

# 杂交元零能模式抑制的正交基本变形模式方法\*

张灿辉, 王东东, 李同姗

(厦门大学 土木工程系 福建 厦门 361005)

(黄黔推荐)

**摘要:** 通过杂交元位移场直接推导了单元基本变形模式,并且采用联合正交条件提出一种新的正交化方法,所得到的正交基本变形模式不仅具有简单的变形特征而且和材料参数无关,可以方便有效地考察单元性能,为评价不同杂交元提供了一个统一的参考标准.在此基础上利用柔度矩阵正定性给出一种简单有效的零能模式识别方法,并进一步利用基本变形模式和初始应力模式之间耦合关系,提出一种抑制杂交元零能模式的假设应力场方法,同时指出基本变形模式正交性是抑制单元零能模式的充分必要条件.2D-4节点和3D-8节点单元的数值算例说明了该文基本变形模式方法的有效性.

**关键词:** 杂交应力元; 基本变形模式; 正交化方法; 假设应力模式; 零能模式抑制

**中图分类号:** O242.21      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.01.009

## 引 言

杂交有限元方法<sup>[1]</sup>由于具有良好的求解精度已经得到很大发展<sup>[2-5]</sup>,被成功应用到许多科学和工程问题中<sup>[6-9]</sup>.杂交元分析中如何正确构建假设应力场是一个关键问题,不合适假设应力场可能使单元不稳定而无法正常使用.著名 Babuska-Brezzi 条件是单元稳定性的充要条件<sup>[10]</sup>,但由于十分复杂而难以直接应用,实际计算中通常采用抑制零能模式来保证单元的稳定性<sup>[11]</sup>.许多学者提出了各种有效的假设应力场方法<sup>[12-13]</sup>,Huang<sup>[14]</sup>提出本征变形模式并由此采用数值迭代求解避免零能模式的应力模式;Feng 和 Hoa 等<sup>[15]</sup>进一步提出构造应力模式的分类方法;张灿辉等<sup>[16]</sup>提出基本变形模式方法,但由于没有进行正交化而不能充分保证单元避免零能模式.为了得到理想假设应力场需要比较不同杂交元性能<sup>[17]</sup>,一般采用模态分析方法<sup>[14-15]</sup>,但需要计算与材料参数有关的特征值和特征向量或振型,由于振型所对应变形十分复杂所以识别较为困难.

本文提出了杂交元基本变形模式,并给出了一种新的正交化方法,得到的正交基本变形模

\* 收稿日期: 2010-06-25; 修订日期: 2010-11-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10972188);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2010121073);福建省科技基金资助项目(2007F3096)

作者简介: 张灿辉(1967—),男,福建人,副教授,博士(联系人. Tel: +86-592-2187887, E-mail: chzhang@xmu.edu.cn).

式不含任何材料参数而且具有简单变形特征。进而在此基础上提出一种识别零能模式的有效方法以及避免杂交元零能模式的假设应力场方法,同时指出基本变形模式正交性是单元避免零能模式的充分必要条件。2D-4 节点和 3D-8 节点单元的数值算例说明了本文方法的有效性。

## 1 杂交元正交基本变形模式

杂交元假设应力场为<sup>[9]</sup>

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\sigma}_i \beta_i = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{P} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\sigma}_M\}, \boldsymbol{\beta}^T = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M\}, \quad (1)$$

式中,  $M$  为应力模式个数,  $\mathbf{P}$  为假设应力矩阵,  $\boldsymbol{\beta}$  为相应的应力参数向量。同时, 在单元内部独立假设位移场为

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i \mathbf{q}_i = \mathbf{N}\boldsymbol{\alpha}, \quad (2)$$

式中,  $n_{en}$  为单元节点个数,  $\mathbf{N}$  为形函数矩阵,  $\boldsymbol{\alpha}$  为单元节点位移向量。

利用 Hellinger-Reissner 变分原理, 可以得到杂交元刚度矩阵以及应力参数和节点位移的关系

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H} \mathbf{G} \quad (3)$$

和

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha}, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega^e} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} d\Omega, \mathbf{G} = \int_{\Omega^e} \mathbf{P}^T (\mathcal{L} \mathbf{N}) d\Omega, \quad (5)$$

式中,  $\Omega^e$  代表单元区域,  $\mathcal{L}$  为微分算子,  $\mathbf{S}$  为材料柔度矩阵。考虑  $n$  个自由度的单元, 其中包含  $r$  个刚体自由度和  $m = n - r$  个变形自由度, 则单元的任意位移向量  $\mathbf{a}$  都可以用  $n$  个线性无关的基向量  $\mathbf{a}_i$  的线性组合表示, 即

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i. \quad (6)$$

线性无关向量  $\mathbf{a}_i$  的选择并不唯一, 最方便的选择是  $n$  个单位向量, 但它们不能明显区分变形特征和刚体运动特征。Huang<sup>[14]</sup> 提出本征变形模式方法, 但需要用数值迭代求解。由于刚体模式所对应位移为与坐标无关的常数, 所以可以结合转动方程确定相应的刚体模式参数, 从而把任意位移场分解为  $m$  个基本变形模式和  $r$  个刚体运动模式的组合, 即式(2)可以写成

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^r \alpha_{m+k} \mathbf{u}_{m+k}, \quad (7)$$

其中  $\mathbf{u}_i$  为基本位移模式。利用单元节点的自然坐标可以得到对应的节点位移向量:

$$\mathbf{a}_i = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\xi}_{n_{en}}) \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

