第 10卷 第 3期 集美大学学报 (自然科学版) Vol. 10 No. 3
2005年 9月 Journal of Jimei University(Natural Science) Sep. 2005

[文章编号] 1007 - 7405(2005)03 - 0210 - 06

混沌序列复杂性分析及其数值仿真的精度问题

刘年生[1,2], **郭东辉**[2], **吴伯僖**[2]

(1. 集美大学计算机工程学院, 福建 厦门 361021; 2. 厦门大学物理与机电工程学院, 福建 厦门 361005)

[摘要] 介绍一种能够定量分析混沌序列复杂性的计算方法, 并以 Lorenz混沌系统的数值序列复杂性计算为例, 说明数值序列的伪随机二进制转化过程中精度选取的重要性.

[关键词] 序列复杂性; Lorenz混沌系统; 混沌二进制序列; 计算精度

[中图分类号] TP 301.5; TP 391.9 **[文献标识码]** A

0 引言

自 1963年 Lorenz混沌系统[1]提出以来, 计算机数值仿真一直是人们研究混沌系统性质的主要手段之一, 对于数值连续的混沌系统而言, 不同精度设置的计算机数值计算可能得出截然不同的仿真结果[2]. 同样, 对于混沌系统所产生的二进制伪随机序列, 如果采用数值仿真方法进行复杂性分析[3], 同样需要考虑其二进制量化的精度问题, 否则就会得出错误的结论. 为此, 本文首先介绍一种能够定量分析混沌序列复杂性的数值计算方法, 并以 Lorenz混沌系统的数值序列复杂性计算为例, 说明数值序列的随机二进制转化过程中精度选取的重要性.

1 数值的随机二进制转化

由混沌系统所产生的离散时间实数序列一般具有很好的随机性, 但是, 在实际应用中往往需要二进制的混沌伪随机序列[4]. 为了保证二进制混沌序列的随机性, 混沌实数序列的二进制转化可以采用 T. Kohda等人提出的实数量化算法[5]. 该量化算法定义一个阈函数 $\sigma_{\vartheta}(x)$ 为:

$$\sigma_{\vartheta}(x) = \begin{cases} 0 & (x < \vartheta) \\ 1 & (x \geq \vartheta) \end{cases} \tag{1}$$

这样, 任何一个实数 x绝对值可以表示为二进制数:

$$|x| = 0.c^1(x)c^2(x)\cdots c^m(x) \qquad c^i(x) \in \{0, 1\} \tag{2}$$

$$c^i(x) = \sigma_{\frac{1}{2}}\left(2^{i-1}|x| - \sum_{p=1}^{i-1} 2^{i-p-1}c^p(x)\right) \tag{3}$$

其中, m为二进制数长度. 对于一个无限精度的实数 x, 它可以表示成为无限长度的二进制序列值[6], 即 $m \to \infty$. 但是, 由于任意一种实际的应用系统均存在计算精度问题, 因此, 必须考虑的该量化算法的二进制长度选取问题.

下面以 Lorenz混沌系统为例, 分析计算精度对二进制序列量化的影响. Lorenz混沌系统方程为:

[收稿日期] 2004 - 03 - 25
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目 (69886002; 60076015); 福建省自然科学基金资助项目 (A0010019); 集美大学科研启动基金资助项目 (F04005; ZA2005008)
[作者简介] 刘年生 (1967 -), 男, 副教授, 博士, 从事人工智能、网络通讯方面的研究.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \tag{4}$$

在 Matlab工具中采用双精度进行数值仿真时, 当设定参数 $\sigma = 10$、$b = 2$和 $\gamma = 20$时, 时间间隔为 $\mathrm{d}t = 0.01$, 状态初始值为 $x = 0.2$、$y = 0.3$和 $z = 0.2$, 其 Lyapunov指数大于 0, 可获得状态值 x的混沌实数序列. 在该序列中随机选取两个数值, 如 $x_p = 5.015398946036026\mathrm{e}-001$, $x_q = 5.459853574408223\mathrm{e}-006$, 按照式 (2)、式 (3) 进行量化, 所得到的二进制序列分别如图 1、图 2所示.

