

# 具有大容量稳定存贮的加权神经网络<sup>①②</sup>

郭东辉(博士生) 刘瑞堂 陈振湘<sup>③</sup>

(厦门大学物理系, 厦门 361005)

**摘 要:** 根据离散神经网络动力学过程中的系统能量演化的趋势, 提出利用汉明距离构造大容量离散联想神经网络的设想, 并用计算机进行数值模拟, 给出了一些结果。

**关键词:** 神经网络 联想记忆 光计算

## A Weighted Neural Network of Stable Storage with Large Capacity

Guo Donghui Liu Ruitang Chen Zhenxiang

(Dept. of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005)

**Abstract:** In this paper, an idea of constructing a weighted neural network of stable storage with large capacity is presented, based on the evolution tendency of discrete neural network's system energy in its dynamics course. Several results simulated by the computer are given out.

**Keywords:** Neural Network, Associative Memory, Optical Computing

### 1 引 言

自从 Hopfield<sup>[1]</sup>把 Lyapunov 函数(也称“能量”函数)引入到神经网络这一领域以来, 使得人们对神经网络动力学系统的研究出现新的热潮, 特别是它在与之对应电路网络的存贮稳定性判断<sup>[2]</sup>和 TSP 优化问题中<sup>[3]</sup>的成功应用, 启发了不少人利用它的思想来研究神经网络的各种性能, 以致建立一些比较理想的模型<sup>[4,5]</sup>。本文也利用神经网络动力学过

程中系统能量深化的观点, 来构造一种具有大容量稳定存贮的加权离散神经网络模型。

### 2 离散神经网络的存贮原理

目前出现的人工神经网络模型基本是模拟人脑神经系统的某些功能而建立起来的, 其中联想记忆是人们比较感兴趣的课题之一。Hopfield 联想记忆模型<sup>[1]</sup>是较有代表性且影响较大的一种人工神经网络模型。它是将记忆看作为一个动态系统的动力学过程, 把

①1993-12-03 收稿; 1994-03-01 定稿

②福建省重点科技资助项目

③参加本项研究的还有吴伯僖同志

所要存贮的记忆(或称样本)存放在系统的稳定吸引子上(如图 1、图 2(a)所示的黑点),只要与之相差不多的样本(即黑点以外某不稳定态)输入,通过该网络的迭代就可以自动联想出所存贮的样本的完整信息。但是对于 Hopfield 模型其存贮容量是有限的,当所要存贮的样本数超过该模型的存贮容量时,那么该网络系统的稳定吸引子将发生畸变<sup>[6]</sup>,使得存贮样本变成不稳定态(如图 2(b)所示),即使是存贮样本的输入也不会向存贮态收敛,更不用说是只带部分存贮信息的样本输入能联想出存贮样本。

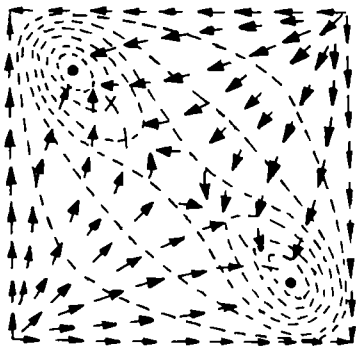


图 1 表征记忆的状态空间

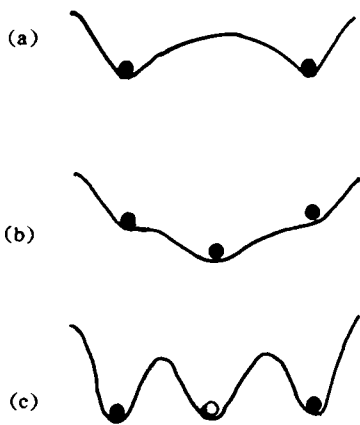


图 2 表征记忆的能量分布

为了解决这一问题,(如图 2(c)所示)只要设法加权存贮,使得各存贮样本的能量变

低,使之均处于系统的稳定吸引子上,那么只要各存贮样本之间存在着一定的距离,不管增加多少存贮样本,照样可以实现联想记忆的功能。

### 3 具有确定稳定存贮的加权离散神经网络

为了具体构造神经网络,先设一个由  $N$  个神经元构成的神经网络,网络中存贮  $P$  个稳定样本,每个样本由  $N$  个“1”或“0”状态表示: $S^m = \{1, 0\}^N$ ,其中 Hopfield<sup>[2]</sup>提出:各存贮的样本以下式的关系构成一个连接矩阵  $T$

$$\begin{cases} T_{ij} = \sum_m (2S_i^m - 1)(2S_j^m - 1), i \neq j \\ T_{ij} = 0, i = j \end{cases} \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$

