

光学微球腔谐振模式间隔参数的一种简便计算方法

顾国强, 蔡志平, 许惠英*, 王金章, 徐斌, 闫宇

(厦门大学 电子工程系, 福建 厦门 361005)

摘要:从光学微球腔谐振模式的本征方程出发,提出了一种利用求导法计算谐振模式间尺寸参数(x)间隔的有效方法。在Lam求得尺寸参数计算公式基础上,依据谐振模式角量子数(l)必须为整数且远远大于1的性质,相邻模式($\Delta l=1$)间的尺寸参数间隔可近似表示为相应尺寸参数的导数,从而可利用求导法计算谐振模式之间的尺寸参数间隔。研究表明,径向量子数 $i=1$ 的谐振模式的尺寸参数间隔与Mie散射理论求得的精确数值解之间的相对误差在0.05%以内,并且与实验测量数据基本一致。求导法因不需要进行繁琐的级数展开,从而大大简化了计算程序,为光学微球腔的实验研究提供了理论指导。

关键词:光学微腔; 求导法; 尺寸参数间隔; 微球

中图分类号:O433.4; TN248.1 文献标识码:A 文章编号:1005-0086(2012)12-2267-06

A simple calculation method for resonant mode separation parameters of optical microsphere cavities

GU Guo-qiang, CAI Zhi-ping, XU Hui-ying*, WANG Jin-zhang, XU Bin, YAN Yu

(Department of Electronic Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract:In this paper, an effective derivative method has been presented to calculate the size parameter (x) separation of adjacent resonant modes ($\Delta l=1$) based on the eigenvalue equation of the resonant modes of optical microsphere. Starting from Lam's formula of size parameter, the angular mode number (l) must be integer and far larger than 1, and we deduce that the size parameter separation of adjacent resonant modes can be approximated to the derivative of the corresponding size parameter. The researches show that the relative error of size parameter separation between the derivative method and the exact value from Mie scattering theory for radial order of $i=1$ is less than 0.05%, which is also consistent with the experimental data. Because the derivative method does not require cumbersome series expansion, it greatly simplifies the calculation procedure, and can provide important theoretical guidance for the experimental studies of optical microsphere cavities.

Key words:optical microcavities; derivative method; size parameter separation; microsphere

1 引言

光学微球腔是指直径在 $5\sim 500\ \mu\text{m}$ 之间的光学介电微球谐振腔,由于其具有极高的品质因子(可达 10^{10})和极小的模式体积,使得其在低阈值激光器、窄带光学滤波、量子电动力学、非线性光学和高灵敏度传感器等领域具有很好的应用前

景^[1~6],并受到广泛关注^[7~9]。与微柱、微环和微盘等其他光学谐振腔相比,微球腔的长时间光能量存储特性是最好的^[2,10]。光波在微球内表面不断地发生全反射,从而使光波约束在赤道平面附近绕子午线运行,形成回音壁模或回廊模(WGM, whispering gallery mode)。

Mie等人^[11,12]在20世纪初研究并推导了金

* E-mail: xuhy@xmu.edu.cn

收稿日期:2012-07-02 修订日期:2012-08-02

基金项目:国家自然科学基金(61275050)和厦门市科技项目(3502Z20113004)资助课题

属和电介质球 WGM 的本征频率和散射谐振方程。根据标准的 Mie 散射理论本征方程^[13], 可以知道, WGM 光学微球腔具有形貌共振 (MDRs, morphology-dependent resonances) 的特点^[14~16]。其中, 描述光与微球之间相互作用的尺寸参数 x 是 Mie 散射理论本征方程中最重要的参量。通过对本征方程进行数值计算, 可以得到精确的尺寸参数值。但是, 这种计算方法过程比较复杂且效率低下。Lam 等人^[14] 对本征方程进行了近似求解, 利用 Bessel 函数的渐近展开公式得到了尺寸参数的求解公式, 并根据求得的尺寸参数公式, 采用泰勒级数展开的方法推导出了尺寸参数间隔的公式, 与 Mie 散射理论的精确值具有较好的近似效果。本文在 Lam 求得的尺寸参数公式基础上, 直接通过求导法推导得出尺寸参数间隔的计算公式, 然后分别利用求导法和泰勒级数展开法计算出的尺寸参数间隔值与通过 Mie 散射理论得到的精确值以及实际测得的实验数据进行比较, 并分析比较的结果。