其中,  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_{n_{en}}$  为单元节点的自然坐标。利用基本变形可描述任意变形, 从而可以考察单元性能。但由于与横向变形有关的 Poisson 效应使得相同类型的变形模式互相耦合, 这为单元性能分析以及零能模式的识别和抑制带来困难。

方便起见, 定义包含  $i$  个基本变形模式的子空间:

$$\mathcal{D}_i = \left\{ \mathbf{a} \in R^n \mid \mathbf{a} = \sum_{k=1}^i \alpha_k \mathbf{a}_k, \alpha_k \in R \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

对不包含零能模式的单元,  $\mathcal{D}_i$  中任意非零变形都应产生正定的应变能, 即

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} > 0, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \in \mathcal{D}_i. \quad (10)$$

从而可以进一步定义以下能量内积:

$$(\mathbf{a} \mathbf{K} \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_i. \quad (11)$$

而标准内积

$$(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_i \subset R^n. \quad (12)$$

为了得到正交基本变形模式, 考虑以下变换:

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^m t_{ij} \mathbf{a}_j, \quad t_{ii} = 1; \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

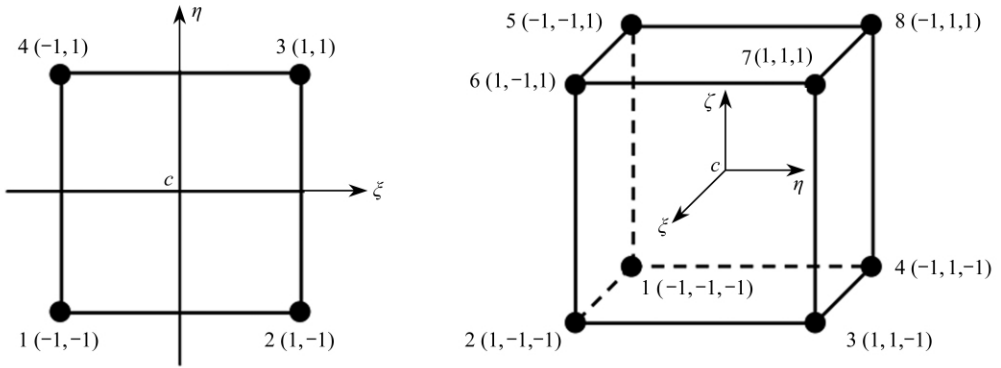
使  $\mathbf{d}_i$  满足正交条件

$$(\mathbf{d}_i \mathbf{K} \mathbf{d}_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad i \neq j. \quad (14)$$

由式 (14) 的正交条件可得  $m(m-1)/2$  个方程, 难以求出式 (13) 的  $m(m-1)$  个未知量. 如果增加条件:  $t_{ij} = 0 \quad i > j$ , 则成为 Schmidt 方法, 所形成正交模式与 Poisson 比有关. 为了得到与材料参数无关的正交基本变形模式, 本文在式 (14) 基础上增加如下正交条件:

$$(\mathbf{d}_i \mathbf{d}_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad i \neq j. \quad (15)$$

利用联合正交条件 (14) 和 (15) 进行基本变形模式正交化, 可以得到和材料参数无关的正交基本变形模式, 从而可以方便有效地考察单元性能, 为评价不同杂交元提供了一个统一的参考标准.



(a) 2D-4 节点单元

(a) 2D 4-node quadrilateral element

(b) 3D-8 节点单元

(b) 3D 8-node hexahedral element

图 1 杂交应力元

Fig. 1 Hybrid elements

以二维四节点平面单元为例, 如图 1(a) 所示, 其位移场可以展开为

$$\begin{cases} u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi \eta, \\ v = b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \xi \eta, \end{cases} \quad (16)$$

式中, 位移参数  $a_i, b_i$  和节点位移  $u_i, v_i$  为可逆变换

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

利用式(16)可以得到单元的转动位移为

$$\omega_\xi = \frac{1}{2}(v_\xi - u_\eta) = \frac{1}{2}(b_1 - a_2) + \frac{1}{2}(b_3\eta - a_3\xi). \quad (18)$$

式(16)和(18)中与坐标无关的常数表示单元刚体平动和转动位移,即

$$u_0 = a_0, v_0 = b_0, \omega_0 = \frac{1}{2}(b_1 - a_2). \quad (19)$$

利用式(19),位移场(16)可以写成

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{u}_i \alpha_i + \sum_{k=1}^3 \mathbf{u}_{5+i} \alpha_{5+i}. \quad (20)$$

其中基本变形模式和刚体模式如下:

$$\begin{cases} \{\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4 \ \mathbf{u}_5\} = \begin{bmatrix} \xi & \xi\eta & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & \eta & \xi\eta & \xi \end{bmatrix}, \\ \{\mathbf{u}_6 \ \mathbf{u}_7 \ \mathbf{u}_8\} = \begin{bmatrix} -\eta & 1 & 0 \\ \xi & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (21)$$

而组合系数为

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_3, \alpha_3 = b_2, \alpha_4 = b_3, \\ \alpha_5 = \frac{1}{2}(b_1 + a_2), \alpha_6 = \frac{1}{2}(b_1 - a_2), \alpha_7 = a_0, \alpha_8 = b_0. \end{cases} \quad (22)$$