其中,  $m = 1, \dots, P$ ,而对于取截值的式(2),若取对角元  $T_{ii} = 1$ ,该网络的存贮性能将有所提高<sup>[6]</sup>,故本文以下涉及到取截值的式(2),均取对角元  $T_{ii} = 1$ 。

当输入一个信息  $S(k) = S' = (1, 0)^N$  时,它按下式与连接矩阵  $T$  相乘,得出一个输出信息  $S(k+1)$

$$S_i(k+1) = \sigma[\sum_j T_{ij} S_j(k)], \quad (2)$$

$i, j = 1, \dots, N$

$$\sigma[X] = \begin{cases} 1, X \geq 0 \\ 0, X < 0 \end{cases} \quad (3)$$

根据 Hopfield<sup>[2]</sup>引入的神经网络系统的能量函数(即 Liapunov 函数)有

$$E = -1/2 \sum_{i,j} T_{ij} S_i S_j \quad (4)$$

对于对称的连接矩阵  $T$ ,易证

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta S_i [\partial E / \partial S_i] \\ &= \Delta S_i [-\sum_j T_{ij} S_j] \leq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

显然,该系统在演变过程中,能量  $E$  是单调下降的。由于  $E$  有界,因此系统在演变中必趋于稳定态,它对应于系统的能量  $E$  函数在  $S$  状态空间的局域极小。由此可见,只要把所要存贮的样本状态能量处于系统状态能量的局域极小点,那么神经网络就能表现出联想

记忆的功能。然而数值实验与计算<sup>[6]</sup>表明:对于该神经网络当所要存贮的样本数大于该网络的容量时各存贮样本的状态能量并非是该系统状态能量的局域极小点,为此必须设法改变系统的状态能量的分布,使得存贮样本的能量变低,使之成为系统状态能量的极小点。

根据 Hebb 学习规则<sup>[7]</sup>,神经网络系统对存贮样本的存贮学习是通过不断地调整神经元间的连接强度  $T_{ij}$ ,其调整  $T_{ij}$  的原则是:  $\Delta T_{ij} = \alpha(2S_i - 1)(2S_j - 1)$ ,其中  $\alpha > 0$ ,这一规则与“条件反射”学说一致,并已得到神经细胞学研究的证实<sup>[8]</sup>,为此可以设想:只要输入的样本  $S$  与存贮的样本  $S^m$  趋于一致则  $\alpha$  变大,否则  $\alpha$  变小,即只要构造一个函数  $a = f(S, S^m)$ ,使之当  $S = S^m (m = 1, \dots, P)$  时,  $a$  出现极大值,从而达到改变存贮权重的目的。

为了获得一个适当的权重函数  $f(S, S^m)$ ,可以如下式定义输入的样本  $S$  与各存贮样本  $S^m$  之间的关系

$$\begin{aligned} X^m &= \sum_j (2S_j - 1)(2S_j^m - 1) \\ &= N - 2d_H(S, S^m) \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $d_H(S, S^m)$  为输入样本  $S$  和存贮样本  $S^m$  之间的汉明距离。显然,离输入样本  $S$  越近的存贮样本  $S^m$  (即汉明距离  $d_H$  越小,其中在联想记忆中  $d_H = N$  的样本与  $d_H = 0$  的样本是一样的,值越大,这样就可以构造任意一单调递增偶函数  $a = f(X^m)$ ,当  $|X^m|$  增大时,  $a = f(X^m)$  也增大,从而满足 Hebb 学习规则的要求,即有具有确定稳定存贮的加权离散神经网络的连接矩阵  $T$  可定义为

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \sum_m f(X^m)(2S_i^m - 1)(2S_j^m - 1), \\ i, j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $m = 1, \dots, P$ 。

#### 4 系统能量稳定性分析

对于式(7)加权连接矩阵的神经网络系统,同样可以如下定义系统的能量函数

$$\begin{aligned} E &= -1/2 \sum_{ij} T_{ij} S_i S_j \\ &= -1/2 \sum_{ij} \sum_m f(X^m) (2S_i^m - 1)(2S_j^m - 1) S_i S_j \\ &= -1/8 \sum_m \sum_{ij} f(X^m) (2S_i^m - 1)(2S_j^m - 1) \\ &\quad [(2S_i - 1)(2S_j - 1) + (2S_i - 1) + \\ &\quad (2S_j - 1) + 1] \\ &= -1/8 [\sum_m f(X^m) (X^m)^2 + 2 \sum_m f(X^m) \\ &\quad X^m \sum_j (2S_j^m - 1) + \sum_m f(X^m) \sum_j (2S_j^m - 1) \\ &\quad \sum_j (2S_j^m - 1)] \end{aligned} \quad (8)$$