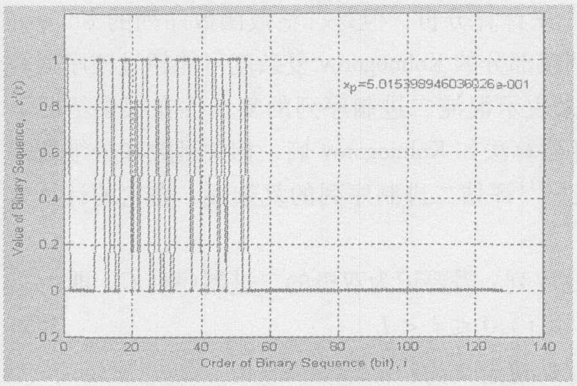

图 1　x=0.5015398946036026 时所得到的随机二进制序列

Fig.1　Random binary sequence transformed from x=0.5015398946036026

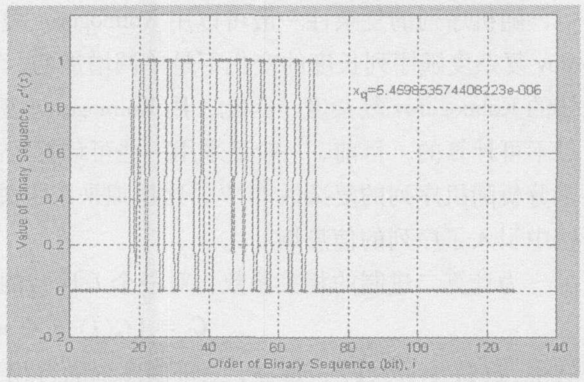

图 2　x=0.000005429853574408223 时所得到的随机二进制序列

Fig.2　Random binary sequence transformed from x=0.000005429853574408223

比较图 1和图 2可以看到, 把浮点数 $x_p = 5.015398946036026\mathrm{e}-001$按照 T. Kohda方法转换成随机的二进制序列, 当 $i > 52$时, 均有 $c^i(x) = 0$; 而对于 $x_q = 5.459853574408223\mathrm{e}-006$, 则当 $i > 70$时, $c^i(x) = 0$, 这比前者迟后了 18 bits 这主要是因为在计算机仿真过程中, 计算机把每个实数采用科学记数法表示, 即把 x_p和 x_q分别表示为 $0.5015398946036026 \times 10^0$、$0.5459853574408223 \times 10^{-5}$, 以双精度的浮点数方式贮存, 其总长度为 64 bits, 其中符号位 1 bit, 指数部分 11 bits, 剩下的 52 bits用于表示小数部分, 则计算时小数部分的相对精度为 2^{-52}, 在采用式 (2) 和式 (3) 进行二进制量化时, 如果采用移位编程方法来计算, 每移位一次相当于实数 x的相对值放大一倍, 这样, 当计算机中所贮存的小数部分全部转化为整数时, 计算机均用"0"赋予给 $c^i(x)$. 显然, 这样按 T. Kohda量化算法所得到的二进制序列取决于计算机存储该实数 x的数值精度. 因此, 如果没有考虑到计算机数值计算的精度, 而取 $m > l$(l表示相对精度的二进制长度) 时, 这样得到实数值二进制序列的随机性是没有保证的.

另外, 在 T. Kohda等人提出的实数量化算法中, 要求所量化的实数 x绝对值小于 1, 但是由式 (4) 所得到的 Lorenz混沌系统状态值 x的绝对值往往是大于 1的, 其数值分布如图 3所示 (这是遍历数值统计的 Lorenz系统实验结果). 可见, 大部分状态值的绝对值大于 1, 这种状态值大于 1的实数