2 理论计算

根据 Lorenz-Mie 理论, 光波在微球腔内的谐振模式, 是沿微腔表面振荡的驻波。均匀介质球内的场分布, 可以用矢量球谐函数表示。当光在微球腔内传播时, 微球和周围空气介质之间的边界表面上, 其电场和磁场的切向分量连续, 以 TE 模为例, 可得到边界方程满足^[17]

$$\frac{n_j j'_l(nx)}{j_l(nx)} = \frac{n'_l(x)}{n_l(x)} \tag{1}$$

式中: j_l 和 n_l 分别为球 Bessel 函数和球诺依曼函数; n 为相对折射率, 是微球折射率 n_s 和微球周围介质折射率 n_0 的比值; x 为尺寸参数, 是描述光与微球之间相互作用的重要参量; l 表示微球腔内谐振的 WGM 传播方向上的角量子数。

将 l 用总角动量 $v=l+1/2$ 代替, 并把 j_l 和 n_l 换成对应的柱函数, 则可得

$$\frac{nJ'_v(nx)}{J_v(nx)} = \frac{Y'_v(x)}{Y_v(x)} \tag{2}$$

特征方程(2)是超越方程, 只能从数值上解出尺寸参数 $x_{i,l}$ 的离散特征值, 其中 i 为微球谐振腔内 WGM 的径向量子数, 是与角量子数 l 相关的特征方程的第 i 个根。虽然数值计算可以解出精确的尺寸参数 $x_{i,l}$ 的值, 但是这种方法每次只能计算出 TE 或 TM 模式下, 单个模式数所对应的各阶尺寸参数值, 因而计算过程比较繁琐、低效。Lam 通过对特征方程中的 Bessel 函数进行渐近展开, 得到了一个显式的渐近公式^[14]

$$nx_{i,l} = v + 2^{-1/3} \alpha_i v^{1/3} - \frac{P}{(n^2 - 1)^{1/2}} + \left(\frac{3}{10} 2^{-2/3}\right) \alpha_i^2 v^{-1/3} - \frac{2^{-1/3} P(n^2 - 2P^2/3)}{(n^2 - 1)^{3/2}} \alpha_i v^{-2/3} + O(v^{-1}) \tag{3}$$

其中: TE 模时, $P=n$, TM 模时, $P=1/n$; α_i 为 Airy 函数 $Ai(-z)$ 的第 i 个根, $\alpha_1 = 2.338, \alpha_2 = 4.088, \alpha_3 = 5.521$ 。

同 Mie 散射理论计算的精确值相比, 经过渐近展开得到的式(3)还是比较准确的^[14]。Lam 对式(3)两边作泰勒级数展开, 并取若干近似项进行合并, 得到尺寸参数间隔 $\Delta x_{i,l}$ 的计算公式

$$n\Delta x_{i,l} = 1 + \frac{2^{-1/3}}{3} \alpha_i v^{-2/3} - \frac{2^{-2/3}}{10} \alpha_i^2 v^{-4/3} + \left[\frac{2^{2/3}}{3} \frac{P(n^2 - 2P^2/3)}{(n^2 - 1)^{2/3}} - \frac{2^{-1/3}}{9} \right] \alpha_i v^{-5/3} + O(v^{-2}) \tag{4}$$

由式(3)作泰勒级数展开得到式(4)是比较繁杂的, 需要对式中的每一项进行泰勒级数展开, 并合并总角动量 v 幂次相同的项。

考虑到角量子数 l 是整数, 所以在 $l \gg 1, \Delta l = 1$ 时, 存在近似关系

$$\Delta x_{i,l} = x_{i,l+1} - x_{i,l} = \frac{x_{i,l+1} - x_{i,l}}{1} = \frac{x_{i,l+1} - x_{i,l}}{\Delta l} = \frac{\Delta x_{i,l}}{\Delta l} \approx \frac{dx_{i,l}}{dl} \tag{5}$$

