

# 基于自适应超完备稀疏表示的图像去噪方法\*

肖泉<sup>1</sup>, 丁兴号<sup>1</sup>, 王守觉<sup>1,2</sup>, 郭东辉<sup>1</sup>, 廖英豪<sup>1</sup>

(1 厦门大学信息科学与技术学院 厦门 361005; 2 中国科学院半导体研究所 北京 100083)

**摘要:** 基于超完备字典的图像稀疏表示是一种新的图像表示理论, 利用超完备字典的冗余性可以有效地捕捉图像的各种结构特征, 从而实现图像的有效表示。当前稀疏表示的理论研究主要集中在稀疏分解算法和字典构造算法两方面。本文提出一种新的超完备字典构造算法: K-LMS 算法, 该算法由 K 均值聚类算法泛化获得, 可用于超完备字典的自适应更新, 以实现图像的有效表示。针对图像去噪问题, 本文给出一种基于超完备稀疏表示的去噪方法, 该方法利用图像在超完备字典上的自适应稀疏分解, 通过阈值处理的方法实现了图像去噪, 实验结果证实了本文所提方法的有效性。

**关键词:** 稀疏表示; 超完备字典; 图像去噪; 阈值

中图分类号: TN911.73 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 510.4050

## Image denoising based on adaptive over-complete sparse representation

Xiao Quan<sup>1</sup>, Ding Xinghao<sup>1</sup>, Wang Shoujue<sup>1,2</sup>, Guo Donghui<sup>1</sup>, Liao Yinghao<sup>1</sup>

(1 School of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2 Institute of Semiconductors, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The sparse representation based on over-complete dictionary is a new image representation theory. The redundancy of over-complete dictionary can make it effectively capture the geometrical characteristics of the images. Recent activities in this field concentrate mainly on the study of sparse decomposition algorithm and dictionary design algorithm. In this paper we propose a novel dictionary design algorithm, the K-LMS algorithm. It was obtained from generalizing the K-Means clustering algorithm and can be used in adaptive updating of over-complete dictionary in order to achieve sparse signal representations. Aiming at image denoising, a method based on over-complete sparse representation theory is introduced. With the application of image sparse representation in over-complete dictionary, the proposed algorithm reconstructs a simple threshold to realize image denoising. Experimental results demonstrate the effectivity of the proposed method.

**Key words:** sparse representation; over-complete dictionary; image denoising; threshold

## 1 引言

图像信息的“有效”表示是图像去噪等处理任务的基础。“有效”表示是指能够用较少的系数捕获感兴趣目标重要信息的能力, 即稀疏表示能力<sup>[1]</sup>。小波变换能够有效捕获点状奇异特征, 对于一维含奇异点信号是一种最优的表示方法。二维图像信号中包含边缘等一维奇异特征, 用小波表示图像时, 要用点状奇异性来逼近线状奇异性, 随着尺度的增加必然导致系数的增加, 小波稀疏表示能力急速下

降。为此, Donoho 等学者提出了多尺度几何分析(Multi-scale Geometric Analysis, MGA)的方法, 主要有 Ridgelet、Curvelet、Contourlet、Bandlet 等变换, 这些变换充分考虑了图像的某些几何特征, 因此相比小波变换能获得更稀疏的表示, 在图像去噪等领域也取得了更优的处理效果。

虽然上述 MGA 方法能比小波变换更好地捕获图像中的边缘等奇异特征, 但每一种变换只对某些特征的表示是稀疏的。自然图像中往往包含各种特征, 仅采用某一种变换很难对所有特征进行有效表示。一种办法是将多种基函数级联构造超完备字典以包含图像的各种特征, 如 Huo

收稿日期: 2008-09 Received Date: 2008-09

\*基金项目: 国家自然科学基金主任基金(60753001)、福建省自然科学基金(2008J0032)、厦门大学 985 二期信息创新平台(0000-X07204)、2008 年厦门市科技计划高校创新项目(3502Z20083006)资助项目