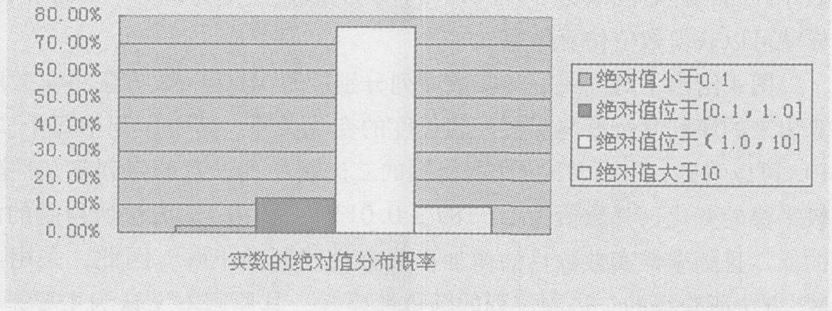

图 3　Lorenz 系统状态值的绝对值分布

Fig.3　Distribution of absolute state value for lorenz system

量化后的有效二进制长度低于 52 bits, 约为 ($52 - \log_2 10^n$) bits, 其中 n为实数用科学记数法表示时的指数值. 因此, 在对 Lorenz混沌系统所产生的离散时间实数序列进行二进制转化时, 需要先将绝对值大于 1的实数变换成绝对值小于 1的实数. 为了解这种变化可能引起序列随机性的变化影响, 这里引入两种变换方法: M1方法和 M2方法. 其中, M1方法是把序列中绝对值大于 1的实数直接截除其整数部分, 而 M2方法是将序列中每个实数以缩放方式 (即乘或除 10指数方) 使其绝对值调整至 (0.1, 1.0) 范围内.

2 混沌序列的复杂性

随机序列的复杂性一般可以用 Kolmogorov复杂度[7]来计算分析, 但是, 整数函数序列的 Kolmogorov复杂度随序列长度的变化不是单调增加的, 即序列某部分的 Kolmogorov复杂度可能超过该序列整体的 Kolmogorov复杂度. 因此, 用 Kolmogorov复杂度来表示混沌二进制序列的复杂性在很多情况下是不可计算的. 目前, 一般是采用一些可计算的近似评估算法如 Kolmogorov熵、相关函数和分维数等来分析随机序列的复杂性[8~10], 这里拟采用相关函数法[11]评估二进制序列的复杂性, 在它的计算方法中引入了序列的信息熵.

为计算二进制的相关函数, 对一个 L比特的二进制序列 c需要记为双极的二进制序列 C, 即:

$$C = \{ C(i) = 2 * c^i(x) - 1 \}, 0 \leq i < L \tag{5}$$

其中, $c(i) \in \{0, 1\}$. 这样, 二进制序列的自相关函数 $\mathbf{R}$可定义为:

$$\mathbf{R} = \{ r(i) \}, 0 \leq i < L \tag{6}$$

其中: $r(i) = \sum_{j=0}^{L-i-1} C(j) C(i+j)$. 而非负功率谱密度 ϕ_i可通过 $\mathbf{R}$的 Fourier变换计算出来, 即:

$$\phi = abs(fft(R)) \tag{7}$$

其中 $\phi = \{\phi_i\}, 0 \leq i < L$, abs表示实数绝对值或复数模. 这样, 混沌二进制序列 c的复杂性可以用复杂度 Ψ 来定量表示, 即:

$$\Psi = \frac{1}{F} \sum_{i=0}^{L-1} \phi_i \log \phi_i \tag{8}$$

其中, F为归一因子.

3 数值仿真与结果分析

有了上述混沌二进制序列复杂性的定量计算方法, 就可以采用数值仿真的方式来分析 Lorenz混沌系统所产生混沌二进制序列的复杂性. 下面就式 (4) 的 Lorenz混沌系统, 设定参数 $\sigma = 10$、$b = 2$和 $\gamma = 20$, 状态初始值为 $x = 0.2$、$y = 0.3$和 $z = 0.2$, 仿真迭代时间间隔选为 $dt = 0.01$, 离散实数序列的采样时间取为 $\Delta t = 0.1$, 序列的起始点定为 $x(t = 100)$, 即除去最初的 1 000个采样点. 这样就可以获得数值仿真结果.

图 4给出了对同一混沌实数序列分别按照 M1和 M2方法将实数序列量化成混沌二进制序列后计算出来的序列复杂度与实数序列长度的变化关系, 其中序列中每个实数的二进制量化长度取为 $m = 10$. 可以看到, 采用 M1方法所得到的二进制序列, 它的序列复杂性随采样实数数目的增加而呈现出较平稳的变化, 其数值为 (0.189 ± 0.013); 而由 M2方法所得到的混沌二进制序列复杂性就比前者的低, 且随采样实数数目的增加而复杂性不断地下降. 因此, 采用 M1方法所获得的二进制序列比 M2方法所获得的二进制序列的随机性要好, 其原因本文认为主要是由于 M2方法在放大或缩小处理时有规律地改变了原实数序列的混沌特性, 特别是实数序列越长, 规律性越明显, 即复杂度下降, 这一点可进一步从图 5和图 6所示的二进制序列频谱和功率谱中得到印证. 在图 5和图 6中, 混沌二进

