

一种新的混沌方程及其超混沌网络模型^{①②}陈雪玲, 陈剑勇, 陈振湘^③, 郭东辉

(厦门大学 物理系, 厦门 361005)

摘要: 考虑器件实现方面的简单性, 提出一种新的混沌方程模型, 并通过单向耦合法构成超混沌网络。通过微机模拟表明网络具有丰富的混沌、超混沌现象。进而在单向耦合法基础上, 提出参数耦合法, 利用此方法, 构造成的二维混沌网络具有超混沌动力学特性。网络具有高效、灵活、易于器件实现的特点。这种新的混沌方程及超混沌网络模型可望在提高激光器的输出功率、保密通信等领域获得广泛应用。

关键词: 混沌 超混沌 单向耦合法 参数耦合法

中图分类号: TP387 **文献标识码:** A

A new chaotic equation and its hyperchaotic lattice

CHEN Xue-ling, CHEN Jian-yong, CHEN Zhen-xiang, GUO Dong-hui

(Dept. of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: This paper introduces a new chaotic equation in consideration of device simplicity. And its lattice is built by one way coupled map lattice. Computer simulation shows that the lattice exhibits abundant chaotic and hyperchaotic phenomena. Further, on the basis of this one way coupled map lattice, a parameter coupled map lattice is proposed with which a two-dimensional lattice can be formed and hyperchaos is produced. The lattice is characterized by high efficiency, flexibility and device simplicity. The new chaotic equation and its lattice are expected to be widely used in the fields of improvement of laser output and covert communications, etc.

Keywords: chaos, hyperchaos, one way coupled map, parameter coupled map

1 引言

混沌是当今举世瞩目的前沿课题及学术热点, 它揭示了自然界及人类社会中普遍存在的复杂性, 有序与无序的统一, 确定性与随机性的统一, 体现为对初始条件及其微小变化的高度敏感性及不稳定性^[1]。混沌普遍存在于各个领域之中, 如天文、生物、物理、化学和工程学等, 并已经在各个领域获得应用。如应用混沌控制与同步来改善和提高激光器的性能, 特别是提高功率等, 是当前一个研究热点^[1]。又如近年来, 混沌在保密通信方面的应用倍

受关注, 并取得了很大进展^[2-5]。Perez 等^[6]证明低维混沌系统对信息的加密并不十分有效, 混沌的维数越高, 被混沌加密的信息就越难被破译。因此对高维混沌即超混沌系统的研究具有重要的意义。

混沌方程是构造混沌网络的基本单元, 如 Logistic 方程、蔡氏方程、Hem 方程、Lorenz 方程等。这些方程各有特色, 以这些方程为单位, 通过各种耦合方法构造出相应的超混沌网络^[7-9]。特别是采用单向耦合法(One way coupled map)^[10]构成的超混沌网络, 促进超混沌理论研究及应用的进展。

Lyapunov 指数是研究混沌动力学特性的重要工具, 在相空间上它是表征围绕吸引子的轨迹平均指数发散或收敛的物理量^[11]。在一个系统中, 只要

①1998-08-06 收稿; 1998-12-11 定稿

②国家自然科学基金资助项目

③本刊通讯编委

最大 Lyapunov 指数是正值, 系统就是混沌态。如果有两个以上的 Lyapunov 指数大于零, 系统就是超混沌态。

本文先提出简单的混沌神经元模型, 然后用单向耦合合法构成超混沌网络, 计算机模拟表明网络具有丰富的混沌、超混沌现象。进而, 提出构造超混沌网络的新方法: 参数耦合法。计算机模拟和 Lyapunov 指数计算表明, 二维网络即可产生超混沌现象。值得提出的是, 本文只是对这一新方法进行初步的探讨, 和其他耦合合法所产生的超混沌动力学特性的异同还须进一步系统地研究。