等<sup>[2]</sup>将小波基和 Edgelet 基级联，实现了图像的有效分解，但这种方法产生的字典规模巨大，限制了其应用。国内尹忠科等<sup>[3]</sup>研究利用字典自身的结构减少计算开销，取得不错效果。另外，通过学习、训练来获得超完备字典的方法近两年也得到了发展，如 Kreutz<sup>[4]</sup>考虑到图像之间的相似性，结合聚类算法用于字典学习取得了不错的效果。Aharon<sup>[5]</sup>将 K 均值聚类方法推广为 K-SVD 算法，用于字典自适应更新，在图像压缩<sup>[6]</sup>、复原<sup>[7]</sup>等领域均取得了很好的效果。

针对图像去噪问题，基于图像表示理论的方法一直得到广泛关注，如 Donoho 等<sup>[8]</sup>提出了著名的小波阈值方法；文献<sup>[9]</sup>在小波域下利用隐马尔可夫模型达到了去噪的目的；文献<sup>[10]</sup>则通过建立一种高斯混合模型来实现去噪；06 年 Arthur<sup>[11]</sup>等提出了一种新的 MGA 方法：无下采样 Contourlet 变换(NSCT)，并通过 Bayesian 估计方法实现图像去噪，取得初步成效。本课题组则在 NSCT 域中研究 SAR 图像的统计特性，并应用于 SAR 图像去噪取得了较好的效果<sup>[12]</sup>。

图像表示理论和基于图像表示理论的去噪方法是图像处理领域的研究热点之一，本文旨在研究基于超完备稀疏表示理论的图像去噪，并提出一种自适应超完备字典构造算法。论文首先简要介绍超完备稀疏表示理论；然后提出一种基于示例学习的超完备字典训练算法：K-LMS 算法；最后针对图像去噪，提出一种基于超完备稀疏表示的去噪方法，并通过实验证明方法的有效性。

## 2 信号超完备稀疏表示理论

近几年基于超完备稀疏分解的信号表示理论得到广泛关注，并取得了丰硕的成果。基本思想是超完备字典中的冗余基取代了传统方法中的正交基，而字典的选择应尽可能的包含被表达信号所含有的信息结构。信号的稀疏分解即从超完备字典中选择具有最佳线性组合的若干原子来表示信号，实际上它是一种逼近过程<sup>[13]</sup>：

$$f = f_m + f_r = \sum_{k \in \Omega_m} \alpha_k d_k + f_r \quad (1)$$

式中： $f_m$ 为  $f$  的逼近信号， $f_r$ 为残余分量， $d_k$ 为给定超完备字典  $D \in \mathbf{R}^{N \times K}$  中的一个原子， $\alpha$  为系数矩阵。

从稀疏角度出发，希望在  $f_r$  达到最小的情况下得到  $\alpha$  最稀疏的一个解。可构造优化函数如下：

$$\min \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \left\| f - \sum_{k \in \Omega_m} \alpha_k d_k \right\|_2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

式中： $\|\cdot\|_0$  是 L0 范数，表示不为零的元素个数。

上式对于一个冗余字典来说，如何求取惟一解是一个典型的 NP 问题。为此，众多学者提出了多种有效的稀疏分解算法，主要有 MP<sup>[14]</sup>、OMP<sup>[15]</sup>及 BP<sup>[16]</sup>等。MP 算法随稀疏分解思想的提出最早被引入，OMP 是 MP 的一种改

进算法。BP 算法则是由 Donoho 等人在文献<sup>[16]</sup>中提出，它利用 L1 范数代替 L0 范数，从而将组合优化问题转化为凸优化问题，有效解决了 NP 问题。文献<sup>[17]</sup>Donoho 还给出了基于 BP 算法的稀疏表示可精确重构的惟一边界条件。而在 Donoho 的基础上，Elad 和 Bruckstein<sup>[18]</sup>通过数学证明导出了更加严格的重构边界条件，使信号稀疏分解的重构理论得到进一步完善。

