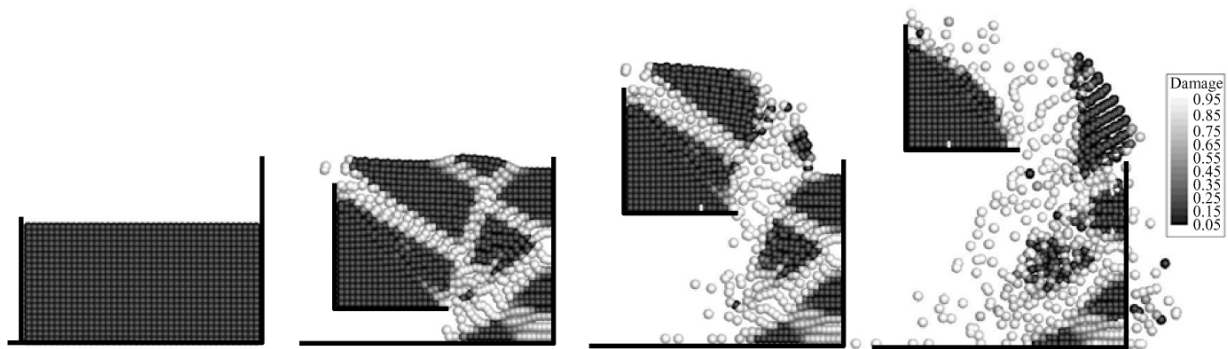


图3 刚性模具内盛土体损伤破坏无网格模拟

Fig. 3 Meshfree simulation of failure evolution for square soil specimen in a rigid mould

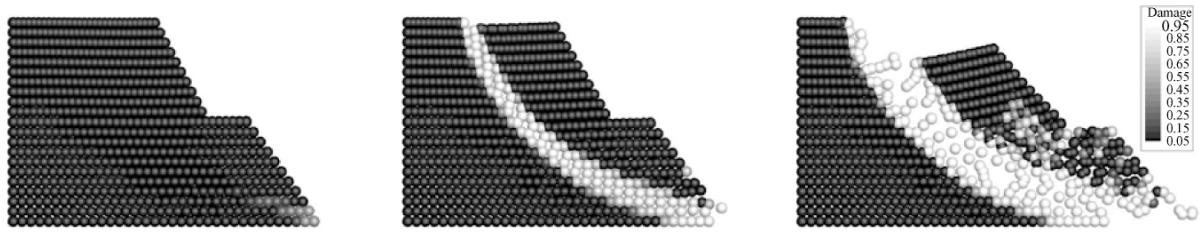


图 4 降雨诱发边坡失稳过程无网格模拟

Fig. 4 Meshfree simulation of soil slope failure due to rainfall

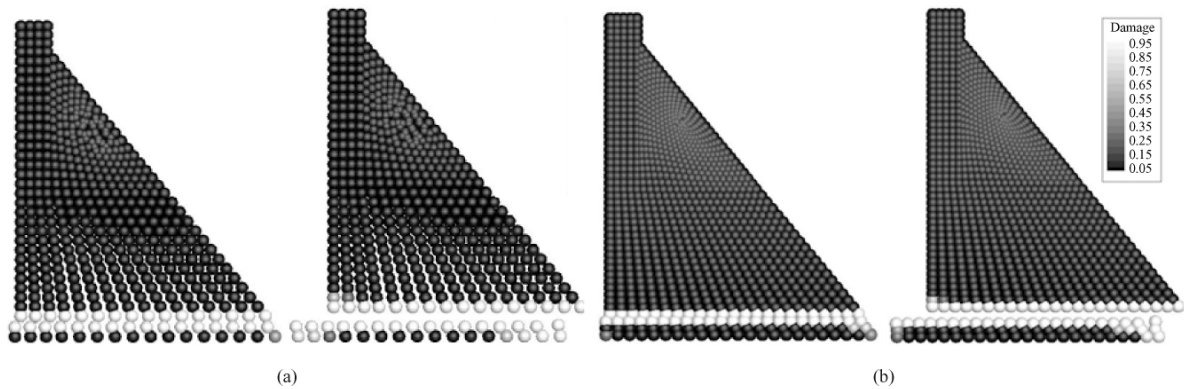


图 5 混凝土重力坝滑动破坏无网格模拟: (a)488 结点; (b)1013 结点

Fig. 5 Meshfree simulation of sliding failure for concrete gravity dam (a)488 nodes, (b)1013 nodes

### 3 结论

本文总结了岩土类材料大变形损伤破坏模拟的稳定结点积分高效无网格方法。该方法采用的拉格朗日形函数和稳定结点积分,具有计算效率高和稳定性好的特点。稳定结点积分是通过在结点代表域内构造平均应变来实现的,具有非局部近似特性,能有效模拟损伤剪切带的形成和扩展。计算中采用了增量弹塑性损伤耦合本构关系来描述材料的破坏,并对塑性和脆性材料采用不同的损伤累积方式以符合材料的力学特性,同时对渗流耦合计算也进行了初步探讨。典型算例验证了稳定结点积分高效无网格方法能有效模拟岩土类材料的大变形复杂损伤破坏过程。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Liu G R. Meshfree Method: Moving beyond the Finite Element Method (2<sup>nd</sup> edition) [M]. Singapore: CRC Press, 2009.
- [ 2 ] Chen J S, Wu C T, Yoon S, You Y. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(2): 435 ~ 466.
- [ 3 ] Chen J S, Yoon S, Wu C T, Nonlinear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 53(12): 2587 ~ 2615.
- [ 4 ] Wang D, Chen J S. Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner plate formulation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004, 193(12 ~ 14): 1065 ~ 1083.
- [ 5 ] Chen J S, Wang D. Extended meshfree method for elastic and inelastic media [J]. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 2005, 43: 17 ~ 38.
- [ 6 ] Wang D, Wu Y. An efficient Galerkin meshfree analysis of shear deformable cylindrical panels [J]. Interaction and Multiscale Mechanics, 2008, 1(3): 339 ~ 355.
- [ 7 ] Wang D. Large deformation dynamic meshfree simulation of damage and failure in geomaterials [J]. Key Engineering Materials, 2006, 324: 141 ~ 144.
- [ 8 ] Wang D, Li L. Efficient meshfree large deformation simulation of rainfall induced soil slope failure [C]. Proceeding of the Second International Symposium on Computational Mechanics, Hong Kong and Macao, November 30 ~ December 3, 2009.
- [ 9 ] Simo J C, Ju J W. Strain and stress-based continuum damage models-I formulation [J]. International Journal of Solids and Structures, 1987, 23(7): 821 ~ 840.