2 混沌单元及其单向耦合网络模型

文献[12, 13]提出了一种混沌神经元模型并系统分析了它的动力学特性。方程如下

$$f(x_n) = x_{n+1} = \tanh(\alpha x_n) \exp(-\beta x_n^2) \quad (1)$$

其中 $x, \alpha, \beta \in R, n = 1, 2, 3, \dots$ 。在保证系统具有丰富混沌动力学特性的同时, 对方程(1)的形式进一步简化

$$x_{n+1} = \tan(\alpha x_n) \exp(-\beta x_n) \quad (2)$$

在系统初值 $x_1 > 0$ 情况下, 迭代值均大于零(在本文中, 我们总是让 $x_1 > 0$)。方程(2)充分考虑电路实现方面的简单性, 这对于构造复杂的网络显得特别重要。

单向耦合法^[14]是将一维混沌方程扩展成高维网络的著名方法。通过这种方法扩展, 网络可以产生丰富的超混沌现象, 并且网络可以被分离成驱动系统和响应系统, 用于保密通信中^[15, 16]。本文参考单向耦合法将方程(2)扩展成高维网络, 并研究由此产生的时空混沌特性^[16](在时间系列上是混沌, 在空间分布上是随机)。所构造的网络如下

$$\begin{cases} x_{n+1}(i) = (K - \varepsilon)f(x_n(i)) + g(x_n(i+1)) \\ x_n(i+L) = x_n(i) \end{cases} \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, L$ (L 是网络的维数), n 是离散的时间参数, ε 是关联变量, K 是模。当 $K = 1$ 时, 就是典型的单向耦合法。网络有 4 个变量作为调节参数, 适当调节这几个变量, 当 $K = 5, L = 60, \alpha = 5.0, \beta = 3.0, \varepsilon = 1$ 时, 可以很明显地观察到丰富的混沌现象, 如图 1 所示。混沌值在 0~2.0 之间变化。

这里, 我们通过对 Lyapunov 指数的计算, 研究网络(即方程组(3))的混沌、超混沌性质。当 $K = 5, L = 4, \varepsilon = 4, 1 \leq \alpha \leq 13, 1 \leq \beta \leq 13$ 时, 周期吸引

子、混沌、超混沌可相间地观察到, 如图 2 所示。图 2(a)的黑点代表系统 Lyapunov 指数全是负数, 网络有周期解。图 2(b)中的黑点是只有 1 个正 Lyapunov 指数的情形, 系统是混沌。对于具有 2 个以上正 Lyapunov 指数的超混沌, 如图 2(c)所示。当 $\alpha, \beta > 13$, 或改变 K, L, ε 时, 网络仍然具有丰富的混沌、超混沌现象。

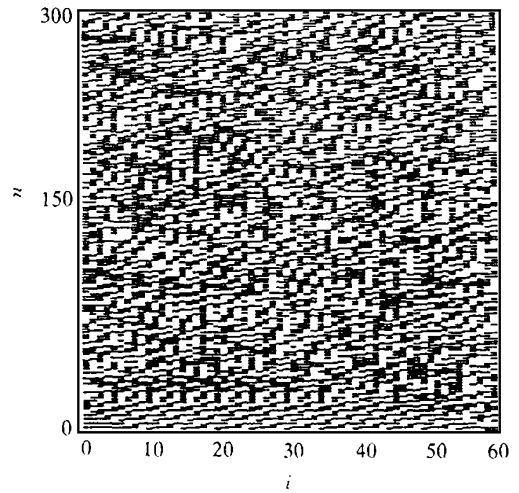


图 1 当 $L = 60, \alpha = 5.0, \beta = 3.0, \varepsilon = 1$ 时, 方程(3)所展现的时空混沌现象。 $x_n(i) \geq 1.2$ 为黑色点, 其他点为白色

Fig. 1 A fully developed spatiotemporal chaos of eqs. (3) when $L = 60, \alpha = 5.0, \beta = 3.0, \varepsilon = 1$. Pixels are painted black as $x_n(i) \geq 1.2$, and left blank otherwise

