

稳定节点积分伽辽金无网格法的应力计算方法研究*

王东东^{1**} 李凌^{1,2} 张灿辉¹

(¹厦门大学土木工程系, 厦门, 361005)(²广东省水利水电科学研究院, 广州, 510610)

摘要 应力计算是基于稳定节点积分的伽辽金无网格法的重要组成部分. 该文着重研究稳定节点积分伽辽金无网格法的应力计算方法, 对稳定节点积分方法的变分一致条件进行了讨论, 证明当节点代表域内的应变采用非局部光滑应变时, 相应的应力在节点代表域内为常数, 稳定节点积分伽辽金无网格离散方程是变分一致的. 文中提出了三种节点应力计算方法, 研究表明, 基于位移梯度的节点应力计算方法不满足变分一致性要求, 而采用光滑应变的节点应力计算方法和一致形心应力计算方法满足变分一致性要求. 典型数值算例的误差分析表明, 满足变分一致性不一定确保得到更为精确的结果, 而基于光滑应变的一致形心应力计算方法总是较其它两种方法更为精确.

关键词 伽辽金无网格法, 稳定节点积分, 变分一致性, 应力计算

0 引言

尽管近年来无网格方法的研究和应用都取得了长足进步^[1], 但其相对较低的计算效率影响了无网格法在大型工程问题中的广泛应用. 这一缺陷很大程度上是由于无网格方法的形函数采用非多项式类型的移动最小二乘 (MLS) 或者再生核质子 (RK) 近似^[2, 3], 导致伽辽金弱形式在数值积分时需要采用高阶高斯积分. 引入直接节点积分是一个简单直接的解决办法, 但是会带来严重的计算不稳定. 为了满足稳定性要求, Beissel 和 Belytschko^[4] 在标准弱形式中引入平衡方程残值项, 但是该方法依赖于经验参数. Chen 等对一般弹性力学问题提出了不需附加系数的稳定节点积分 (SCNI) 无网格方法^[5]. 这一近似方法后来被 Wang 和 Chen 等系统地发展到梁、板、壳问题中^[6-10].

稳定节点积分伽辽金无网格法采用非局部节点光滑应变进行节点积分, 属于假定应变理论范畴, 能够满足积分约束和线性准确性条件^[5, 6], 同时兼顾了计算效率和稳定性, 尽管这一方法在应用中取得了良好的效果, 但是到目前为止基于光滑梯度的应力计算研究还未见诸文献. 本文对稳定节点积分伽辽金无网格法的变分基础做了简要讨论, 随后在变

分一致性的架构下详细研究比较了三种不同应力计算方法: (1) 基于位移梯度的节点应力计算方法; (2) 基于光滑应变的节点应力计算方法; (3) 基于光滑应变的一致形心应力计算方法, 其中形心指节点代表域或光滑域的形心. 典型算例表明文中提出的一致形心应力计算方法可以得到最为精确的结果.

1 稳定节点积分伽辽金无网格法基本方程

1.1 变分基础

考虑一弹性问题区域 Ω 边界 Γ 包括自然边界 Γ^{h_i} 和强制边界 Γ^{g_i} , 满足 $\Gamma^{h_i} \cup \Gamma^{g_i} = \Gamma$ 和 $\Gamma^{h_i} \cap \Gamma^{g_i} = \emptyset$, 两种边界上分别给定面力 t 和位移 g . 在假定应变理论架构下^[11], 稳定节点积分无网格法的混合势能泛函为:

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma^{h_i}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (1)$$

式中 \mathbf{C} 为弹性张量, \mathbf{u} 为位移, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为假定应变, $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力, \mathbf{b} 为体力. 若式(1)右边第二部分满足:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = 0 \quad (2)$$

则式(1)退化为:

* 国家自然科学基金(10602049和10972188)、福建省自然科学基金(D0710023)及福建省高等学校新世纪优秀人才支持计划资助.