显然,系数与单元位移参数的变换是非奇异的,所以基本位移模式是彼此独立的.利用几何方程,由式(21)可以得到基本变形模式所对应的基本应变为

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1 \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \ \boldsymbol{\varepsilon}_3 \ \boldsymbol{\varepsilon}_4 \ \boldsymbol{\varepsilon}_5\} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \eta & 2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

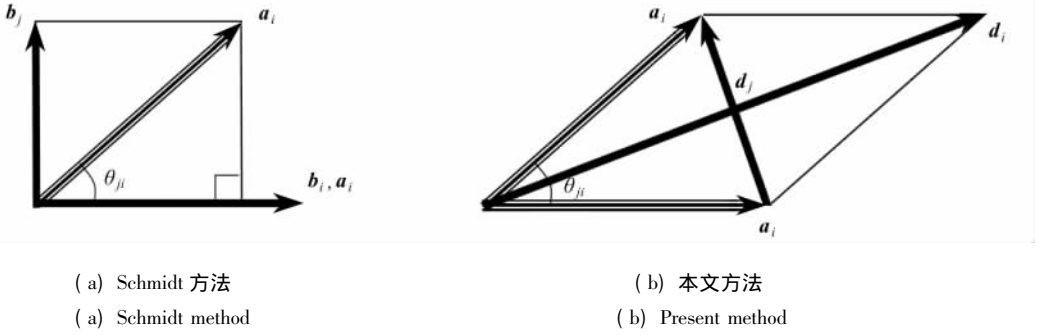
利用式(8)可以得到基本变形模式所对应的单元节点位移向量.对各向同性材料以及关于 $\xi$   $\eta$ 一次多项式的假设应力场,容易验证只有拉伸基本变形模式即 $\mathbf{a}_i \ \mathbf{a}_j, \{i, j\} = \{1, 3\}$ 相互耦合,构造下列变形模式:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{a}_i + t_{ji}\mathbf{a}_j, \mathbf{d}_j = t_{ij}\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \quad (24)$$

显然,如果 $\mathbf{a}_k$ 与 $\mathbf{a}_i$ 和 $\mathbf{a}_j$ 正交,则它亦与 $\mathbf{d}_i$ 和 $\mathbf{d}_j$ 正交.利用联合正交条件(14)和(15)可以得到新的正交模式为

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \mathbf{d}_j = -\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j. \quad (25)$$

本文方法和 Schmidt 方法所生成模式的不同,如图 2 所示.由于本文正交变形模式为原来变形模式所组成菱形的对角线,因此和原来变形模式的夹角无关从而不受材料参数影响,它的变形特征如图 3 所示.依据变形特征可以把正交基本变形模式分为以下 4 组:  $G_1(\mathbf{d}_1)$  双向拉伸(对称拉伸),  $G_2(\mathbf{d}_3)$  拉压(反对称拉伸),  $G_3(\mathbf{d}_5)$  纯剪切和  $G_4(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_4)$  纯弯曲,其中  $G_4(\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_4)$  中的每个变形模式虽然沿不同方向弯曲,但具有相同的变形特征,因此具有完全相同的变形能.



(a) Schmidt 方法  
(a) Schmidt method

(b) 本文方法  
(b) Present method

图2 2D-4 节点单元变形模式正交化比较

Fig. 2 Comparison between the orthogonalization of deformation modes for 2D 4-node quadrilateral element

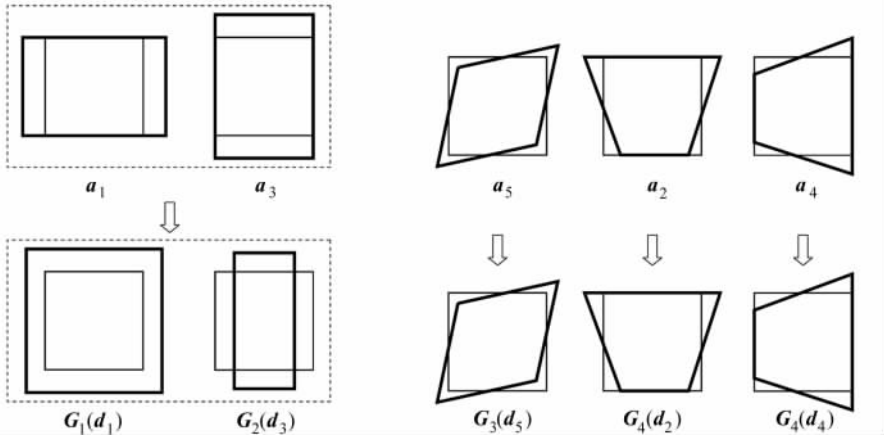


图3 2D-4 节点单元基本变形模式

Fig. 3 Basic deformation modes of 2D 4-node quadrilateral element

进一步考察图1(b)所示的3D-8 节点体单元,其位移场可展开为

$$\begin{cases} u = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta + a_4\xi\eta + a_5\eta\zeta + a_6\zeta\xi + a_7\xi\eta\zeta, \\ v = b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta + b_4\xi\eta + b_5\eta\zeta + b_6\zeta\xi + b_7\xi\eta\zeta, \\ w = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_4\xi\eta + c_5\eta\zeta + c_6\zeta\xi + c_7\xi\eta\zeta, \end{cases} \quad (26)$$