而 $v=l+1/2$, 所以对 v 和对 l 求导的效果一样, 因此将式(3)的两边对 v 进行求导, 可得

$$n\Delta x_{i,l} = 1 + \frac{2^{-1/3}}{3} \alpha_i v^{-2/3} - \frac{2^{-2/3}}{10} \alpha_i^2 v^{-4/3} + \frac{2^{2/3}}{3} \frac{P(n^2 - 2P^2/3)}{(n^2 - 1)^{3/2}} \alpha_i v^{-5/3} + O(v^{-2}) \tag{6}$$

对比式(6)和式(4)可以看出, 使用求导法得到的式(6)和泰勒级数展开法得到的式(4)在右边展开式的第 4 项不同, 它们之间的差别主要是因为求导法和泰勒级数法在求解的方法上和渐近展开时所取的近似项不同造成的。

表 1 是分别利用这两种不同方法计算得到的结果和使用 Mie 散射理论数值计算方法得到的精确的尺寸参数间隔的比较, 可以看出, 式(6)的求导法相较于式(4)的泰勒级数展开法, 其与 Mie 散射理论的精确间隔的相对误差会更小一些, 也即是更接近于通过 Mie 散射理论计算得到的精确值; 而且使用求导法得到式(6), 因为不需要做级数展开、取近似项和合并同幂项, 比使用泰勒级数展开法得到式(4)更加快捷方便。

考虑由折射率 $n_s=1.45$ 的单模光纤(SMF)制成的微球腔, 在入射光波信号为 $1.55 \mu\text{m}$ 附近时, 计算

表 1 尺寸参数间隔 Δx 与角量子数 l 和径向量子数 i 之间的关系

Tab. 1 Size parameter separation Δx varying with angular mode number l and radial order i

| Mode | l | i | x | Δx | | | IV/% | V/% |
|------|-----|-----|----------|------------|---------|---------|-------|-------|
| | | | | I | II | III | | |
| TE | 50 | 1 | 38.079 0 | 0.708 7 | 0.708 4 | 0.708 6 | 0.042 | 0.014 |
| | 51 | 1 | 38.787 7 | 0.708 3 | 0.708 0 | 0.708 2 | 0.042 | 0.014 |
| | 45 | 2 | 38.199 9 | 0.735 1 | 0.733 0 | 0.733 4 | 0.286 | 0.231 |
| | 46 | 2 | 38.935 0 | 0.734 2 | 0.732 3 | 0.732 7 | 0.259 | 0.204 |
| | 41 | 3 | 38.300 3 | 0.758 1 | 0.754 5 | 0.755 1 | 0.475 | 0.396 |
| | 42 | 3 | 39.058 4 | 0.757 4 | 0.753 4 | 0.753 9 | 0.528 | 0.462 |
| TM | 50 | 1 | 38.548 3 | 0.709 3 | 0.708 6 | 0.708 8 | 0.099 | 0.070 |
| | 51 | 1 | 39.257 6 | 0.708 9 | 0.708 2 | 0.708 4 | 0.099 | 0.071 |
| | 45 | 2 | 38.607 3 | 0.738 2 | 0.733 4 | 0.733 8 | 0.650 | 0.596 |
| | 46 | 2 | 39.345 5 | 0.737 0 | 0.732 6 | 0.733 0 | 0.597 | 0.543 |
| | 41 | 3 | 38.568 2 | 0.766 3 | 0.755 1 | 0.755 7 | 1.462 | 1.383 |
| | 42 | 3 | 39.334 5 | 0.765 6 | 0.753 9 | 0.754 5 | 1.528 | 1.450 |

Note: The three columns for Δx refer to (I) exact value from Mie theory; (II) Lam's result, Eq. (4); (III) our result, Eq. (6); (IV) relative error of (II) compared with (I); (V) relative error of (III) compared with (I), and the refractive index n is 1.474 6.

