

# 弱导光纤中低次线偏振模特征方程 的数值拟合解<sup>①</sup>

蔡志平  
(物理学系)

**摘要** 借助微机的数值方法,在求出弱导光纤波导的前十个 LP 线性偏振模特征方程的数值精确解的基础上,采用最小二乘法对数值解进行拟合,获得归一化频率  $1 \leq V \leq 10$  值域内前十个 LP 模的横向传播常数  $U$  与  $V$  的解析公式,其相对误差及近似品质均优于其它方法,且具有简单的表达式,有利于光纤设计工作和理论分析等方面的应用。

**关键词** 线偏模, 特征方程解, 拟合公式

阶跃剖面弱导光纤的横向传播常数的近似是分析研究光纤弯曲、连接、几何畸变辐射、色散等效效应和定向耦合器、滤波器等光纤无源器件特性的基础,然而过去的研究工作主要集中在单模光纤<sup>[1]</sup>。由于近年来对稀土掺杂光纤的有源器件(激光器、放大器、频率上转换荧光和光开关等)的研究中常遇到几个低次 LP<sub>m</sub> 线偏模同时在稀土光纤中激发与传播,对该效应的分析则需要“少模”理论<sup>[2,3]</sup>,而 LP<sub>m</sub> 模特征方程的近似解是“少模”理论研究的重要基础。尽管 Snyder、Gloge、Miyagi 等人已对此作了大量的近似研究<sup>[1,4]</sup>,但是由于他们都是在  $V$  值很大条件下作近似,因此在  $1 \leq V \leq 10$  区间内具有较大的误差,特别在近截止值  $V_c$  附近误差甚大,以至于近似失效。本文目的在于利用最小二乘法,求出前十个线偏模特征方程解的拟合近似公式,其具有简单的形式而在误差上,特别在近  $V_c$  附近,误差得到明显的改善。

## 1 数值解与拟合处理

阶跃剖面光纤,当折射率剖面高度  $\Delta = \frac{1}{2} (1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}) \ll 1$  时,呈弱导性,此时,LP<sub>m</sub> 线偏模的横向传播常数  $U, W$  与归一化频率  $V$  满足

$$U_m = \frac{J_{l-1}(U_m)}{J_l(U_m)} = -W_m = \frac{K_{l-1}(W_m)}{K_l(W_m)} \quad (1)$$

$$V^2 = U_m^2 + W_m^2 \quad (2)$$

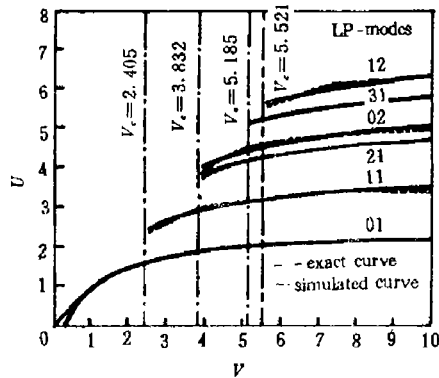


图 1 横向相位常数  $U$  随归一化频率  $V$  的变化关系  
Fig. 1 Transverse phase constant  $U$  versus the normalized frequency

① 本文 1992-10-28 收到; 国家青年基金资助项目

式(1)、(2)中模式指数  $m$  意味着:对同一  $l$  值,  $m$  越大, 对应着越高的  $U_m$  值, 即表示不同的  $LP_{lm}$  模式. 利用迭代数值方法, 在保证方程(1)两边的相对偏差小于  $10^{-4}$  条件下, 求出前十个  $LP_{lm}$  模式在  $1 \leq V \leq 10$  区间内的特征方程的数值精确解  $(V, U, W)$ , 这样解的精度已足够小于因弱导近似而引入方程(1)本身的误差. 图 1、2 中的虚线表示前十个  $LP_{lm}$  模特征方程精确解的  $U-V$  曲线.

以往  $U-V$  近似关系多采用大变量  $V$  值情况下的  $l$  阶修正贝塞尔函数的渐近关系求得<sup>[4]</sup>, 因而在适中的  $V$  值下, 尤其是近截止值附近, 这些近似的误差较大, 详细讨论见二节. 为了克服该缺点, 并且基于 Snyder 的简单近似解析解公式  $U = U_\infty \exp[-1/V]$ <sup>[4]</sup>, 提出

$$U_m = U_0 \exp[-a/V] \quad (3)$$

为  $U-V$  曲线拟合的数学模型, 式中  $U_0, a$  为待定拟合参数. 利用上述各个  $LP$  模的数值精确解  $(V, U)$  和式(3)进行最小二乘法曲线拟合, 求得前十个  $LP_{lm}$  模的  $(U_0, a)$  值如表 1 所示.