## 3 自适应超完备字典构造算法

超完备字典是实现信号稀疏表示的重要前提，因此如何构造超完备字典是稀疏表示理论的重要研究内容。本文提出一种基于示例学习的超完备字典构造算法，该算法旨在通过寻找最优字典，使基于此字典的稀疏表示对于样本的逼近均方差达到最小，构造目标函数如下：

$$\arg \min_{D, \alpha} \left\{ \left\| D\alpha - F \right\|_2^2 \right\} \quad s.t. \quad \|\alpha_i\|_0 \leq T_0 \quad (3)$$

式中： $F$ 为训练样本矩阵，其每一个列向量对应为一个训练样本； $D$ 为待构造的冗余字典，其每一个列向量对应为一个原子； $\alpha$ 为  $F$ 在  $D$ 上分解所得的系数矩阵。

在满足最小均方差意义下采用逐个原子更新的方法，通过迭代来完成字典的更新。首先，我们通过对一般的正交基进行扩展获得初始超完备字典。然后，构造用于学习的示例样本集合(它应尽可能多的包含各种信号成分)。最后，对初始超完备字典进行训练更新得到自适应超完备字典。具体步骤如下所示：

初始化阶段：

- 1) 构造初始超完备库  $D^0 = \{d_k^0; k = 1, 2, \dots, K\}$
- 2) 构造示例信号集合  $F = \{f_i; i = 1, 2, \dots, M\}$

训练更新阶段：令  $j = 1, D^j = D^0$ ， $j$  为迭代次数

- 3) 将  $F$  中的所有信号在  $D^j$  上进行稀疏分解，得到大小为  $K \times M$  的系数矩阵  $\alpha^j = \text{OMP}(F, D^j)$

- 4) 更新字典  $D^j$ ，对单个原子  $d_k^j$  逐个更新：

① 选出  $d_k^j$  所表示的信号子集：

$$\Omega_k^j = \{f_i | \alpha^j(k, i) \neq 0\}, i = 1, 2, \dots, M$$

② 计算残差： $R_k^j = \Omega_k^j - d_k^j \cdot \alpha^j(k)$

③ 构造梯度算子： $\nabla = -R_k^j \cdot \text{pinv}(\alpha^j(k))$

④ 更新原子： $d_k^{j+1} = d_k^j - \mu \cdot \nabla$ ， $\mu$  步长因子。

⑤ 所有原子更新后，重复(3)、(4)直至迭代结束。

对于二维图像信号，我们将图像进行列向量化，其他操作与一维信号一致，处理后的信号再进行反列向量化即获得处理后的图像信号。

命名该算法为 K-LMS 是因为它与 K 均值方法有一定相似性，两者都利用了 K 个类似属性的样本信息。不同的是 K 均值方法利用 K 个样本的均值来进行更新；而我们

的算法是待更新原子所表示的  $K$  个样本, 获得其重构后的残余误差, 并利用 LMS 算法对该原子进行更新, 由于每次更新是沿着残余误差递减的方向, 经过一定迭代后, 构造的字典能更优地表示训练样本。

### 4 基于超完备稀疏表示的图像去噪

考虑图像噪声为加性噪声, 其观测模型如下:

$$Y = X + n \tag{4}$$

式中:  $n \sim N(0, \sigma^2)$  为独立零均值高斯白噪声。

由式(2)可知, 图像在超完备字典上实现自适应稀疏分解, 其重构过程实质上是一个逼近过程。因此, 通过设定逼近残差  $\varepsilon$ , 即可实现图像去噪。实验中设置  $\varepsilon = k\sigma^2$ , 其中  $k$  取 1.05,  $\sigma$  为噪声标准差。最后通过以下两式实现整个图像的去噪:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \text{ s.t. } \|D\alpha - Y\|_2^2 \leq k\sigma^2 \tag{5}$$

$$\hat{X} = D\hat{\alpha} \tag{6}$$

稀疏表示理论在图像处理领域的应用效果十分明显, 但由于计算效率低下, 其实际应用受很大限制。如本文中若直接对整幅图像进行操作, 计算量十分惊人, 如一幅  $512 \times 512$  的图像, 字典冗余度为 4, 则字典中原子个数将达  $1.05 \times 10^6$  个, 按照匹配算法原则, 在忽略加法运算情况下, 每分解一次共需约  $2.75 \times 10^{11}$  次乘法, 这对目前通用的计算机来说几乎是不可能的。