2008-09-16收到第1稿, 2009-03-16收到修改稿.

** 通讯作者. Tel: 0592-2181362, E-mail: ddwang@xmu.edu.cn.

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\Gamma \quad (3)$$

式(2)称作正交性条件^[11], 满足正交性条件的泛函(3)是变分一致的。

1.2 光滑应变

在基于稳定节点积分的无网格方法中, 每个节点 x_L 具有一个节点代表域或光滑域 Ω_L , 满足 $\bigcup_{L=1}^{NP} \Omega_L = \Omega$, $\Omega_L \cap \Omega_M = \emptyset$, 式中 NP 是节点或光滑域总数(如图 1 所示). 定义 Ω_L 内非局部节点光滑应变 $\boldsymbol{\varepsilon}(x_L)$ 为域内应变的平均值^[5, 6]:

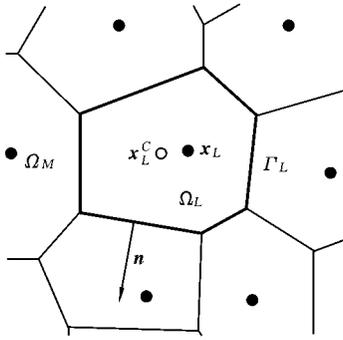


图 1 稳定节点积分的节点代表域或光滑域示意图

Fig. 1 SCNI nodal representative or smoothing domain

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_L) = \frac{1}{\Omega_L} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{\Omega_L} \int_{\Omega_L} \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) d\Omega = \frac{1}{2\Omega_L} \int_{\Gamma_L} (\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{n} + \mathbf{n} \leftarrow \mathbf{u}) d\Gamma \quad (4)$$

式中最后一步利用了散度定理, 其中 Γ_L 为区域边界; \mathbf{n} 为外法线方向; ∇ 为梯度算子; \leftarrow 为并矢运算符. 注意到 Ω_L 中光滑应变 $\boldsymbol{\varepsilon}(x_L)$ 是常数, 对式(4)显然有:

$$\int_{\Omega_L} [\boldsymbol{\varepsilon}(x_L) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})] d\Omega = 0 \quad (5)$$

上式表示 Ω_L 内光滑应变与传统应变之差的积分为零. 将式(2)在 Ω 内进行离散可得:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \sum_{L=1}^{NP} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad (6)$$

比较式(5)和式(6)发现, 如果光滑域 Ω_L 中的应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 是常数, 记作 $\boldsymbol{\sigma}(x_L)$, 则有:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \sum_{L=1}^{NP} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \sum_{L=1}^{NP} \boldsymbol{\sigma}(x_L) : \int_{\Omega_L} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = 0 \quad (7)$$

上式表示所提方法满足正交性条件, 是变分一致的,

下面将探讨应力计算方法. 注意到上述结果均是由式(4)中应变的光滑变换直接推导得到, 没有涉及到数值近似.

2 稳定节点积分无网格法的离散方程和应力计算方法

2.1 无网格离散方程

将移动最小二乘近似或再生核质子近似代入式(4)得到:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^b(x_L) = \sum_{A=1}^{NP} \mathbf{B}_A(x_L) \mathbf{d}_A \\ \mathbf{B}_A(x_L) = \begin{bmatrix} \nabla_1 \Psi_A(x_L) & 0 \\ 0 & \nabla_2 \Psi_A(x_L) \\ \nabla_2 \Psi_A(x_L) & \nabla_1 \Psi_A(x_L) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

为方便起见式中光滑应变仍采用 $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ 表示, Ψ_A 是 MLS/RK 无网格法的形函数, \mathbf{d}_A 是节点位移系数向量. 形函数的节点光滑梯度 $\nabla_i \Psi_A(x_L)$ 定义如下:

$$\begin{aligned} \nabla_i \Psi_A(x_L) &\triangleq \frac{1}{\Omega_L} \int_{\Omega_L} \nabla_i \Psi_A(\mathbf{x}) d\Omega = \\ &\frac{1}{\Omega_L} \int_{\Gamma_L} \Psi_A(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