其中,  $a_i$ ,  $b_i$  和  $c_i$  是与节点位移  $u_i$ ,  $v_i$  和  $w_i$  有关的参数. 采用类似的方法可以得到单元的基本变形模式, 所对应的基本应变模式为

$$\{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6 \ \varepsilon_7 \ \varepsilon_8 \ \varepsilon_9 \ \varepsilon_{10} \ \varepsilon_{11} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{14} \ \varepsilon_{15} \ \varepsilon_{16} \ \varepsilon_{17} \ \varepsilon_{18}\} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \zeta & \xi & \zeta\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & \zeta & \zeta\xi & 2 & 2\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2\eta & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \zeta\xi & 0 & 0 & \eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2\zeta \end{bmatrix}. \quad (27)$$

容易验证, 对各向同性材料 3D-8 节点单元只有弯曲模式即  $a_i, a_j, \{i, j\} = \{2, 11\}, \{3, 6\}, \{7, 10\}$  和拉伸模式即  $a_i, a_j, a_k, \{i, j, k\} = \{1, 5, 9\}$  分别互相耦合, 其中弯曲模式的正交化过程与 2D-4 节点单元拉伸模式完全类似, 而对拉伸模式的正交化可构建如下变形模式:

$$d_i = d'_i + t_{ki}a_k, d_j = d'_j + t_{kj}a_k, d_k = t_{ik}d'_i + t_{jk}d'_j + a_k, \quad (28)$$

其中

$$d'_i = a_i + a_j, d'_j = -a_i + a_j. \quad (29)$$

利用联合正交条件 (14) 和 (15) 可以得到新的正交变形模式如下:

$$d_i = a_i + a_j - 2a_k, d_j = -a_i + a_j, d_k = a_i + a_j + a_k. \quad (30)$$

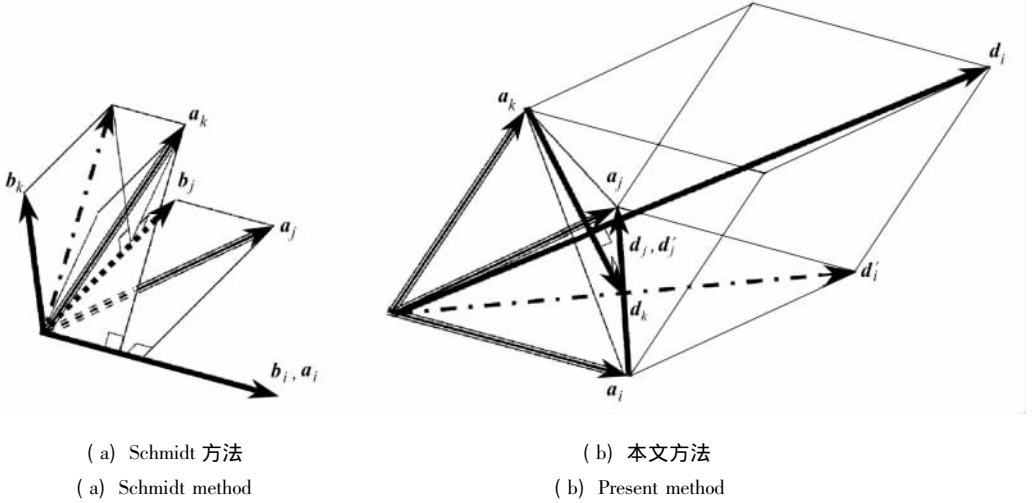
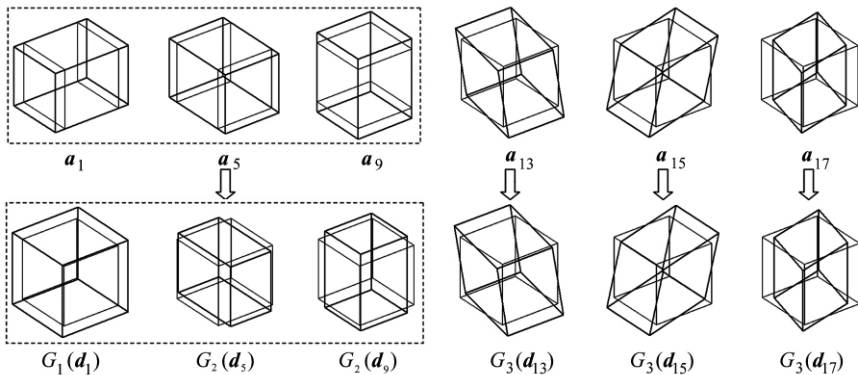


图 4 3D-8 节点单元变形模式正交化比较

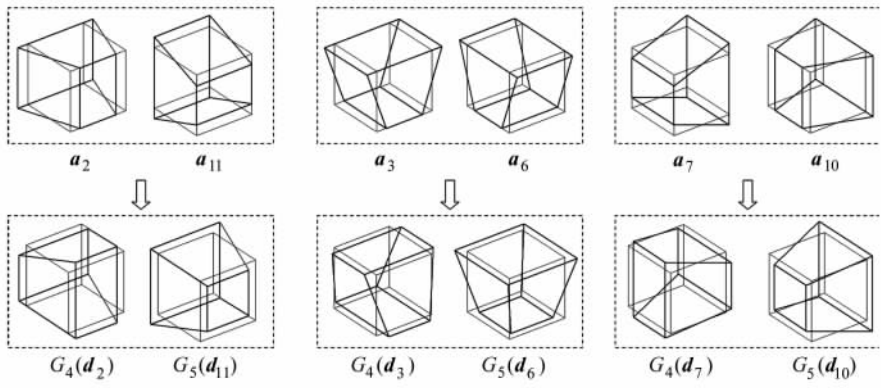
Fig. 4 Comparison between the orthogonalization of deformation modes for 3D 8-node hexahedral element