为了计算方便,假设所存贮的各样本中 0, 1 的位数相同(更普遍的情况将另文讨论),则式(8)的二、三项的值均为 0,即系统的能量函数应为

$$E = -1/8 \sum_m f(X^m) (X^m)^2 \quad (9)$$

设系统在演变过程中,由状态  $S \rightarrow$  状态  $S'$ ,则系统的能量变化

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(X^{m'}) - E(X^m) \\ &= -1/8 [\sum_m f(X^{m'}) (X^{m'})^2 \\ &\quad - \sum_m f(X^m) (X^m)^2] \end{aligned} \quad (10)$$

根据中值定理,对于单调递增偶函数  $f(t)$ ,当  $t \geq 0$  时有

$$f(t')(t')^2 - f(t)(t)^2 \geq f(t)t(t' - t) \quad (11)$$

同样当  $t < 0$  时也有

$$f(t')(t')^2 - f(t)(t)^2 \geq f(t)t(t' - t) \quad (12)$$

则由式(10)(11)(12)得

$$\begin{aligned} \Delta E &\leq -1/8 \sum_m f(X^m) X^m [X^{m'} - X^m] \\ &= -1/8 \sum_m f(X^m) \sum_j (2S_j^m - 1)(2S_j - 1) \\ &\quad (\sum_j 2S_j^m - 1) [(2S_j' - 1) - (2S_j - 1)] \\ &= -1/4 \sum_m \sum_{ij} f(X^m) (2S_i^m - 1)(2S_j^m - 1) \\ &\quad (2S_i - 1)(S_j' - S_j) \\ &= -1/2 \sum_m \sum_{ij} f(X^m) (2S_i^m - 1)(2S_j^m - 1) S_i (S_j' - S_j) \\ &\quad + 1/4 \sum_m \sum_{ij} f(X^m) (2S_i^m - 1)(S_j' - S_j) \sum_j (2S_j^m - 1) \end{aligned} \quad (13)$$

同样对于 0,1 位数相等的存储样本,式(13)的第二项的值为 0,而由式(2),(3)的动力学过程可知,式(13)的第一项的值恒小于 0,则由式(13)得

$$\Delta E \leq -1/2 \sum_j \sum_m (X_j^m) (2S_j^m - 1)(2S_j^m - 1)S_j(S_j' - S_j) \leq 0 \quad (14)$$

可见具有式(7)连接矩阵的神经网络系统在演变过程中,系统的能量也是非增的,因此必趋于稳定,而由式(9)可知对于单调递增偶函数  $f(X)$ ,只要递增幅度足够大,存储样本的状态能量必处于系统的局域能量谷底,可见该网络比 Hopfield 网络具有更强的联想记忆功能。

为了更加直观地了解该神经网络的存储性能,下面用计算机数值模拟几个实际例子来进一步说明。

## 5 计算机数值模拟

为了进一步比较各存储样本在式(7)离散神经网络和离散 Hopfield 神经网络中能量分布的差别,可以定义存储样本  $S^m$  的能量

$$E^m = -1/2 \sum_j T_{ij} S_j^m S_j^m \quad (15)$$

$$\text{同时令 } h_i = \sum_j T_{ij} S_j \quad (16)$$

由式(2),(3)神经网络动力学系统可知,仅当

$$\begin{cases} S_i = 1, h_i \geq 0 \\ S_i = 0, h_i < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (17)$$

恒成立时,该神经网络才稳定输出,因此对于任何一稳定态  $S$ ,必有

$$S_i h_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

因此对于式(15)所定义存储样本的能量  $E^m$ ,  $E^m > 0$ ,该样本不满足式(18),所以不稳定,而只有  $E^m \leq 0$  的样本才可能稳定且能收敛。

为了进行数值运算,对于式(7)加权离散

神经网络,本文仅取单调递增偶函数  $f(X)$  即  $f(X) = |X|$ ,同时对式(1)和式(7)取截值以保证连接矩阵  $T$  为  $\{1, 0, -1\}$ ,以便使之在光学上能较容易获得实现,根据 Hopfield 本人<sup>[2]</sup>分析和大量数值实验发现,取截值后的网络系统的存储性能变化不大,特别是对式(7)的连接矩阵,当单调递增偶函数  $f(t)$  的递增幅度越大,取截值的影响越小。同时由于对等重量且等汉明距离的存储样本,神经网络的存储联想的功能较强<sup>[6]</sup>,为此本文仅对等重量等汉明距离的存储样本  $\{S^m\}$  进行数值试验:如表 1~表 3 ( $M=4, M=5, M=7$ ) 这三种不同样本个数的存储,从这三个表,本文得出以下几点。

(1)只要样本的状态能量大于 0,则该样本在该神经网络中就不稳定,如表 3 所示:对于 Hopfield 神经网络(HNN),以任一存储样本输入,均不稳定,且最终输出在 11111111 和 00000000 之间振荡;