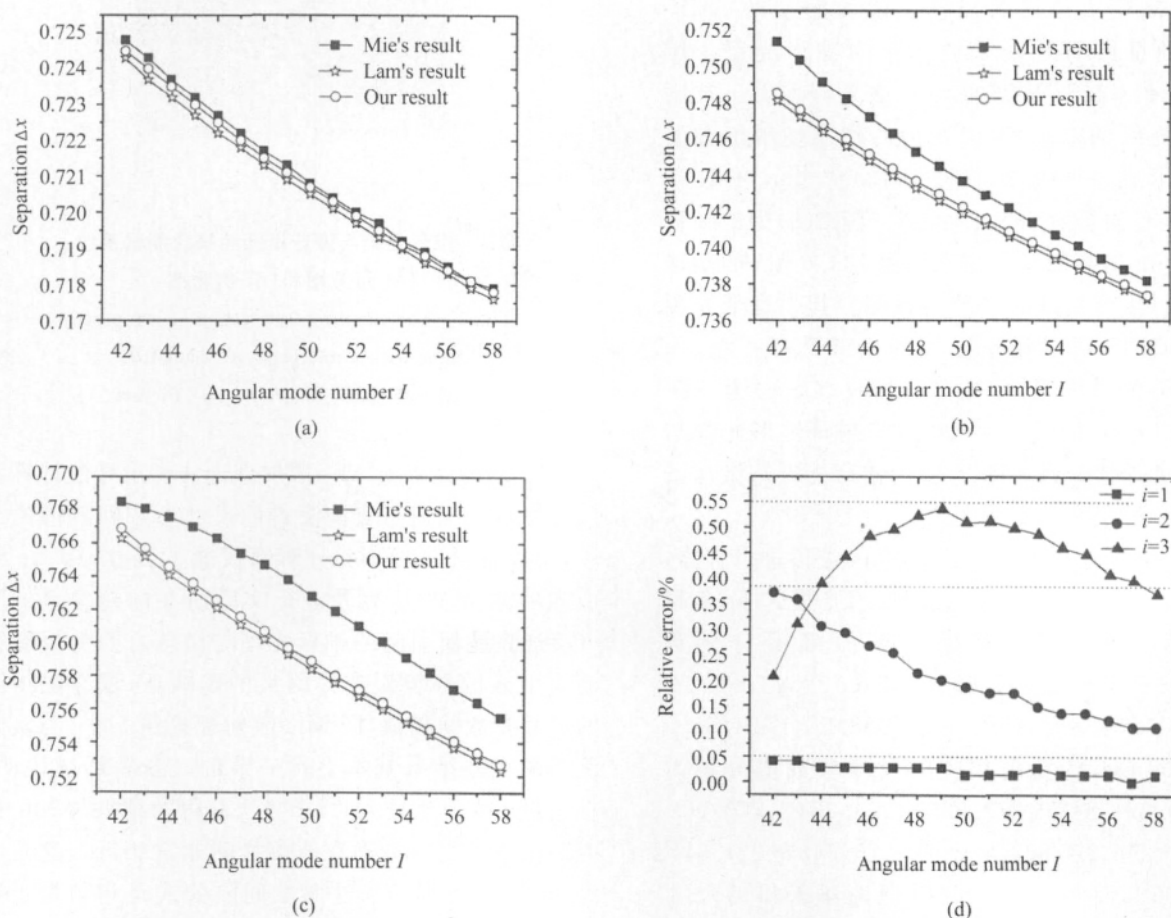


图 1 (a) Mie 散射理论法、(b) 求导法和 (c) 泰勒级数展开法求解 TE 模的尺寸参数间隔以及 (d) 相对误差
 Fig. 1 Solved the size parameter separations of TE mode from (a) Mie scattering method; (b) derivative method and (c) Taylor series expansion method, and (d) relative error