与其他混沌方程如 Logistic 方程不同的是, 方程(2)由于 $0 < e^{-x} \leq 1, 0 \leq \tanh(x) \leq 1, (x > 0)$ 均有一定的取值范围, 因此 α, β 可在大的动态范围内产生混沌、超混沌现象。而对于 Logistic 方程: $x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n), n = 1, 2, 3, \dots$ 。当 $\alpha > 4$ 时, 方程在迭代过程中就会发散。由此可见, 混沌方程(2)在应用上具有优势。

3 参数耦合法及其网络模型

以下我们初步研究混沌网络另一种耦合形式: 参数耦合法。在方程(3)中令 $K = \varepsilon, L = 2$, 变参数 α, β 为 α_1, β_1 和 α_2, β_2 。方程如下

$$x_{n+1} = K \tanh(\alpha_1 y_n) \exp(-\beta_1 y_n) \quad (4a)$$

$$y_{n+1} = K \tanh(\alpha_2 x_n) \exp(-\beta_2 x_n) \quad (4b)$$

其中, $n = 1, 2, 3, \dots; x_1, y_1 > 0$ 。若 $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$, 方程组(4)是一维混沌方程(2); 当 $\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2$, 方程组(4)是二维混沌方程组(网络)。

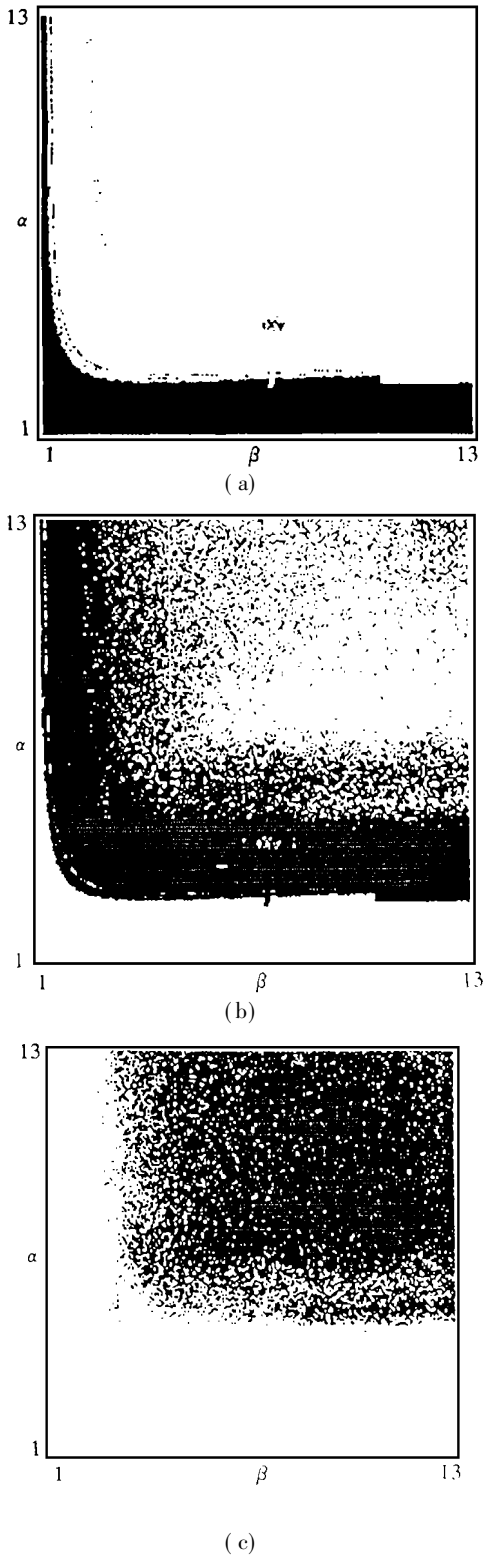


图 2 (a) 黑点表示参数 α, β 空间中, Lyapunov 指数均为负数; (b) 黑点表示参数空间中有 1 个正 Lyapunov 指数; (c) 黑点表示参数空间中有 2 个以上 Lyapunov 指数
 Fig. 2 In parameters' space, the black pixels represent system with (a) all the Lyapunov exponents negative; (b) only one positive Lyapunov exponent; (c) more than one positive Lyapunov exponent