利用 MLS/RK 形函数的单项式再生特性, 可以证明, 如果 MLS/RK 形函数采用线性或更高阶基函数, 则形函数的节点光滑梯度 $\nabla_i \Psi_A(x_L)$ 满足:

$$\begin{cases} \sum_{A=1}^{NP} \nabla_i \Psi_A(x_L) = 0 \\ \sum_{A=1}^{NP} \nabla_i \Psi_A(x_L) x_{Aj} = \delta_{ij} \end{cases}, \quad (L = 1, 2, \dots, NP) \quad (10)$$

上式所示的再生性质是稳定节点积分无网格法满足线性或弯曲准确条件的基础.

如果正交性条件(7)得到满足, 对式(3)进行变分, 由 $\delta \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ 可以推导出如下的无网格离散方程:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{K}_{AB} = \sum_{L=1}^{NP} \mathbf{B}_A(x_L) \mathbf{C} \mathbf{B}_B(x_L) \Omega_L \quad (11)$$

式中 \mathbf{d} 为位移向量; \mathbf{f} 为外力向量; \mathbf{C} 为弹性矩阵. 可以证明上式严格满足线性和弯曲准确条件. 由式(11)求得位移 \mathbf{d} 之后, 即可由此进一步计算应力了. 本文比较分析了三种应力计算方法, 为了进行精度对比, 定义如下应变能误差 E_{err} :

$$E_{err} = \left\{ \sum_{L=1}^{NP} \frac{1}{2} [\sigma^h(x_L) - \sigma^{exact}(x_L)]^T \cdot [\varepsilon^h(x_L) - \varepsilon^{exact}(x_L)] \Omega_L \right\}^{1/2} \quad (12)$$

2.2 应力计算方法

2.2.1 基于位移梯度的节点应力计算方法(DNS)

DNS 方法属于传统的应变应力计算方法, 不失一般性地可假设材料为均质各向同性, 以域中某点 $x \in \Omega_L$ 的应力计算为例, DNS 方法是采用在节点上直接通过位移求导所得到的应变来计算应力值:

$$\sigma^h(x) = C\varepsilon^h(x) = \sum_{A=1}^{NP} CB_A(x) d_A \quad (13)$$

其中 C 为常数矩阵, 与式(8)不同的是, $B_A(x)$ 采用形函数的精确导数 $\nabla_i \Psi_i \triangleq \partial \Psi_i / \partial x_i$. 显然式(13)的应力在域 Ω_L 内是变化的, 且不满足式(7)的正交性条件. 根据式(13), 误差公式(12)中的节点应力通过下式计算:

$$\sigma^h(x_L) = \sum_{A=1}^{NP} CB_A(x_L) d_A \quad (14)$$

2.2.2 基于光滑应变的节点应力计算方法(CNS)

CNS 方法采用式(8)所计算的光滑节点应变 $\varepsilon^h(x_L)$ 来计算节点应力, 即:

$$\sigma^h(x_L) = C\varepsilon^h(x_L) = \sum_{A=1}^{NP} CB_A(x_L) d_A \quad (15)$$

显然上式中的应力在域 Ω_L 内是常数且满足式(7)的变分一致性条件, 但是本文算例表明满足变分一致性要求的应力算法并不一定能保证更高的数值精度.