谐振模式为 TE 模时的尺寸参数间隔。图 1 中, (a)、(b)和(c)分别使用 Mie 散射理论数值计算方法、求导法和泰勒级数展开法, 计算径向量子数 (a) $i=1$ 、(b) $i=2$ 和 (c) $i=3$, 角量子数 $l=42\sim 58$ 以及相对折射率 $n=1.45$ 时的尺寸参数间隔值。从图可以看出, 我们提出的求导法和 Lam 的泰勒级数展开法一样, 都与通过 Mie 散射理论数值计算得到的精确间隔有很好的一致性和近似性, 而且求导法得到的结果更接近于 Mie 散射理论得到的精确值。图 1(d) 为径向量子数 $i=1, 2, 3$ 时, 利用求导法得到的计算结果与 Mie 散射理论精确数值解之间的相对误差, 可以看到, 误差在 0.55% 以内, 特别是当径向量子数 $i=1$ 时, 其误差小于 0.05%。而在实际的微球腔谐振模式的理论和实验研究中, 主要考虑的也是径向量子数 $i=1$ 的基模, 因而这一方法有助于指导光学微球腔的理论和实验研究。

3 实验测量和分析

实验利用火焰法熔拉已去除涂覆层的 SMF-28™, 得到锥腰直径为 $2.3\ \mu\text{m}$ 的锥形光纤。用 SYNRAD J48-2(S)W 型的 CO₂ 激光器熔融已拉制好的锥形光纤的末端, 表面张力的作用使得熔融的光纤末端形成一个微球, 直径为 $134.6\ \mu\text{m}$, 在 $1.55\ \mu\text{m}$ 波长附近的折射率为 1.4682。图 2(a) 为锥腰直径为 $2.3\ \mu\text{m}$ 的锥形光纤与直径为 $134.6\ \mu\text{m}$ 的微球谐振腔进行耦合测试的系统装置图。其中宽带光源 (BBS) 为 QPHOTONICS 公司的 QSDIL-500 型, 作为加载信号的激光光源; 光谱分析仪 (OSA) 为 ADVANTEST 公司的 Q8384 型, 用于测量锥形光纤与微球耦合的谐振光谱。图 2(b) 为锥形光纤与微球谐振腔耦合测试系统的实物图。

在 OSA 上选择 $1520\sim 1560\ \text{nm}$ 波段进行扫描, 获得了图 3(a) 所示的谐振光谱图。TE 模式下, 角量子数 $l=385\sim 395$ 的基模的谐振峰值分别为 $1559.42, 1555.53, 1551.63, 1547.66, 1543.83, 1539.99, 1536.21, 1532.43, 1528.53, 1524.83$ 和 $1521.09\ \text{nm}$, 计算出相应的尺寸参数值分别为 $271.1639, 271.8420, 272.5253, 273.2243, 273.9022, 274.5851, 275.2608, 275.9398, 276.6438, 277.3151$ 和 277.9969 , 而经由 Mie 散射理论法求得的尺寸参数值则分别是 $270.9112, 271.6003, 272.2892, 272.9782, 273.6672, 274.3561, 275.0451, 275.7340, 276.4229, 277.1118$ 和 277.8007 。由此可以算出, 通过 Mie 散射理论法得到的尺寸参数值与实验测

得的尺寸参数值的相对误差在 $0.07\sim 0.09\%$ 之间, 即谐振模式频率发生了偏移。偏移发生的原因主要是因为实验中利用 CO₂ 激光器熔融光纤末端获得的微球腔并非理想的完美球形, 而是有一定偏心率的椭球体, 其极方向和赤道方向上的直径分别为 $134.76\ \mu\text{m}$ 和 $134.53\ \mu\text{m}$, 计算出相应的偏心率为 0.17%。因而依据文献[18]中谐振模式频率偏移与偏心率和角量子数之间的关系, 可以算出相应的谐振模式频率偏移量约为 0.085%。

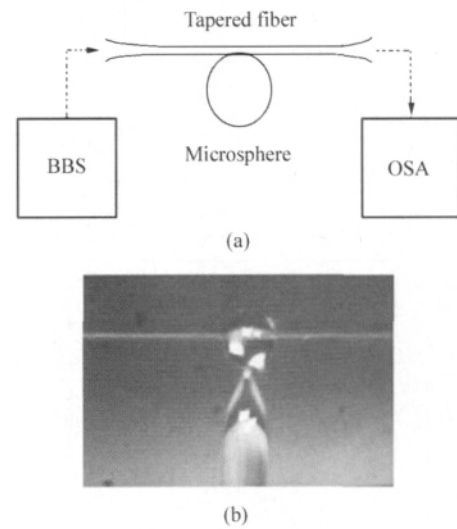


图 2 锥形光纤与微球谐振腔耦合测试系统: (a) 示意图和 (b) 实物图

Fig. 2 The coupling test system of a tapered fiber with a microsphere resonator: (a) Schematic diagram; (b) Picture