本文方法和 Schmidt 方法所生成模式的不同如图 4 所示. 由于本文正交变形模式为原来变形模式所组成菱柱形的对角线, 因此和原来变形模式的夹角无关从而不受材料参数影响, 它的变形特征如图 5 所示. 依据变形特征可以把正交基本变形模式分为以下 7 组:  $G_1(d_1)$  双向拉伸(对称拉伸),  $G_2(d_5, d_9)$  拉压(反对称拉伸),  $G_3(d_{13}, d_{15}, d_{17})$  纯剪切,  $G_4(d_2, d_3, d_7)$  反对称弯曲,  $G_5(d_{11}, d_6, d_{10})$  对称弯曲,  $G_6(d_{14}, d_{16}, d_{18})$  纯扭转和  $G_7(d_4, d_8, d_{12})$  纯鞍状变形. 其中, 每组中的每个变形模式虽然沿不同方向变形, 但具有相同的变形特征, 因此具有完全相同的变形能.



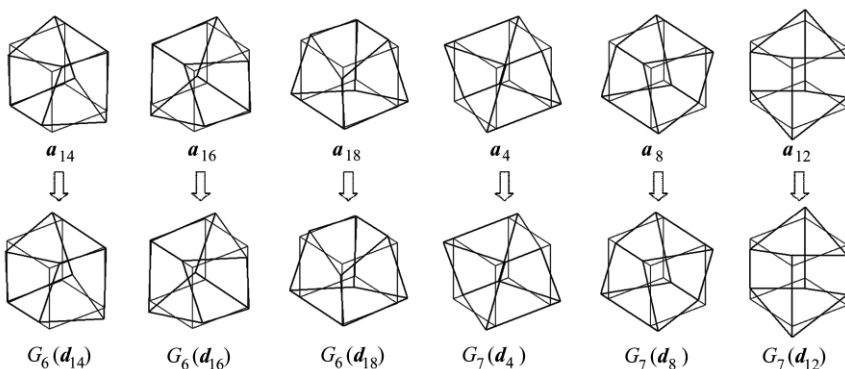
(a) 拉伸和剪切变形

(a) Tension and shear deformation



(b) 弯曲变形

(b) Bending deformation



(c) 扭转和鞍状变形

(c) Torsion and saddle deformation

图5 3D-8节点单元基本变形模式

Fig. 5 Orthogonal basic deformation modes for 3D 8-node hexahedral element

通常采用模态分析方法考察单元性能,单元非零特征值可以写成

$$\lambda_i = \delta_i^T K \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (31)$$

其中,  $\lambda_i$  和  $\delta_i$  分别为非零特征值及其对应的特征向量或振型. 式(31) 说明  $\lambda_i$  代表单元以  $\delta_i$  变形时的刚度. 利用振型可以表示单元任意变形:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \delta_i, \quad \bar{\alpha}_i \in \mathbf{R},$$

所以采用模态分析方法可以考察单元性能:

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i^2 \lambda_i, \quad (32)$$

也可以定义如下的基本变形刚度:

$$\gamma_i = \mathbf{d}_i^T K \mathbf{d}_i = 2\mathcal{U}(\mathbf{d}_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (33)$$

而任意变形也可以利用正交基本变形模式表示为

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{d}_i, \quad \alpha_i \in \mathbf{R},$$

于是单元能量为

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \gamma_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \mathcal{U}(\mathbf{d}_i). \quad (34)$$

虽然式(32)和(34)具有类似的形式,但由于在特征分析中特征值是按照大小顺序排列的,因此,对不同单元,与特征值对应的振型通常缺少一般性的规律而难以辨认,使得对比特征值并不容易直接考察不同单元相同变形的性能.然而,由于本文的正交基本变形模式非常简单和直观,不仅具有十分清楚的变形特征,而且相同变形类型具有相同的变形能,所以采用它们可以分组考察不同变形类型的单元性能,同时变形类型个数一般比特征值个数少,使得结果更加简单明了.例如2D-4节点单元和3D-8节点单元分别只需要考察4个和7个变形类型,而特征方法却必须分别计算5个和18个特征值.

## 2 零能变形模式抑制方法

定义如下基本应变子空间:

$$\mathcal{E}_i^d = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_d \in (L^2(\Omega^e))^{n_d} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_d = (\mathcal{LN}) \mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathcal{D}_i \}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (35)$$

其中,  $n_d$  是应变或应力向量的维数;同时定义与  $\mathcal{E}^d$  对应的应力子空间:

$$\mathcal{S}_i^d = \{ \boldsymbol{\sigma}_d \in (L^2(\Omega^e))^{n_d} \mid \boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_d \in \mathcal{E}_i^d \}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (36)$$

定义假设应力子空间

$$\mathcal{S}_j^\sigma = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in (L^2(\Omega^e))^{n_d} \mid \boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^j \beta_k \boldsymbol{\sigma}_k, \beta_k \in \mathbf{R} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (37)$$

定义应力模式<sup>[4,7]</sup>的内积

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_j \rangle = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_i^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_j d\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j \in \mathcal{S}_{i+j} = \mathcal{S}_i^d \cup \mathcal{S}_j^\sigma. \quad (38)$$

记如下基本应力和假设应力之间的内积向量:

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} \langle \boldsymbol{\sigma}_d, \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{\sigma}_d, \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}_M \rangle \end{array} \right\}, \quad (39)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_d = (\mathcal{LN}) \mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathcal{D}_m,$

于是利用式(5)有

$$\mathbf{G} \mathbf{a} = \int_{\Omega^e} \mathbf{P}^T(\mathcal{LN}) \mathbf{a} d\Omega = \mathbf{v}, \quad (40)$$

所以单元能量可以表示为

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{v}. \quad (41)$$

由于  $\mathbf{H}$  正定<sup>[3]</sup> 所以从式(41)有

**定理 1** 当且仅当非零变形  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  所对应  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , 即它所对应应力场与所有假设应力模式都正交时, 该变形为零能模式.