制序列的长度为 $L=3\,000$ bits, 结果显示混沌实数经过 M2方法变换后的二进制序列频谱和功率谱密度分布不如 M1方法得出的均匀，例如：在图 5中 M2方法的序列频谱存在两处明显的中心频谱，相应地，在图 6中序列的功率谱密度的分布就不如 M1方法的均匀. 因此，以下分析计算精度的不同选取对 Lorenz混沌系统的复杂性分析的影响时需要采用 M1方法来二进制量化.

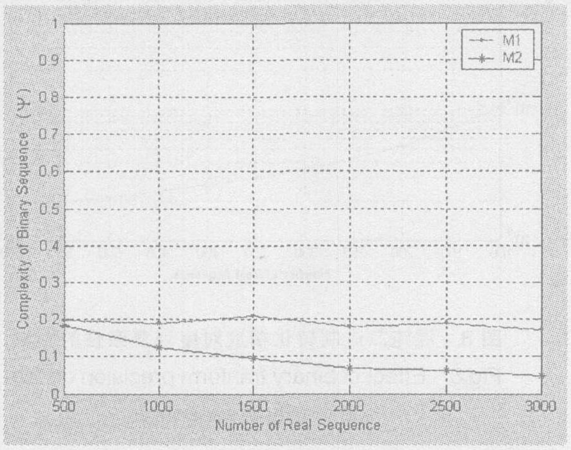

图 4　M1 和 M2 变换方法对二进制序列复杂性的影响

Fig.4　Effect of M1 and M2 transform method on the complexity of binary sequence

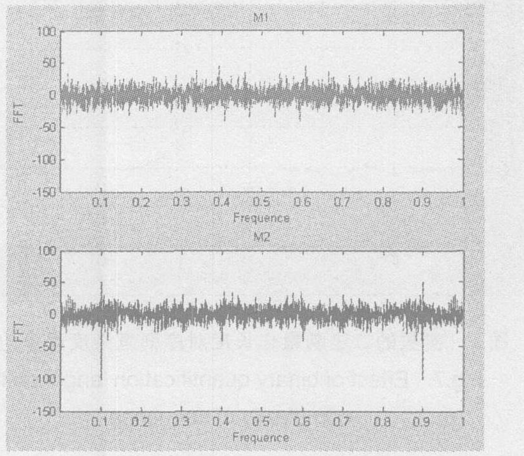

图 5　同一实数序列经 M1 和 M2 变换后频谱的比较

Fig.5　Frequence spectrum comparison of real sequence between M1 and M2

图 7给出实数二进制量化长度 m 的不同取值时，混沌实数序列的复杂度计算值，其中混沌实数序列的实数个数 $K=200$, 即各混沌二进制序列长度 $L=200*m$. 由图 7可以看出，当二进制量化长度 m 取值超出双精度浮点数的精度定义即 52 bits时，混沌序列的复杂度明显开始变小，并趋近于 0, 这主要是由于大多 Lorenz系统状态实数 x在二进制序列量化时，当量化位数超过 52 bits时后面的每一位数均被置为“0”, 而不再是随机的二进制赋值. 可见，采用数值仿真方法来分析混沌系统的复杂性时必须考虑到数值仿真的精度设置问题. 图 8仿真计算的结果也进一步证实了这一点，对于每个实数二进制量化后分别选取 $i=1\sim50$和 $i=11\sim60$两种情况的数值二进制表示来组成混沌二进制长序列 (它们的长度均为 $L=50*N$) 时，图 8表示实数序列长度 K不同情况下这两种混沌二进制序列的复杂度. 显然，第一种情况即取 $i=1\sim50$的序列复杂度几乎不受 N的影响，序列的复杂性保持在相对较高的稳定水平；而第二种情况即取 $i=11\sim60$的序列复杂度随着 N增大而明显单调递减. 这是因为第二种情况下实数序列中的每个实数所选取 52 bits以后的二进制位会出现连续的 0序列串，当 N越大时这种规律越明显，致使序列复杂性降低，最终趋向于零.