我们计算该二维网络的 Lyapunov 指数, 结果如图 3 所示, 其中 $K = 10, 0.6 < \alpha_1 < 1.8, \alpha_2 = \beta_1 = 1.0$ 。

我们先考察方程组(3)与方程组(4)的区别。对于方程组(3), 系统是通过不同维向量进行耦合, 而方程组(4)主要是通过调节参数进行耦合。该系统的 Lyapunov 指数也不是方程(4a)和(4b)各自 Lyapunov 指数的简单组合。对于单独的方程 $y_{t+1} = K \tanh(\alpha_1 y_t) \exp(-\beta_1 y_t)$ 或 $x_{t+1} = K \tanh(\alpha_2 x_t) \exp(-\beta_2 x_t)$ 来说, 当 $K = 10, 0.6 < \alpha_1 < 1.8, \alpha_2 = \beta_1 = 1.0, \beta_2 = 1.5$, Lyapunov 指数均是负数, 而方程组(4)的 Lyapunov 指数在相同的参数条件下, 却存在 (+, +) (如图 3 所示)。可见, 方程组(4)的超混沌现象是通过耦合产生的, 我们称之为参数耦合法。

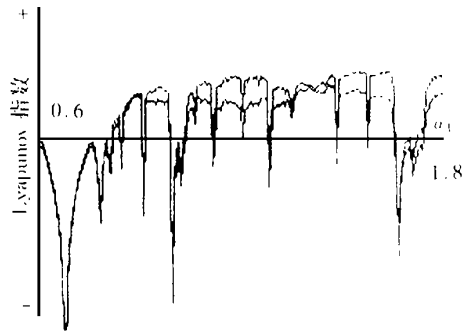


图 3 混沌方程组(4)的 Lyapunov 指数
 Fig. 3 The Lyapunov exponents of eqs. (4)

从图 3 中可看出, 对于二维混沌方程组(4), Lyapunov 指数出现 (+, +) 的情况, 意味着二维方程组也可产生超混沌现象。这对于用其他耦合法的混沌方程组来说, 是很难实现的。因为混沌的发生是在一定吸引子区域内, 在相空间某些方向上指数速度向外扩散, 而在另一些方向上指数向内收缩, 在相空间上不断扭曲而产生混沌现象。因此, 对于混沌方程组, 当系统 Lyapunov 指数有 1 个以上是正值时, 一般必然伴随有负的 Lyapunov 指数。

其实对于求混沌网络(方程组)的 Lyapunov 指数时, 计算 Lyapunov 指数意义上的相空间维数(I)和方程组实际维数(i)是有区别的。在计算 Lyapunov 指数时, 允许 $I > i$ ^[11, 14]。只是方程组中正的 Lyapunov 指数一般小于 i , 扩大相空间上的 I 只是增加负 Lyapunov 指数个数, 没有实际意义, 因此通常取 $I = i$ 计算网络的 Lyapunov 指数。对于方程组(4)的 (+, +) Lyapunov 指数, 也可以是 (+, +, -, -, ..., -) 的多维形式。因此二维混沌方程组(4)的 Lyapunov 指数出现 (+, +) 的情况并不违背在相空间上, 混沌吸引子同时具有指数扩张与收缩

的特征。

利用参数耦合法所建立的混沌网络具有以下优点: 首先, 网络的维数可任意缩减, 直至一维混沌方程, 只需把不同维的参数值调成一致即可; 其次, 通过二维混沌方程组就可以产生两个正的 Lyapunov 指数, 即超混沌现象, 这是其他耦合法所难以达到的。但是, 这种超混沌的特性与用单向耦合法所产生的超混沌现象有无异同, 还有待于进一步研究。