(2)Hopfield 神经网络存储样本的容量是有限的,如表 2 所示:只要存储样本个数大于 4 时,该网络就不能表现出联想记忆的功能,例如,输入信号为:  $S(0) = 11000100$  (同存储样本  $S^2 = 11001100$  最近)时,系统向  $S^2$  收敛,其中  $S^2$  的状态能量最低,然而对于式(7)的加权离散神经网络仍然能收敛到  $S^2$ ;

(3)同 Hopfield 神经网络相比,式(7)的加权离散神经网络具有更大的存储容量和更强的联想记忆功能,如表 3 所示,对于 WNN 系统,尽管已存储 7 个样本,但任意一存储样本  $S^m$  均是稳定的且能吸引任意与之相近(错误 1 位)的输入样本  $S^m$ 。

这主要是由于在式(7)系统的迭代过程中通过不断地调整存储网络的连接矩阵使得与输入样本  $S^m$  相近的存储样本  $S^m$  的吸引能力加强,从而达到增强联想记忆的目的,例如表 3,当  $M=7$  时,输入样本  $S^m = 11000100$ ,对取截值后的 Hopfield 连接矩阵  $T_{HNN}$  为:

$\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}$	→	$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$
$T_{HNN}$		$T_{WNN}$

表1 存贮样本  $M=4$  时的状态能量和吸引能力

$S^m$	HNN			WNN		
	E	W	L	E	W	L
1 1 1 1 0 0 0 0	-2	+	+	-8	+	+
1 1 0 0 1 1 0 0	-2	+	+	-8	+	+
1 1 0 0 0 0 1 1	-2	+	+	-8	+	+
1 0 1 0 1 0 1 0	-2	+	+	-8	+	+

表2 存贮样本  $M=5$  时的状态能量和吸引能力

$S^m$	HNN			WNN		
	E	W	L	E	W	L
1 1 1 1 0 0 0 0	-4	+	+	-8	+	+
1 1 0 0 1 1 0 0	0	+	-	-8	+	+
1 1 0 0 0 0 1 1	0	+	-	-8	+	+
1 0 1 0 1 0 1 0	0	+	-	-8	+	+
0 1 0 1 1 0 1 0	0	+	-	-8	+	+

表3 存贮样本  $M=7$  时的状态能量和吸引能力

$S^m$	HNN			WNN		
	E	W	L	E	W	L
1 1 1 1 0 0 0 0	4	-	-	-8	+	+
1 1 0 0 1 1 0 0	4	-	-	-8	+	+
1 1 0 0 0 0 1 1	4	-	-	-8	+	+
1 0 1 0 1 0 1 0	4	-	-	-8	+	+
0 1 0 1 1 0 1 0	4	-	-	-8	+	+
1 0 0 1 1 0 0 1	4	-	-	-8	+	+
0 1 1 0 1 0 0 1	4	-	-	-8	+	+

表中 HNN 为 Hopfield 神经网络, WNN 为加权神经网络,  $E$  为状态能量,  $W$  为稳定性,  $L$  为吸引能力, “+”表示稳定式吸引状态,“-”表示不稳定或不吸引状态

而对于取截值后的式(7)连接矩阵,则调整为  $T_{WNN}$ ,显然连接矩阵  $T_{WNN}$  的分布倾向存贮本  $S^m = 11001100$ ,因此必向该存贮样本  $S^m$  收敛,表现出联想记忆的功能。

除了上面例子,我们还用计算机遍历模拟了  $N=16, N=32, N=64$  等各种存贮例子,由于篇幅的原因,本文仅上面举  $N=8$  的例子。

## 6 结论

本文提出的加权离散神经网络具有增加稳定样本的存贮容量的性能,只要单调递增偶函数  $f(X)$  的递增幅度足够大且各存贮样本之间存在一定的距离,所存贮的样本均能稳定。虽然该网络的构造比较复杂,然而我们利用电致发光器件<sup>[9]</sup>可以简单地构成光电混合型的神经网络且具有结构紧凑、空间小、成本低等特点,宜适应于今后器件集成化的要求。

## 参 考 文 献

- 1 Hopfield J J. Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. . 1982; 79: 2554 ~ 2558
- 2 Hopfield J J. Neurons With Graded Response Have Collective Computational Properties Like Those of Two-state Neurons. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. . 1984; 81: 3088-3092
- 3 Hopfield J J. Neural Computation of Decision Optimization Problems. Biol. Cybern. . 1985; 52: 141 ~ 152
- 4 Lee Y C. , Doolen G. Machine Learning Using a Higher Order Correlation Network. Physica. 1986; D: 22: 276 ~ 306

(下转第 276 页)