2.2.3 基于光滑应变的一致形心应力计算方法 (CCS)

一般认为 CNS 方法即式(15)所求得是节点 x_L 上的应力值, 所以在式(12)误差计算中也选择节点应力. 但是应注意到节点光滑域 Ω_L 内的光滑应变

$\varepsilon(x_L)$ 是整个域上的平均值, 所以由此求得的应力 $\sigma^h(x_L)$ 也是整个域上的平均值而并不一定代表节点 x_L 处的应力, 因此本文提出一个更合理的处理方法: 将基于光滑应变的应力结果赋予光滑域 Ω_L 的形心 x_L^C (如图 1 所示), 即:

$$\begin{cases} \sigma^h(x_L^C) = \sigma^h(x_L) = \sum_{A=1}^{NP} CB_A(x_L) d_A \\ \varepsilon^h(x_L^C) = \varepsilon^h(x_L) = \sum_{A=1}^{NP} B_A(x_L) d_A \end{cases} \quad (16)$$

相应的, 误差计算公式(12)变为:

$$E_{err} = \left\{ \sum_{L=1}^{NP} \frac{1}{2} [\sigma^h(x_L^C) - \sigma^{exact}(x_L^C)]^T \cdot [\varepsilon^h(x_L^C) - \varepsilon^{exact}(x_L^C)] \Omega_L \right\}^{1/2} \quad (17)$$

相比前两种应力计算方法, CCS 方法具有更高的应力计算精度.

3 数值算例与讨论

本节通过几个典型算例比较分析上述三种应力计算方法, 所有算例中无网格形函数均采用线性基函数和三次 B 样条核函数, 并且采用稳定节点积分无网格法计算位移.

3.1 拉普拉斯问题

考虑经典拉普拉斯势问题 $u_{,xx} + u_{,yy} = 0$, 求解域为方形域 $\Omega = [0, 8] \times [0, 8]$, 边界条件按准确解 $u = x^2 - y^2$ 给定. 对求解区域按均布和非均布两种情况分别用 25、81、289 个节点进行离散, 其中非均布节点分布见图 2. MLS/RK 近似中核函数的相对影响域半径对均布情况取 2.0, 对非均布情况取 3.0, 两种离散情况的计算结果误差收敛率见图 3. 由图可见, 在三种应力计算方法中, CCS 方法的精

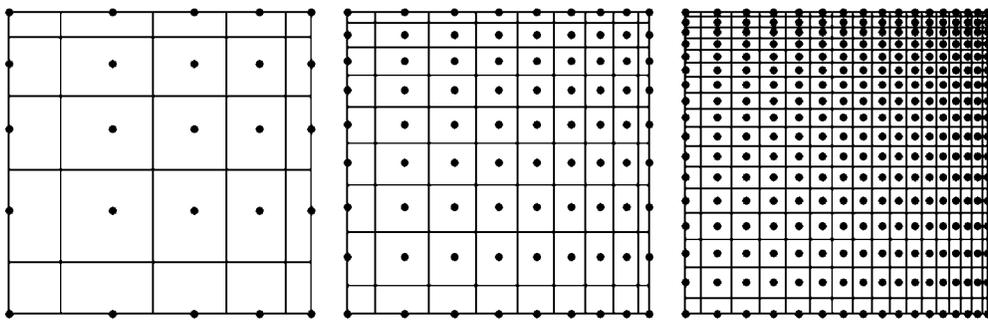
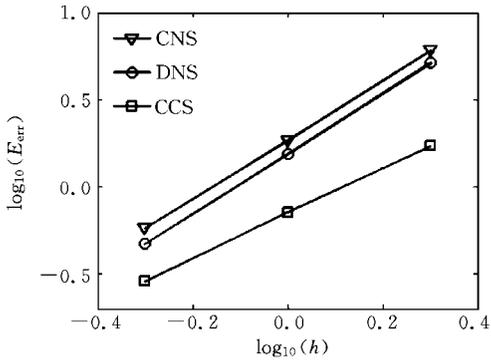