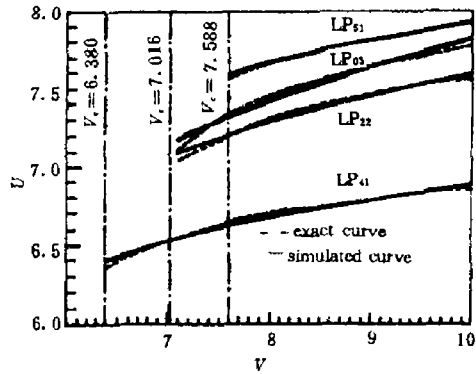


图2 横向相位常数  $U$  随归一化频率  $V$  变化关系  
Fig. 2 Transverse phase constant  $U$  versus the normalized frequency  $V$

表1 前十个  $LP$  模式的拟合参数  $U_0, a$  的计算结果

Tab. 1 Calculated fitting parameters  $U_0$  and  $a$  for the lowest ten  $LP$  modes

LP 线偏模	$LP_{01}$	$LP_{11}$	$LP_{21}$	$LP_{02}$	$LP_{12}$	$LP_{22}$	$LP_{31}$	$LP_{11}$	$LP_{22}$	$LP_{03}$	$LP_{21}$
$V$ 值范围	[1, 10]	[2.5, 10]	[3.9, 10]	[3.9, 10]	[5.2, 10]	[5.6, 10]	[6.4, 10]	[7.1, 10.7]	[7.1, 10]	[7.1, 10]	[7.6, 10]
$U_0$	2.384 0	3.915 5	5.258 8	5.871 5	6.536 6	7.463 7	7.773 9	8.950 1	9.527 5	9.006 7	
$a$	0.890 8	1.096 2	1.164 2	1.456 8	1.213 6	1.583 8	1.242 9	1.652 5	1.997 3	1.292 5	

由式(3)计算出的前十个  $LP_{lm}$  模的拟合曲线如图 1、2 中实线所示, 与虚线所表示的精确解符合得相当不错.

## 2 误差分析

拟合近似解式(3)和几种重要近似解的相对误差的比较列于表 2, 表中相对误差的绝对值  $E$  (以%为单位) 栏的第一行值表示在确定的  $V$  值域内  $E$  的分布范围, 其中“ $<C$ ”意味着相对误差有通过零误差, 而  $C$  值为相对误差的上限;  $E$  栏中的第二行值表示确定  $V$  值域内, 误差  $E$  的分布数量级, 它定性地显示了  $U-V$  的近似品质. 从第二行的数值可见, 式(3)的近似精度与 Miyagi( $M-N$ ) 的近似相当, 但式(3)比  $M-N$  近似公式简单得多, 与 Snyder, Gloge 的近似相比, 式(3)的近似精度则高一个数量级以上, 而式(3)具有和这两种近似解同样简单的表达形式.

表 2 在  $1 < V < 10$  值域上  $U$  的相对误差比较

Tab. 2 Comparison of relative errors for  $U$  versus  $V$  in the range [1,10]

LP 线偏模	V 值范围	相对误差 $E =  U_{app} - U_{ex}  / U_{ex} \cdot (\%)$			
		Snyder	Gloge	Miyagi	this work
LP <sub>01</sub>	1~10	0.4~9.7	0.5~1.5	0.01~1.6	<0.17
		1.0	1.0	0.1	0.01
LP <sub>11</sub>	2.5~10	<3.7	0.9~7.6	<2.0	<2.0
		1.0	1.0	0.1	0.1
LP <sub>21</sub>	3.9~10	<2.8	0.7~1.7	<0.6	<0.98
		0.1	1.0	0.1	0.1
LP <sub>02</sub>	3.9~10	0.02~8.7	<5.0	0.02~5.6	<3.5
		1.0	1.0	1.0	1.0
LP <sub>22</sub>	5.2~10	0.02~2.0	0.01~0.7	0.1~0.3	<0.38
		1.0	0.1	0.1	0.1
LP <sub>12</sub>	5.6~10	0.3~5.0	<3.3	0.04~2.6	<0.9
		1.0	1.0	0.1	0.1
LP <sub>41</sub>	6.4~10	0.2~1.6	<0.4	0.2~0.5	<0.26
		1.0	0.1	0.1	0.05
LP <sub>22</sub>	7.1~10	0.7~3.5	0.1~2.5	0.08~1.5	<0.55
		1.0	1.0	0.1	0.1
LP <sub>03</sub>	7.1~10	0.9~5.6	0.3~4.6	0.2~3.4	<1.3
		1.0	1.0	1.0	0.1
LP <sub>21</sub>	7.6~10	0.4~1.3	<0.4	0.4~0.6	<0.1
		1.0	0.1	0.1	0.01