因此, 根据定理 1, 可以利用内积向量识别零能变形模式, 这是一个判定零能变形模式的简单方法. 而为了抑制零能模式  $\mathbf{a}$ , 应该  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  即至少存在一个应力模式与  $\mathbf{a}$  耦合. 进一步利用式(34), 有

**定理 2** 如果每个正交基本变形模式都有耦合应力模式从而非零能, 即  $\mathcal{U}(\mathbf{d}_i) \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$ , 则单元不包含任何零能模式.



根据定理 2 ,可以利用正交基本变形模式实现单元零能模式的抑制。这是一个十分方便的抑制零能模式方法。

等函数法<sup>[18]</sup>应力模式可以作为本文方法的初始应力模式 ,这是因为由等函数法应力模式所构造杂交元与传统的位移元等价而不包含任何零能变形模式 ,所以每个基本变形模式至少能在其中找到一个耦合应力模式 ,并且每个应力模式只包含一个非零分量从而所得到假设应力模式比较简单 ,特别当按照由低阶向高阶顺序排列时 ,可以得到最优假设应力模式 ,即只有  $m$  个最简单应力模式并且所形成单元不包含零能模式。假设应力场过程如图 6 所示。当假设应力场中需要包括其他特殊应力模式时 ,可以放在初始应力模式最前面。

```

 $\bar{P} = \{ \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_M \}$ 
 $P = I_{n_d}$ 
Loop_basic_deformation_mode: Do  $i = n_d + 1, m$ 
  Loop_assumed_stress_mode: Do  $j = n_d + 1, M + i - 1$ 
    If  $\langle \sigma_{di}, S\bar{\sigma}_j \rangle \neq 0$  then
      Insert  $\bar{\sigma}_j$  into  $P$ 
      Delet  $\bar{\sigma}_j$  from  $\bar{P}$ 
      Exist Loop_assumed_stress_mode
    End if
  End do Loop_assumed_stress_mode
End do Loop_basic_deformation_mode
    
```

图 6 构造假设应力场程序

Fig. 6 Procedure for optimal stress mode selection

需要指出的是 ,在抑制单元零能模式过程中 ,基本变形模式的正交性不仅充分而且必要。作为例子考虑下列 2D-4 节点单元变形模式:

$$a'_1 = d_1, a'_2 = d_2, a'_3 = d_3, a'_4 = d_4 - d_2, a'_5 = d_5. \tag{42}$$

对以下假设应力模式

$$\{ \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4, \sigma'_5 \} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \end{bmatrix}, \tag{43}$$

可以求得:  $\mathcal{U}(a'_i) \neq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$  以及  $(a'_4, Ka'_2) \neq 0$  ,即  $a'_i, i = 1, 2, \dots, 5$  都是非零变形模式并且  $a'_2, a'_4$  耦合 ,而该单元存在零能模式  $a^* = a'_2 + a'_4$  ,即  $\mathcal{U}(a^*) = 0$  .

### 3 数值算例

#### 3.1 构造 2D-4 节点单元的假设应力模式

通过等函数法<sup>[18]</sup>得到 2D-4 节点单元的假设应力矩阵

$$\bar{P}_1 = \{ \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_9 \} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix}, \tag{44}$$

应力矩阵中包含不必要的应力模式即应力模式个数大于  $m = 5$  .按照图 6 程序可以得到 5 个基本变形模式对应的 5 个应力模式 ,形成一个最优应力矩阵

$$P_1 = \{ \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3, \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_7 \} = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{45}$$



$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \eta\zeta & \zeta\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \zeta\xi & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \zeta & \eta\zeta & \zeta\xi
 \end{bmatrix} \cdot \quad (51)$$

按照图 6 程序可以得到和基本变形模式对应的 18 个应力模式:

$$P_1 = \{ \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_6 \bar{\sigma}_8 \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_9 \bar{\sigma}_{14} \bar{\sigma}_{15} \bar{\sigma}_{16} \bar{\sigma}_{17} \bar{\sigma}_{19} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{28} \bar{\sigma}_{30} \bar{\sigma}_{34} \bar{\sigma}_{37} \} =$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & \eta & \zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \zeta & \xi & \zeta\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \zeta
 \end{bmatrix} \cdot \quad (52)$$

可以证明  $P_1$  与 Pian 等<sup>[13]</sup> 提出的应力矩阵等价, 可以采用其他方法得到初始应力模式, 例如文献 [14] 的本征应力模式:

$$\{ \bar{\sigma}_{40} \bar{\sigma}_{41} \dots \bar{\sigma}_{48} \} = \begin{bmatrix}
 \zeta & 0 & \eta & \zeta & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\
 \zeta & \xi & 0 & -\zeta & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \xi & \eta & 0 & -\xi & -\eta & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & -\xi & \xi \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & -2\eta \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \zeta & \zeta
 \end{bmatrix} \cdot \quad (53)$$