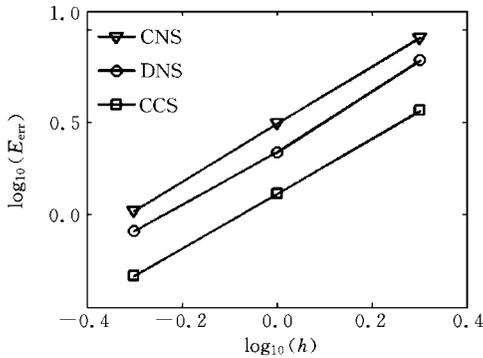
图 2 拉普拉斯问题的非均布节点分布图

Fig. 2 Non-uniform meshfree discretization for Laplace problem



(a) 均布离散节点结果

(a) Solutions with uniform discretization



(b) 非均匀离散节点结果

(b) Solutions with non-uniform discretization

图 3 拉普拉斯问题的误差收敛率对比

Fig. 3 Error comparison for Laplace problem

度最高. 值得注意的是, 尽管 CNS 方法满足变分一致方程而 DNS 方法不满足, 但是 CNS 方法的求解精度并不比 DNS 方法高.

3.2 悬臂梁问题

图 4 所示为右端受剪力 $P = 10 \text{ kN}$ 作用的悬臂梁, 其几何尺寸与材料参数为: $L = 10 \text{ m}$, $D = 2 \text{ m}$, $E = 21 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$. 对求解区域分别用 63、205、427 个节点按均布和非均布三种情况进行离散, 其中两种非均布节点分布见图 5, 核函数的相对影响域半径对均布情况取 2.0, 对非均布情况取 2.5, 相应的误差收敛率见图 6. 结果表明, 在这一算例中, 不管

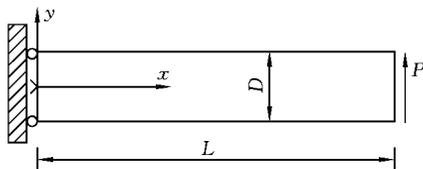


图 4 受剪力作用的悬臂梁示意图

Fig. 4 Problem description for cantilever beam subjected to shear load

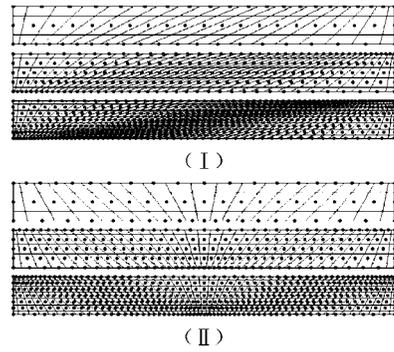
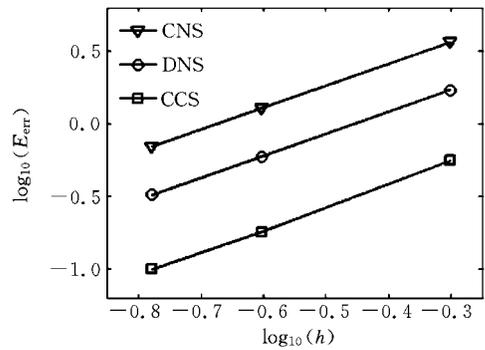