为此本文将图像分成相互重叠的小图块, 这样在减小每个原子大小的同时又大大降低了字典的规模, 如采用 88 大小进行分块, 冗余度仍为 4, 则原子个数只有 256 个, 每次内积运算只需 64 次乘法, 计算量得到了极大改善。另外, K\_LMS 算法需大量样本用于字典学习, 直接对原图进行操作, 对构造样本集也是较困难的。而采用图像分块的方法, 样本全部来自目标图像本身, 所构造的字典将能更好地用于表示目标图像。

最后, 在整个去噪过程中首先实现各个小图块的去噪, 而对于各重叠区域内存在多个估值的像素点, 对其进行均值处理, 从而实现整幅图像的去噪。

### 5 实验仿真与结果分析

为验证本文去噪方法的有效性, 对叠加了不同强度高斯噪声的大小为  $512 \times 512$  的 Lena、Barbara、Boat 图像进行去噪实验, 具体步骤如下: 1)对含噪图像本身以每个像素点为中心取  $8 \times 8$  的图块(边界点不考虑), 产生一系列图块作为训练样本; 2)初始字典由冗余 DCT 基构成, 字典冗余度为 4, 如图 1(a)所示; 3)利用 K-LMS 算法对初始字典进行更新, 得到自适应超完备字典, 如图 1(b)、(c)、

(d)所示; 4)根据第三节所述的去噪方法完成图像的去噪。

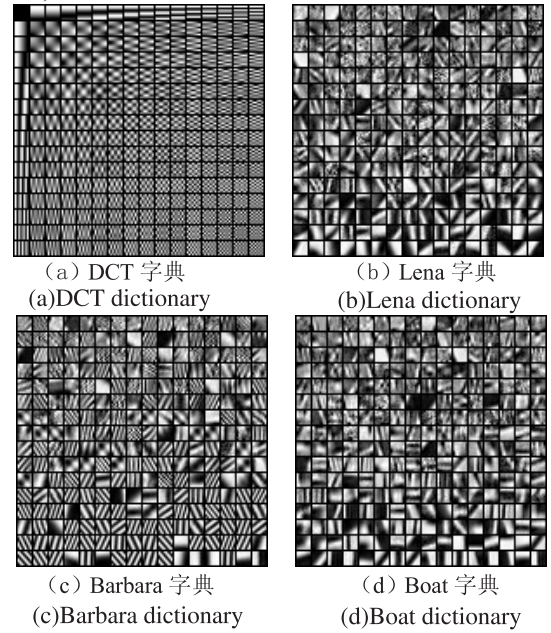


图1 非自适应字典与 K\_LMS 字典

Fig.1 Non-adaptive dictionary and K\_LMS dictionary

本文选择了几种经典的基于图像表示理论的去噪方法作为比较, 主要有: 1)文献[9]方法 (WHMT); 2)文献[10]方法 (BLS\_GSM); 3)文献[11]方法 (NSCT); 4.基于非自适应冗余 DCT 字典。表 1 列出了各种去噪方法的 PSNR 值, 由表可知在各种噪声强度下, 本文方法的 PSNR 值均高于其他方法。图 2、图 3 列出了在时对 Lena 和 Barbara 图像各种去噪效果的局部对比图, 由图可看出, 采用 NSCT 方法对图像的边缘及纹理等信息恢复的比小波方法好, 但会引入一些人工痕迹, 影响整体视觉。本文方法则较好地克服了这一点, 无论是对“Lena”图像中的“帽檐”等边缘特征还是“Barbara”图像中较丰富的纹理信息均恢复的比其他方法要好且不会产生伪影, 具有更好的主观效果。