此外, 利用对称群理论<sup>[19]</sup> 得到的应力模式为

$$\{ \bar{\sigma}_{49} \bar{\sigma}_{50} \dots \bar{\sigma}_{57} \} =$$

$$\begin{bmatrix}
 2\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\zeta & -\eta & 0 & -\zeta & -\eta & \eta^2 + \zeta^2 & -2\xi\eta & -2\xi\zeta \\
 -\zeta & 0 & -\xi & -\zeta & 0 & \xi & -2\xi\eta & \xi^2 + \zeta^2 & -2\eta\zeta \\
 -\eta & -\xi & 0 & \eta & \xi & 0 & -2\xi\zeta & -2\eta\zeta & \xi^2 + \eta^2
 \end{bmatrix} \cdot \quad (54)$$

式 (53) 和 (54) 应力模式可以与式 (51) 的  $\bar{P}_1$  组合成下列初始应力模式:

$$\bar{P}_2 = \{ \bar{\sigma}_{40} \dots \bar{\sigma}_{45} \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_{39} \}, \quad (55)$$

$$\bar{P}_3 = \{ \bar{\sigma}_{49} \dots \bar{\sigma}_{54} \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_{39} \}, \quad (56)$$

$$\bar{P}_4 = \{ \bar{\sigma}_{46} \dots \bar{\sigma}_{48} \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_{39} \}, \quad (57)$$

$$\bar{P}_5 = \{ \bar{\sigma}_{55} \dots \bar{\sigma}_{57} \bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_{39} \}. \quad (58)$$

按照本文方法选出的应力矩阵如下:

$$P_2 = \{ \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_{42} \bar{\sigma}_{40} \bar{\sigma}_6 \bar{\sigma}_8 \bar{\sigma}_{43} \bar{\sigma}_{41} \bar{\sigma}_{14} \bar{\sigma}_{15} \bar{\sigma}_{44} \bar{\sigma}_{45} \bar{\sigma}_{19} , \\ \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{28} \bar{\sigma}_{30} \bar{\sigma}_{34} \bar{\sigma}_{37} \} , \quad (59)$$

$$P_3 = \{ \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_{50} \bar{\sigma}_{51} \bar{\sigma}_6 \bar{\sigma}_8 \bar{\sigma}_{54} \bar{\sigma}_{49} \bar{\sigma}_{14} \bar{\sigma}_{15} \bar{\sigma}_{52} \bar{\sigma}_{53} \bar{\sigma}_{19} , \\ \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{28} \bar{\sigma}_{30} \bar{\sigma}_{34} \bar{\sigma}_{37} \} , \quad (60)$$

$$P_4 = \{ \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_6 \bar{\sigma}_8 \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_9 \bar{\sigma}_{14} \bar{\sigma}_{15} \bar{\sigma}_{16} \bar{\sigma}_{17} \bar{\sigma}_{19} , \\ \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{46} \bar{\sigma}_{28} \bar{\sigma}_{48} \bar{\sigma}_{34} \bar{\sigma}_{47} \} , \quad (61)$$

$$P_5 = \{ \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_4 \bar{\sigma}_{55} \bar{\sigma}_8 \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_9 \bar{\sigma}_{56} \bar{\sigma}_{15} \bar{\sigma}_{16} \bar{\sigma}_{17} \bar{\sigma}_{57} , \\ \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{23} \bar{\sigma}_{28} \bar{\sigma}_{30} \bar{\sigma}_{34} \bar{\sigma}_{37} \} . \quad (62)$$

采用正交基本变形模式考察上述假设应力场  $P_1$   $P_2$   $P_3$   $P_4$   $P_5$  所构造杂交元及其对应位移元的性能如表 2 所示,可看出无零能变形模式。

表 2 3D-8 节点单元正交基本变形刚度

Table 2 Orthogonal basic deformation rigidity comparison for 3D 8-node hybrid element

$G_i$	Deformation	$d_i$	$P_1$ $P_2$ $P_4$	$P_3$	$P_5$	DFEM
$G_1$	Biaxial tension	$d_1$	2.500 0	2.500 0	2.500 0	2.500 0
$G_2$	Tension-compression	$d_5$ $d_9$	0.769 2	0.769 2	0.769 2	0.769 2
$G_3$	Pure shear	$d_{13}$ $d_{15}$ $d_{17}$	0.769 2	0.769 2	0.769 2	0.769 2
$G_4$	Symmetric bending	$d_2$ $d_6$ $d_{10}$	0.476 2	0.072 5	0.476 2	0.769 2
$G_5$	Anti-symmetric bending	$d_3$ $d_7$ $d_{11}$	0.256 4	0.128 2	0.256 4	0.384 6
$G_6$	Pure torsion	$d_{14}$ $d_{16}$ $d_{18}$	0.170 9	0.170 9	0.170 9	0.170 9
$G_7$	Pure saddle deformation	$d_4$ $d_8$ $d_{12}$	0.111 1	0.111 1	0.071 2	0.235 0

## 4 结 论

本文推导了杂交元基本变形模式,并且提出一种新的正交化方法,由于采用了联合正交条件,所得到的正交基本变形模式不仅与材料参数完全无关而且具有简单的变形特征,为评价不同单元性能提供了统一标准。在此基础上提出一种识别零能模式的简单有效方法,并且进一步提出一种抑制杂交元零能模式的假设应力场方法,同时指出基本变形模式正交性是单元避免零能模式的充分必要条件。2D-4 节点和 3D-8 节点单元的数值算例说明了本文方法的有效性。