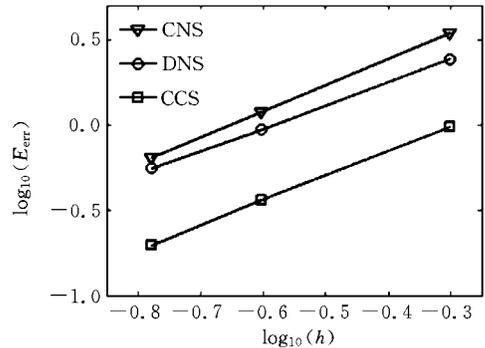
图 5 悬臂梁两种非均匀节点分布图

Fig. 5 Non-uniform meshfree discretizations for cantilever beam problem



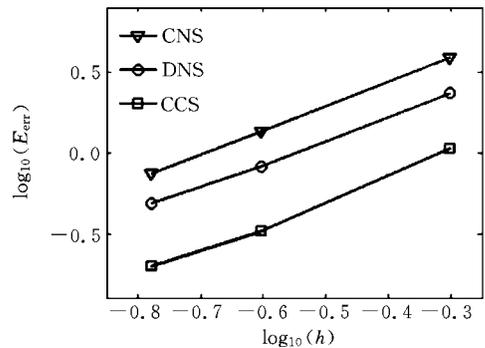
(a) 均布节点分布

(a) Solutions with uniform discretization



(b) 第 I 种非均匀节点分布

(b) Solutions with non-uniform discretization I



(c) 第 II 种非均匀节点分布

(c) Solutions with non-uniform discretization II

图 6 悬臂梁问题的误差收敛率对比图

Fig. 6 Error comparison for beam problem

采用何种离散方案 CCS 方法的精度始终最高.

3.3 承受内压的厚壁圆筒问题

如图 7 所示内径 a 和外径 b 的厚壁圆筒承受内压 p 作用, 其中 $a=1\text{ m}$, $b=5\text{ m}$, $p=10\text{ kPa}$, 材料参数: $E=21.1\text{ MPa}$, $\nu=0.3$. 由于是轴对称问题, 可以取模型的 $1/4$ 进行计算. 对区域分别用 35、117、425 个节点进行离散, 节点分布如图 8 所示, 核函数的相对影响域半径取 2.0, 计算结果的误差收敛率见图 9. 同样可以看到, 三种方法中 CCS 方法的精度最高, 但是与前两个算例不同, 该算例中 CNS 方法的精度高于 DNS 方法, 这再一次证明了是否满足变分一致性条件与计算精度高低并没有必然联系.

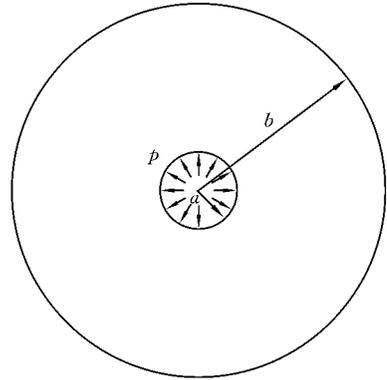


图 7 承受内压的厚壁圆筒示意图

Fig. 7 Problem description for hollow cylinder under internal pressure

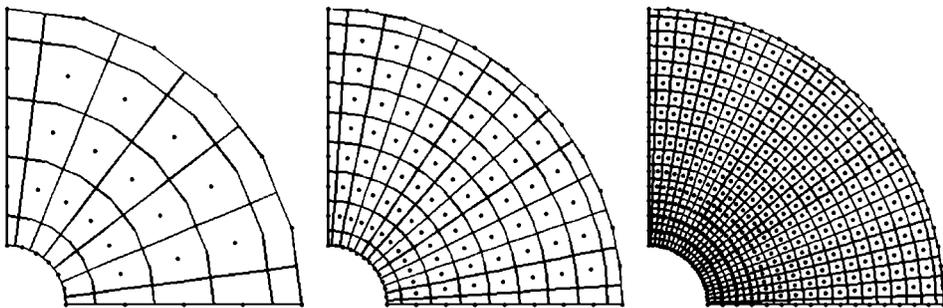


图 8 厚壁圆筒问题的节点分布图

Fig. 8 Meshfree discretization for hollow cylinder problem

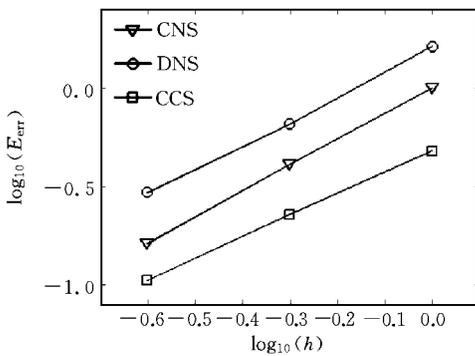


图 9 厚壁圆筒问题的误差收敛率对比图

Fig. 9 Error comparison for hollow cylinder problem

4 结论

在假定应变理论的架构下, 提出并比较分析了稳定节点积分伽辽金无网格法的三种应力计算方法, 即基于位移梯度的节点应力计算方法 (DNS)、基于光滑应变的节点应力计算方法 (CNS) 以及基于光滑应变的一致形心应力计算方法 (CCS). 证明了