图 3(b) 是通过 Mie 散射理论法和求导法计算的尺寸参数间隔值与实验测得的尺寸参数间隔值的比较, 可以看出, 在 OSA 分辨率仅能达到 $0.01\ \text{nm}$ 时引入的测量误差, 以及进行实验所在的超净室的空气流通系统所引起的锥形光纤与微球之间的轻微振动而引入的环境误差等因素的影响下, 求导法得到的尺寸参数间隔值, 同 Mie 散射理论法一样, 与实际测得的实验结果基本上是一致的。图中插图说明, 在角量子数 l 比较大时, 求导法获得的结果与 Mie 散射理论法求得的精确数值解之间非常相近。这是因为, 求导法得到的尺寸参数间隔公式是和角量子数的倒数成正比的, 当角量子数 l 的值越大时, 后面未取到的高次小项所占的比重越小, 因而求导法得到的尺寸参数间隔就与 Mie 散射理论法解出的精确值越接近。

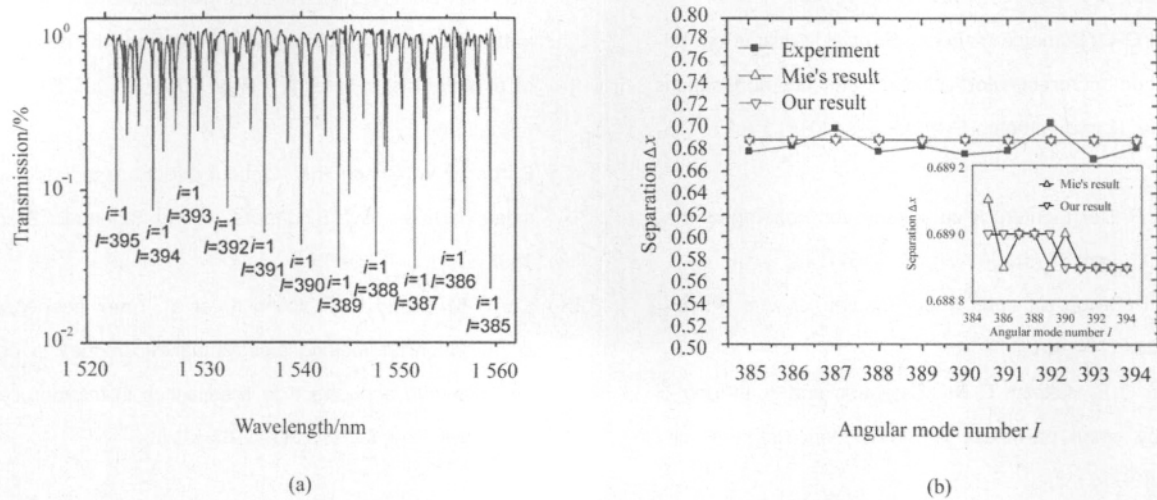


图 3 (a) 微球与锥形光纤耦合的谐振谱线;

(b) Mie 散射理论法和求导法计算得到的尺寸参数间隔与实验结果的比较

Fig. 3 (a) Resonant spectrum of the tapered fiber coupled with the microsphere; (b) Calculating results of size parameter separation from Mie scattering method and derivative method compared with experiment result

4 结 论

基于光学微球腔具有 WGM 模式的特点,从谐振模式的特征方程出发,利用直接求导法得出了求解本征模式间尺寸参数间隔的计算公式。通过与 Mie 散射理论的精确数值解的比较,表明使用求导法计算谐振模式间的尺寸参数间隔,比 Lam 的泰勒级数近似展开法具有更高的精度,同时与实际测得的实验结果也基本一致,并且求导法的计算和推导过程更加简便,为求解 WGM 模中谐振模式间的模式频率间隔和确定谐振模式图谱中谐振模式数,提供了一种近似效果和精确性较好的计算方法,有利于促进光学微球谐振腔的理论和实验研究。