### 参考文献:

- [1] Pian T H H. Derivation of element stiffness matrices[J], *AIAA Journal*, 1964, **2**(3): 576-577.
- [2] Chen W J, Cheung Y K. Nonconforming element method and refined hybrid element method for axisymmetric solid[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996, **39**(15): 2509-2529.
- [3] Sze K Y. Admissible matrix formulation—from orthogonal approach to explicit hybrid stabilization[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1996, **24**(1): 1-30.
- [4] 张灿辉,冯伟,黄黔. 杂交应力元的应力子空间和刚度矩阵  $H$  对角化方法[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(11): 1124-1132. (ZHANG Can-hui, FENG Wei, HUANG Qian. The stress subspace of hybrid stress element and the diagonalization method for flexibility matrix  $H$ [J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2002, **23**(11): 1263-1273.)
- [5] 张灿辉,冯伟,黄黔. 用单元柔性矩阵  $H$  对角化方法建立杂交应力有限单元[J]. 计算力学学报, 2002, **19**(4): 409-413. (ZHANG Can-hui, FENG Wei, HUANG Qian. A method of flexibility

- matrix H* diagonalization for constructing hybrid stress finite elements [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(4): 409-413. ( in Chinese )
- [6] Tian Z, Zhao F, Yang Q. Straight free-edge effects in laminated composites [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2004, **41**(1): 1-14.
- [7] Zhang C, Wang D, Zhang J, Feng W, Huang Q. On the equivalence of various hybrid finite elements and a new orthogonalization method for explicit element stiffness formulation [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, **43**(4): 321-332.
- [8] 张灿辉, 王东东, 张建霖. 三维杂交应力元性能分析的基本变形模式方法 [J]. 工程力学, 2009, **26**(8): 44-49. ( ZHANG Can-hui, WANG Dong-dong, ZHANG Jian-lin. Performance analysis of 3D hybrid stress elements with a basic deformation-based approach [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(8): 44-49. ( in Chinese ) )
- [9] Pian T H H, Wu C C. *Hybrid and Incompatible Finite Element Methods* [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2006.
- [10] Babuska I, Oden J T, Lee J K. Mixed-hybrid finite element approximation of second-order elliptic boundary-value problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1977, **11**(2): 175-206.
- [11] Pian T H H, Chen D P. On the suppression of zero-energy deformation modes [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, **19**(12): 1741-1752.
- [12] Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984, **20**(9): 1685-1965.
- [13] Pian T H H, Wu C C. A rational approach for choosing stress terms of hybrid finite element formulations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, **26**(10): 2331-2343.
- [14] HUANG Qian. Modal analysis of deformable bodies with finite degree of deformation freedom—an approach to determination of natural stress modes in hybrid finite elements [C]//Chien Wei-zang, FU Zi-zhi. *Advances in Applied Mathematics & Mechanics in China*. Beijing: IAP ( International Academic Publishers), 1991, **3**: 283-303.
- [15] Feng W, Hoa S V, Huang Q. Classification of stress modes in assumed stress fields of hybrid finite elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**(23): 4313-4339.
- [16] 张灿辉, 王东东. 一种抑制杂交元零能模式的假设应力场方法 [J]. 固体力学学报, 2010, **31**(1): 40-47. ( ZHANG Can-hui, WANG Dong-dong. An assumed stress method for zero-energy mode suppression in hybrid finite elements [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(1): 40-47. ( in Chinese ) )
- [17] 张灿辉, 冯伟, 黄黔. 杂交元假设应力模式的变形刚度分析 [J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(7): 757-764. ( ZHANG Can-hui, FENG Wei, HUANG Qian. Deformation rigidity of assumed stress modes in hybrid elements [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2006, **27**(7): 861-869. )
- [18] Han J, Hoa S V. A three-dimensional multilayer composite finite element for stress analysis of composite laminates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, **36**(22): 3903-3914.
- [19] Rubinstein R, Punch E F, Atluri S N. An analysis of, and remedies for, kinematic modes in hybrid-stress finite elements: selection of stable, invariant stress fields [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1983, **38**(1): 63-92.

# Orthogonal Basic Deformation Mode Method for Zero-Energy Mode Suppression of Hybrid Stress Element

ZHANG Can-hui , WANG Dong-dong , LI Tong-shan

( *Department of Civil Engineering , Xiamen University , Xiamen , Fujian 361005 , P. R. China* )

**Abstract:** A set of basic deformation modes for hybrid stress finite element were directly derived from the element displacement field. Subsequently by employing the so-called united orthogonal conditions a new orthogonalization method was also proposed. The resulting orthogonal basic deformation modes exhibit simple and clear physical meanings. In addition , they do not involve any material parameters and thus can be efficiently used to examine the element performance and serve as a unified tool to assess different hybrid elements. Thereafter a convenient approach for identification of spurious zero-energy modes was presented through using the positive definiteness property of flexibility matrix. Moreover , based upon the orthogonality relationship between the given initial stress modes and the orthogonal basic deformation modes , an alternative method of assumed stress modes to formulate a hybrid element free of spurious modes was discussed. It was also found that the orthogonality of the basic deformation modes was the sufficient and necessary condition for suppression of spurious zero-energy modes. Numerical examples of 2D 4-node quadrilateral element and 3D 8-node hexahedral element were illustrated in details to demonstrate the efficacy of the proposed orthogonal basic deformation mode method.

**Key words:** hybrid stress element; basic deformation modes; mode orthogonality; assumed stress mode; suppression of zero-energy deformation mode