在光滑域内如果应力为常数, 则基于稳定节点积分无网格法的离散方程是变分一致的. DNS 方法用位移梯度计算应力, 虽然简单直接, 但是在计算位移梯度和应力的过程中会使稳定节点积分伽辽金方程丧失变分一致性; 而 CNS 方法和 CCS 方法采用节点的光滑梯度计算应力, 因为在节点域中光滑梯度为常数从而应变和应力也为常数, 所以相应的泛函能满足变分一致性条件. 几个典型数值算例表明, 满足变分一致条件并不一定能得到更精确的解答, 有的问题 CNS 方法精度高, 而有的则是 DNS 方法精度高, 即它们的精度依赖于所求解的问题. CCS 方法将光滑应变和应力定义为节点光滑域形心处的应变和应力, 几个算例均表明三种应力计算方法中 CCS 方法具有最高的精度.

参考文献

[1] Li S, Liu W K. Meshfree particle methods and their applications[J]. Applied Mechanics Reviews, 2002,

- 55: 1-34.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229-256.
- [3] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20: 1081-1106.
- [4] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element-free Galerkin method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 139: 49-74.
- [5] Chen J S, Wu C T, Yoon S, You Y. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 435-466.
- [6] Wang D, Chen J S. Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin-Reissner plate formulation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 1065-1083.
- [7] Wang D, Chen J S. A locking-free meshfree curved beam formulation with the stabilized conforming nodal integration [J]. *Computational Mechanics*, 2006, 39: 83-90.
- [8] Wang D, Chen J S. A Hermite reproducing kernel approximation for thin plate analysis with sub-domain stabilized conforming integration [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, 74: 368-390.
- [9] Wang D, Dong S B, Chen J S. Extended meshfree analysis of transverse and inplane loading of a laminated anisotropic plate of general planform geometry [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43: 144-171.
- [10] Chen J S, Wang D. A constrained reproducing kernel particle formulation for shear deformable shell in Cartesian coordinates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 68: 151-172.
- [11] Simo J C, Hughes T J R. On the variational foundation of assumed strain method [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1985, 53: 51-54.

ON STRESS EVALUATION IN GALERKIN MESHFREE METHODS WITH STABILIZED CONFORMING NODAL INTEGRATION

Dongdong Wang¹ Ling Li^{1,2} Canhui Zhang¹

(¹*Department of Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen, 361005*)

(²*Guangdong Research Institute of Water Resources and Hydropower, Guangzhou, 510610*)

Abstract Accurate stress computation is an essential step of the efficient Galerkin meshfree formulation with the stabilized conforming nodal integration (SCNI). In this work particular emphasis is placed on the stress computations of SCNI-based Galerkin meshfree methods. The requirement for variational consistency of the SCNI formulation is discussed. It is shown that the discrete SCNI formulation is consistent in the variational sense if a constant stress field based on the smoothing strain is employed in the nodal representative or smoothing domain. Subsequently three stress computation approaches, i. e., direct nodal stress evaluation (DNS), consistent nodal stress evaluation (CNS), and consistent centroid stress evaluation (CCS), are presented. It turns out that both CNS and CCS satisfy the condition of variational consistency whereas DNS does not. A comprehensive numerical comparison of nodal strain energy error reveals that the variational consistency does not necessarily lead to more accurate results, while the proposed CCS approach is uniformly confirmed to yield the most favorable results.

Key words Galerkin meshfree method, stabilized conforming nodal integration, variational consistency, stress evaluation