参考文献:

- [1] Gorodetsky M L, Savchenkov A A, Ilchenko V S. Ultimate Q of optical microsphere resonators [J]. Opt. Lett., 1996, **21**(7): 453-455.
- [2] Vahala K J. Optical Microcavities [J]. Nature, 2003, **424**: 839-846.
- [3] Jonathan Ward, Oliver Benson. WGM microresonators: sensing, lasing and fundamental optics with microspheres [J]. Laser Photon. Rev, 2011, **5**(4): 553-570.
- [4] Gregory Kozyreff, Jorge Luis Dominguez-Juarez, Jordi

Martorell. Nonlinear optics in spheres: from second harmonic scattering to quasi-phase matched generation in whispering gallery modes [J]. Laser Photon. Rev., 2011, **5**(6): 737-749.

- [5] Pengfei Wang, Timothy Lee, Ming Ding, et al. Germanium microsphere high-Q resonator [J]. Opt. Lett., 2012, **37**(4): 728-731.
- [6] Yuqiang Wu, Jonathan M Ward, Síle Nic Chormaic. Ultra-low threshold green lasing and optical bistability in ZBNA (ZrF_4 - BaF_2 - NaF - AlF_3) microspheres [J]. J. Appl. Phys., 2010, **107**: 033103.
- [7] MA Feng-ying, SU Jian-po, GUO Mao-tian, et al. Study on the angular dependence of metal mirror micro-cavities [J]. Journal of Optoelectronics • Laser, 2010, **21**(7): 974-977.
马凤英, 苏建坡, 郭茂田, 等. 金属镜微腔发光方向性研究 [J]. 光电子 • 激光, 2010, **21**(7): 974-977.
- [8] LIU Guang-yu, NING Yong-qiang, QI Xiao-dong, et al. Study of whispering-gallery-mode in a photonic crystal microcavity [J]. Optoelectronics Letters, 2011, **7**(2): 0105-0108.
- [9] YAN Ying-zhan, JI Zhe, WANG Bao-long, et al. Evanescent wave extinction of microsphere high-Q model using tapered fiber [J]. Chinese J. Laser, 2010, **37**(7): 1789-1793.

严英占,吉喆,王宝龙,等.锥形光纤倏逝场激发微球腔高 Q 模式[J].中国激光,2010,37(7):1789-1793.

- [10] Righini G C, Dumeige Y, Féron P, et al. Whispering gallery mode microresonators: fundamentals and applications [J]. Riv. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis, 2011, 34(7): 435-488.
- [11] Debye P. Der Lichtdruck auf kugeln von beliebigem material[J]. Ann. Phys, 1909, 335(11): 57-136.
- [12] Mie G Beitrage zur optik truber medien[J]. Ann. Phys. , 1908, 25: 377-445.
- [13] Bohren C F, Huffman D R. Absorption and scattering of light by small particles [M]. New York: Interscience, 1983, 82-129.
- [14] Lam C C, Leung P T, Young K. Explicit asymptotic formulas for the positions, widths, and strengths of resonances in Mie scattering[J]. Opt. Soc. Am. B, 1992, 9(9): 1585-1592.
- [15] Alessandro Chiasera, Yannick Dumeige, Patrice Féron, et al. Spherical whispering-gallery-mode microresonators

[J]. Laser Photon. Rev. , 2010, 4(3): 457-482.

- [16] Abdullah Demir, Emre Yüce, Ali Serpengüzel, et al. Geometrically enhanced morphology-dependent resonances of a dielectric sphere [J]. Appl. Opt. , 2011, 50(36): 6652-6656.
- [17] Barber P W, Chang R K. Optical effects associated with small particle [M]. Singapore: World Scientific Press, 1998, 7-30.
- [18] Lai H M, Leung P T, Young K, et al. Time independent perturbation for leaking electromagnetic modes in open systems with application to resonances in microdroplets [J]. Phys. Rev. A, 1990, 41: 5187-5198.

作者简介:

顾国强 (1984—),男,博士研究生,主要从事光电器件及其应用系统的研究.