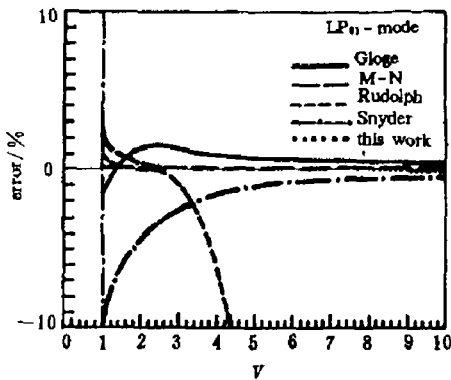


图 3 不同近似下横向相位常数  $U$  的百分比误差随  $V$  变化

Fig. 3 Variation with  $V$  of the percentage error in various approximations for the transverse phase constant  $U$

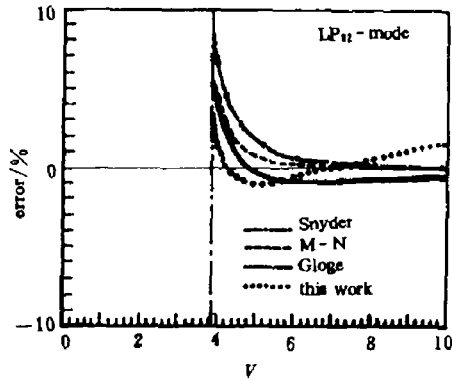


图 4 不同近似下横向相位常数  $U$  的百分比误差随  $V$  变化

Fig. 4 Variation with  $V$  of the percentage error in various approximations for the transverse phase constant  $U$

更精确地分析各种近似下的误差数据可见,对  $LP_{01}$ 、 $LP_{31}$ 、 $LP_{41}$ 、 $LP_{51}$  模,即使在近截止条件下,式(3)仍具有 0.1% 的相对误差,其近似程度均比其他近似好,并可直接用以包括近截止条件下的光纤特性的分析与计算.图 3 表示  $LP_{01}$  模的各种不同近似的相对误差  $(U_{app.} - U_{ex.})/U_{ex.}$  (单位:%) 随归一化频率  $V$  的变化关系.显然,式(3)在归一化频率  $V$  的  $[1, 10]$  值域内具有最佳的精度,即使在 Rudolph-Neumann 近似的最佳区间  $[1.4, 2.5]$  内<sup>[1]</sup>,式(3)的精度能与之相比拟( $|$ 相对误差 $| < 0.04\%$ ),但式(3)的高精度近似的有效区间  $[0.7, 10]$  则比 Rudolph-Neumann 近似宽得多.图 3 的结果还表明,其他几种近似当  $V < 3$  时具有相当大的误差.至于其他的高阶  $LP_{lm}$ ,尤其是  $m \geq 2$ ,式(3)近似的误差仍较大,其中偏离最大者为  $LP_{02}$  模,其相对误差的分布情况如图 4 所示,但在  $V$  的  $[3.9, 8]$  区间内,其精度可与其他近似相比拟;若采用  $U = U_0 \exp[-a/(V-b)]$  作二次拟合,则可达到  $< 0.1\%$  的相对误差,这部分的工作将另文报导.

### 3 结 论

本文提出用最小二乘法的数值拟合方法求得前十个低次  $LP_{lm}$  模式特征方程的近似解公式,在  $1 \leq V \leq 10$  内,其近似精度和符合程度均优于其他的近似方法,并且具有简单的表达式.特别是  $LP_{01}$  基模,与著名的 Rudolph-Neumann 近似相比,式(3)具有同样简单的公式,但适用的  $V$  值域则宽得多,可直接用于光纤的设计和稀土掺杂光纤中频率上转换等理论分析.此外,该方法还可用来研究任何  $LP_{lm}$  模式的  $U-V$  近似.

### 参 考 文 献

- 1 Snyder A W, Love J D. *Optical Waveguide Theory*, London: Chapman and Hall 1983
- 2 Seissy A et al. Fluorescence in rare earth-doped fluorozirconate fibers. *Applied Optics*, 1991, 30: 1993~1938; Fluorescence in dualwavelength pumped  $Ho^{3+}$ -fluorozirconate fibers. *J. of Lightwave Tech.*, 1991, 9: 467~470
- 3 陈光德等.掺钕单模光纤激光器的实验与理论研究. *中国激光*, 1990, 17: 106~109
- 4 Miyagi M et al. An approximate formula of describing dispersion properties of optical dielectric slab and fiber waveguides. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, 69: 291~293

## Numerical Simulated Solution of the Characteristic Equation for Lower-order LP-modes in Weakly Guiding Fibers

Cai Zhiping

(Dept. of Phys.)

**Abstract** This paper deals with exactly solving the characteristic equations of weakly guiding fibers for the lowest ten LP (Linearly Polarized) modes by means of numerical method. Moreover, the method of least squares has been used in simulating the  $U$  versus  $V$  curves for these modes, and a simulated analytical formula of the transverse constant  $U$  as a function of normalized frequency  $V$  is obtained. In the range  $1 \leq V \leq 10$ , in comparison with other method this work possesses lower relative errors of  $U$ , better approximate quality and simpler form of the formula. That is valid to practice in fiber design and theoretical analyse.

**Key words** Linear polarized mode, Characteristical equation, Simulated formula