表 1 不同去噪方法性能比较

Table 1 Comparison of different denoising methods

测试图像	$\sigma$	PSNR 值					
		Noisy	WHMT	BLS_GSM	NSCT	DCT	K_LMS
Lena	10	28.14	33.70	35.14	35.18	35.19	35.33
	15	24.62	31.74	33.34	33.30	33.20	33.54
	20	22.15	30.18	32.10	31.95	31.84	32.23
	25	20.26	29.20	31.09	30.86	30.66	31.15
Barbara	10	28.15	31.38	33.16	34.00	33.96	34.50
	15	24.63	28.97	30.80	31.86	31.62	32.44
	20	22.16	27.47	29.10	30.31	29.89	30.79
	25	20.31	26.48	27.83	29.15	28.60	29.66
Boat	10	28.15	32.92	34.46	34.25	34.48	34.76
	15	24.63	30.70	32.37	32.12	32.21	32.67
	20	22.17	29.21	30.96	30.60	30.59	31.11
	25	20.30	28.13	29.84	29.50	29.40	29.94

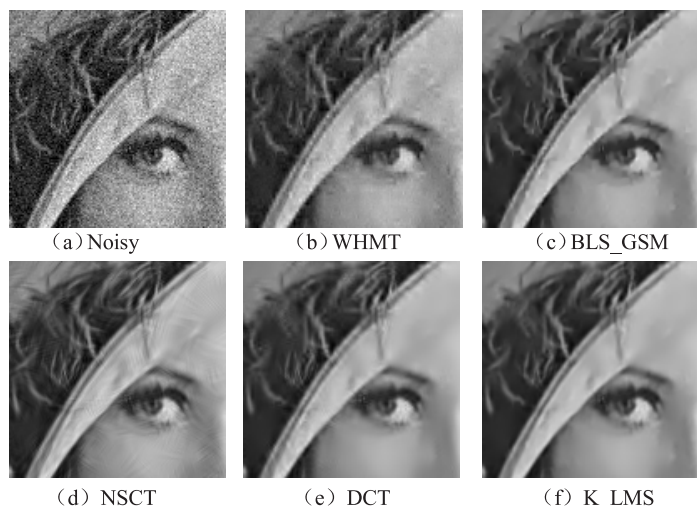


图2 Lena 图像去噪效果比较

Fig.2 Comparison of denoising results for Lena image

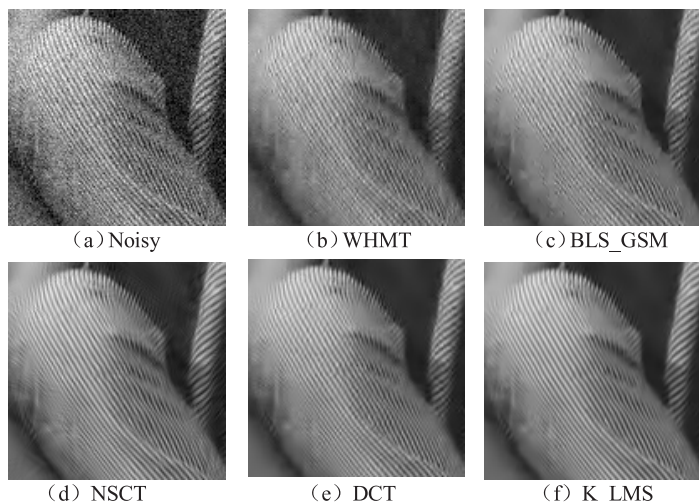


图3 Barbara 图像去噪效果比较

Fig.3 Comparison of denoising results for Barbara image

此外，值得一提的是利用 K\_LMS 自适应字典所得结果，无论从客观指标还是主观质量，都明显优于冗余 DCT 字典。这其实是由字典自身结构决定的，图 1 中的 DCT 字典能够较优地表示周期信号，因而对纹理较丰富的 Barbara 图像能获得较好的去噪性能，但对 Lena 及 Boat 图像则相对差些。而 K\_LMS 字典由于是基于图像自身内容通过训练得到，能够依据图像内容自适应调整字典，从而能获得更优的去噪性能。

## 6 结 论

根据信号超完备稀疏表示理论，本文提出了一种新的自适应超完备字典构造算法：K-LMS 算法。并利用图像在超完备字典上的稀疏性，提出了一种简单的阈值去噪方法。针对图像稀疏分解速度慢的问题，本文提出将图像分块，以图像块作为稀疏表示研究对象，有效提高了基于稀疏表示理论的图像处理速度。