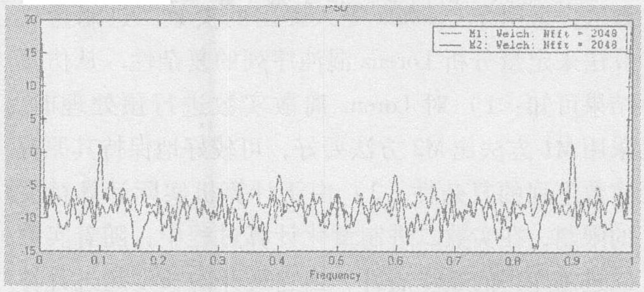

图 6　同一实数序列经 M1 和 M2 变换后功率谱密度的比较

Fig.6　Frequence spectrum density comparison of sequence between M1 and M2

根据 Kolmogorov复杂性理论的定义[7,12]，有效的实数序列复杂度计算值不应随数值二进制量化序列不同位置的选取而变化. 为此，本文分别给出图 9的 Lorenz系统数值仿真结果，图 9则给出 $i=1\sim10$、$i=11\sim20$、$i=21\sim30$和 $i=31\sim40$ 4种情况的序列复杂度计算结果，显然在数值仿真精度允许的范围内，实数序列的复杂度计算值是不随数值二进制量化序列不同位置的选取而变化的.

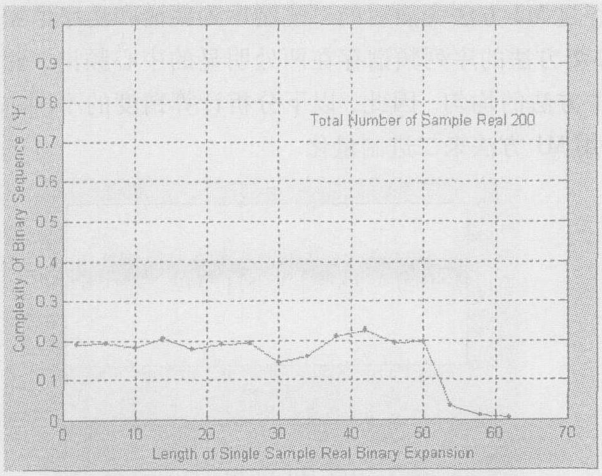

图 7 实数的二进制量化长度对序列复杂度计算的影响

Fig.7 Effect of binary quantification length on the complexity of sequence

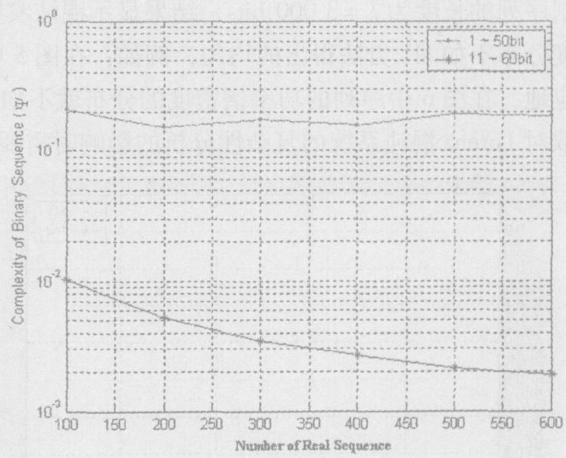

图 8 混沌二进制转化精度对序列复杂性的影响

Fig.8 Effect of binary tranform precision on the complexity of sequence

4 结论

综上所述，可以通过定义基于信息熵的相关函数法，采用 T. Kohda等人提出的实数二进制量化算法来定量分析 Lorenz混沌序列的复杂性. 从仿真结果可知: 1) 对 Lorenz离散实数进行预处理时，采用 M1方法比 M2方法要好，可较好地保持其原有实数序列的复杂性. 2) 由于计算机实际计算精度的限制，在实数二进制量化计算过程中，随着实数二进制序列的逐步展开，当它展开的长度超过计算机的对该实数的二进制储存有效长度时，所得到的转换序列并不是按 T. Kohda算法所计算出的真实结果，从而影响到整个实数序列真实的复杂性. 因此，在混沌序列复杂性的数值仿真计算中，一定应注意到计算机的计算精度，如果忽略其二进制转化精度，就可能得出一些错误的结论.