4 结 论

本文提出新的混沌方程, 并通过单向耦合法扩展成超混沌网络, 计算机模拟显示, 该混沌网络具有丰富的混沌及超混沌现象, 此混沌网络参数动态范围大, 能产生丰富的超混沌现象, 可以在提高激光器输出功率、保密通信等领域获得应用。在单向耦合法的基础上, 本文提出一种新的耦合法: 参数耦合法。通过此耦合法扩展成的混沌网络, 只需二维方程组就可以产生超混沌现象。由于混沌网络的各个方程之间只有参数取值的不同, 所以网络可通过调整参数值一致的方法任意改变维数。与其他耦合法所建立的混沌网络相比, 该网络高效、灵活、器件上易于实现。然而参数耦合法所构造的超混沌系统从方法上与其他耦合法(如单向耦合法)有很大不同, 前者利用参数的不同扩展维数引发混沌, 后者一般利用不同维向量的相互制约产生混沌。因此, 对于利用参数耦合法和利用其他耦合法所产生的超混沌动力学的异同还需系统地研究。

参 考 文 献

- [1] 方锦清. 非线性系统中混沌的控制与同步及其应用前景(一)[J]. 物理学进展, 1996, 16(1): 1~ 74.
- [2] Henry D I. Secure communications and unstable periodic orbits of strange attractors[J]. IEEE Trans. On Circuits and Systems, 1993, 40(10): 643~ 645.
- [3] Zhou Chang-song, Chen Tian-lun. Digital communication robust to transmission error via chaotic synchronization based on contraction maps[J]. Phys. Rev. E, 1997, 56(2): 1599~ 1603.

- [4] Shuai J W, Wong K W, Cheng L M. Synchronization of spatiotemporal chaos with positive conditional Lyapunov exponents[J]. Phys. Rev. E, 1997, 56(2): 2272~ 2275.
- [5] Kocarev L, Parlitz U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication [J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(25): 5028~ 5031.
- [6] Perez G, Cerdeira H A. Extracting messages masked by chaos[J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(11): 1970~ 1973.
- [7] Kurten K E, Clark J W. Chaos in neural systems[J]. Phys. Lett., 1986, 114(7): 413~ 418.
- [8] Baier G, Sahle S. Design of hyperchaotic flows[J]. Phys. Rev. E, 1995, 51(4): 2712~ 2714.
- [9] Andrew M F, Harry L S. Independent coordinates for strange attractors from mutual information[J]. Phys. Rev. A, 1986, 33(2): 1134~ 1140.
- [10] Bohr T, Christensen O B. Size dependence, coherence, and scaling in turbulent coupled-map lattices[J]. Phys. Rev. Lett., 1989, 63(20): 2161~ 2164.
- [11] Alan W, Jack B S, Harry L S et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D, 1985, 16: 285~ 317.
- [12] Shuai J W, Chen Z X, Liu R T et al. A chaotic neural model[J]. Chin. Phys. Lett., 1996, 13(3): 185~ 190.
- [13] 陈剑勇, 陈振湘, 郑金成等. 非单调混沌神经元的电路实现[J]. 半导体光电, 1997, 18(5): 302~ 306.
- [14] Wright J. Method for calculating a Lyapunov exponent [J]. Phys. Rev. A, 1984, 29(5): 2924~ 2927.
- [15] Louis M P, Thomas L C. Synchronization in chaotic system[J]. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821~ 824.
- [16] Hu Gang, Xiao Jinghua, Yang Junzhong et al. Synchronization of spatiotemporal chaos and its applications[J]. Phys. Rev. E, 1997, 56(3): 2738~ 2746.



陈雪玲 女, 1973 年生, 1994 年毕业于福建师范大学物理系, 同年入厦门大学物理系工作, 现为厦门大学物理系在职硕士研究生。