实验结果证实了本文方法的有效性。相比于其他比较方法，本文方法无论是客观指标还是主观质量，均显示出了更优越的性能，且所提方法仅是简单的阈值去噪，仍有很大的改进空间，如阈值选取、重叠块的处理等。另外，本文所提的 K\_LMS 算法可以很容易移植到其他基于稀疏表示理论的图像处理中，相关工作正在进行。

## 参考文献

- [1] BRONO A, OSSHAUSEN B A, FIELD D J. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural image [J]. *Nature*, 1996,381:607-609.
- [2] DONOHO D L, XIAOMING H. Combined image representation using edgelets and wavelets[J]. *Wavelet Applications in Signal and Image Processing VII*, in SPIE, 1999, 3813:468-476.
- [3] 邵君,尹忠科,王建英. 信号稀疏分解中过完备原子库的集合划分[J]. *铁道学报*, 2006,28(1):68-71.  
SHAO J, YIN ZH K, WANG J Y. Set partitioning of the over-complete dictionary in signal sparse decomposition[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2006,28(1):68-71.
- [4] KREUTZ K, MURRAY J F. Dictionary learning algorithms for sparse representation[J]. *Neural Computation*, 2003,15(2):349-396.
- [5] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A M. The K-SVD: An algorithm for designing of overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006,54(11):4311-4322.
- [6] BRYT O, ELAD M. Compression of facial images using the K-SVD algorithm[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2008,19(4):270-283.
- [7] MAIRAL J, ELAD M, SAPIRO G. Sparse representation for color image restoration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008,17(1):53-69.
- [8] DONOHO D L, JOHNSTONE I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994,81:425-455.
- [9] ROMBERG J K, CHOI H, BARANIUK R.G. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet domain hidden markov models[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001,10(7):1056-1068.
- [10] PORTILLA J, STRELA V. Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003,12(11):1338-1351.

- [11] ARTHUR L, ZHOU J, DO M N. The nonsubsampling contourlet transform: Theory, design, and applications[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006,15(10):3089-3101.
- [12] 连学强,丁兴号,闫敬文. 基于无下采样Contourlet变换的SAR图像去噪[J]. 仪器仪表学报, 2008,29(3):512-516.  
LIAN X Q, DING X H, YAN J W. SAR image despeckling using nonsubsampling Contourlet transform[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2008,29(3):512-516.
- [13] COIFMAN R, WICKERHAUSER M. Entropy based algorithms for best basis selection[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992,38(2):713-718.
- [14] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993,41(12):3397-3415.
- [15] PATI Y C, REZAIIFAR R, KRISHNAPRASAD P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]. Proceedings of the 27th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 1993,1:40-44.
- [16] CHEN S, DONOHO D, SAUNDERS M. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1999,20(1):33-61.
- [17] DONOHO D, XIAOMING H. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001,47:2845-2862.

- [18] ELAD M, BRUCKSTEIN A M. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 48(9): 2558-2567.

### 作者简介



肖泉, 2006年于国立华侨大学获学士学位, 现为厦门大学信息学院博士研究生, 主要研究方向为图像处理、信号稀疏表示理论。

E-mail: xq\_xmu@yahoo.com.cn

**Xiao Quan** achieved bachelor degree from Huaqiao University in 2006. Now he is a doctoral student in Institute of Information Science and Technology, Xiamen University. His main research interest is image processing and theory of signal sparse representation.



丁兴号(通讯作者), 1998年于合肥工业大学获学士学位, 2003年于合肥工业大学获博士学位, 现为厦门大学信息学院副教授, 主要研究方向为图像处理、稀疏表示理论(通讯作者)。

E-mail: dxh@xmu.edu.cn.

**Ding Xinghao** achieved bachelor degree in 1998 and doctor degree in 2003 both from Hefei Industrial University. Now he is an associate professor in Institute of Information Science and Technology, Xiamen University. His main research interest is image processing and theory of signal sparse representation.