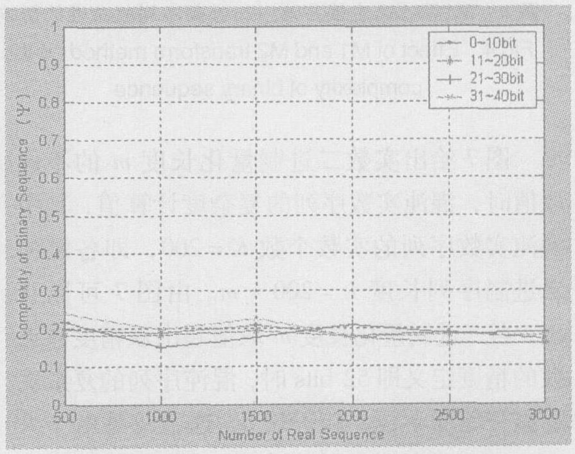

图 9 对每个样本实数的二进制表示值选取位置不同时序列复杂性的比较

Fig.9 Complexity comparison of binary sequences selected in different section

同时，从仿真计算结果还可以看到，由于 Lorenz混沌系统是个平滑的系统，所产生的序列复杂性并不是很高，要获得高复杂性的二进制序列需要对 Lorenz混沌系统进行改进，增大非线性变换区间或提出新的混沌系统模型.

[参 考 文 献]

[1] Lorenz E N. Deterministic Nonperiodic Flow [J]. J Atmospheric Sci, 1993, 71 (1): 130-141.

[2] Zhou C S, Lai C H. Analysis of spurious synchronization with positive conditional Lyapunov exponents in computer simulations [J]. HYSICA D, 2000, 135 (1-2): 1-23.

[3] Tohru Kohda, Akio Tsuneda, Tetsuya Sakae. Chaotic Binary Sequences by Chebyshev Maps and Their Correction Properties [C]. IEEE Second International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications 1992. 63 -66.

[4] F C M Lau, M Ye, C K Tse, et al. Anti-Jamming Performance of Chaotic Digital Communication System [J]. IEEE

transactions on circuits, 2002, 49 (10): 1486-1494.

[5] Tohru Kohda, Akio Tsuneda. Statistics of Chaotic Binary Sequences [J]. IEEE transactions on information theory, 1997, 43 (1): 104-112.

[6] Tohru Kohda, Akio Tsuneda. Pseudonoise sequences by chaotic nonlinear maps and their correlation properties [J]. IEICE Trans, 1993, 77 (8): 855-862.

[7] C H Bennett, Péter Gács, Ming Li, et al. Information Distance [J]. IEEE transactions on information theory, 1998. 44 (4): 1407-1423.

[8] P Hertling, K Weihrauch. Randomness spaces [A]. K G Larsen, S Skyum, G Winskel. Automata, Languages and Programming [C]. Berlin: Springer, 1998. 1443, 56-63.

[9] Peter Grassberger, Itamar Procaccia. Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal [J]. PHYSICAL REVIEW A, 1983, 28 (4): 2591-2593.

[10] Heinz Georg Schuster. Deterministic Chaos: An Introduction [M]. Weinheim: Physik-Verlag, 1984.

[11] Scott Evans, Stephen F Bush, John Hershey. Information Assurance through Kolmogorov Complexity [C]. DARPA Information Survivability conference & Exposition, 2001. 322-330.

[12] Ludwig Staiger. The Kolmogorov complexity of real number [J]. J Theoretical Computer Science, 2002, 284: 455-466.

Complexity Analysis of Chaotic Sequence and the Accuracy of Its Numerical Simulation

LIU Nian-sheng[1,2], GUO Dong-hui[2], WU Bo-xi[2]

(1. School of Computer Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China;

2. School of Physics and Mechanical & Electrical Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: A quantitative computable method of sequence complexity is introduced in this paper, and it is demonstrated the importance of computing accuracy selection for floating point number being transformed to pseudorandom binary sequence by the complexity analysis of chaotic sequence of Lorenz equations.

Key words: complexity of sequence; Lorenz chaotic system; chaotic binary sequence; computing precision

(责任编辑 马建华)